BULLETIN DE LA S. M. F.

E. TURRIÈRE

Étude des réseaux conjugués orthogonaux en projection sur un plan

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 228-238

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__228_1>

ÉTUDE DES RÉSEAUX CONJUGUÉS ORTHOGONAUX EN PROJECTION SUR UN PLAN;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0, \tag{1}$$

si trois de ses intégrales x, y, z sont telles que $x^2 + y^2 + z^2$ soit une quatrième intégrale, ces trois intégrales sont les coordonnées ponctuelles, par rapport à des axes rectangulaires, d'un point qui appartient à une surface dont les lignes de courbure sont précisément les courbes coordonnées (u) et (v). Je me propose de consacrer les recherches suivantes au cas analogue où une équation de la forme précédente (1) possède deux intégrales x, y telles que x^2+y^2 soit une troisième solution.

Des trois relations qui expriment que x, y, x^2+y^2 vérifient l'équation (1), résulte une relation indépendante des coefficients a et b,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0, \tag{2}$$

et qui exprime que, dans le plan Oxy, les courbes coordonnées (u), (v) constituent un réseau orthogonal. Réciproquement d'ailleurs, si deux intégrales x, y de l'équation (1) sont liées par la relation (2), la fonction x^2+y^2 est une troisième intégrale de l'équation (1).

Aux deux solutions x, y précédentes, adjoignons une intégrale quelconque z de l'équation (1). Les trois fonctions x, y, z définissent alors une surface (S) rapportée à un système de courbes (u), (v) qui sont conjuguées, sur (S), et orthogonales, en projection orthogonale sur Oxy. Lorsque, inversement, on connaît sur une surface un réseau conjugué qui se projette suivant un réseau orthogonal sur un plan, on se trouve dans le cas précédent. Ainsi donc *l'étude des surfaces rapportées à un réseau conjugué se projetant sur un plan suivant un réseau orthogonal est identique à l'étude des équations linéaires* (1) *admettant trois solutions dont l'une est la somme des carrés des deux autres.*

2. Avant de développer les considérations précédentes, je dois rappeler qu'à propos d'une question concernant les surfaces du second degré, Ribaucour a établi l'existence, sur toute surface, d'un réseau conjugué qui se projette sur un plan donné suivant un réseau orthogonal. En coordonnées rectangulaires ordinaires, le plan de projection étant le plan Oxy, l'équation du réseau projeté est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx}-1=0; \tag{3}$$

dans cette équation différentielle, r, s, t désignent les trois dérivées partielles du second ordre de la cote z par rapport à x et y.

Il existe un cas particulièrement remarquable, pour lequel l'équation différentielle (3) est indéterminée. Si les relations

$$r = t, \qquad s = 0$$

sont simultanément vérifiées, la surface donnée est un paraboloïde de révolution autour d'un axe parallèle à Oz. Dans ce cas, *tout réseau conjugué du paraboloïde de révolution se projette suivant un réseau orthogonal sur un plan perpendiculaire à l'axe.* — Ce fait, qui est intimement lié à l'existence de la solution $\theta = x^2 + y^2$ pour l'équation linéaire (1), résulte de ce que toute section plane du paraboloïde de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant un cercle ; tout système de diamètres conjugués de la section se projette par conséquent suivant deux diamètres rectangulaires du cercle. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique du paraboloïde de révolution, puisque c'est uniquement dans ce cas que l'équation (3) se présente sous forme indéterminée.

3. L'équation (3) peut servir à résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant donnée une surface, autre qu'un paraboloïde de révolution autour d'un axe parallèle à Oz, trouver le réseau conjugué dont la projection sur Oxy est un réseau orthogonal.

L'équation différentielle (3) représente précisément le réseau orthogonal et donne par conséquent la solution toujours réelle du problème posé. C'est ainsi que, pour une quadrique d'équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

l'équation différentielle est celle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x^2 - y^2 + B - A}{xy}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

des coniques homofocales à la section principale $z = 0$;

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} - 1 = 0.$$

2° Trouver une surface (S) telle qu'un de ses réseaux conjugués se projette suivant un réseau orthogonal donné dans le plan Oxy.

Le problème dépend de l'intégration d'une équation linéaire du second ordre de la forme

$$(4) \qquad Hr + 2Ks + Lt = 0,$$

dans laquelle H, K, L sont des fonctions de x, y déterminées, à un facteur près, et liées par la condition

$$H + L = 0,$$

qui impose, comme solutions particulières, tous les paraboloïdes de révolution d'axe parallèle à Oz.

De cette même condition il résulte que l'équation (4) est toujours du type hyperbolique. L'intégrale générale (S) dépend de deux fonctions arbitraires, comme le prouve *a priori* l'exemple le plus simple

$$s = 0, \qquad z = X(x) + Y(y),$$

pour lequel le réseau est

$$x = \text{const.}, \qquad y = \text{const.}$$

4. Soit donné, dans le plan Oxy, un réseau orthogonal (u, v). L'élément linéaire du plan,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

prend la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

dans laquelle E et G sont des fonctions données de u et de v, assujetties à vérifier la relation

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right] = 0.$$

Dans ces conditions, l'équation linéaire (1) dont x et y sont des solutions est complètement déterminée : les coefficients a et b sont définis en fonction de u et de v par deux équations du premier degré qui donnent immédiatement, en vertu de la relation (2),

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right] a = -\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v},$$

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right] b = -\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v};$$

ces expressions de a et de b sont susceptibles de prendre des formes plus simples par l'introduction des coefficients E et G du ds^2 :

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{E}}{\partial v},\\ b &= -\frac{\partial \operatorname{Log}\sqrt{G}}{\partial u}.\end{aligned}\right.$$

Les invariants de l'équation (1),

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab,$$

deviennent

$$h = a\frac{\partial}{\partial u}\left(\operatorname{Log}\frac{a}{\sqrt{G}}\right), \qquad k = b\frac{\partial}{\partial v}\left(\operatorname{Log}\frac{b}{\sqrt{E}}\right).$$

5. Jusqu'à présent, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature du réseau orthogonal imposé. Parmi les réseaux orthogonaux, les plus remarquables sont les réseaux isothermiques, qui s'introduisent dans la question actuelle si l'on exige l'égalité entre les deux invariants de l'équation linéaire (1).

La condition nécessaire et suffisante pour l'égalité des deux invariants h et k est, en effet,

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v};$$

elle exprime que a et b sont les dérivées d'une même fonction par rapport à v et u. Appliquant au cas actuel, il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\operatorname{Log}\left(\frac{E}{G}\right) = 0;$$

$\operatorname{Log}\frac{E}{G}$ doit être la somme de deux fonctions respectives de u et de v; il sera donc possible de poser

$$\frac{E}{U} = \frac{G}{V};$$

par suite, par un changement de paramètres, le ds^2 sera réductible à la forme isothermique.

Je supposerai dorénavant qu'il en est ainsi ; je poserai

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\lambda^2},$$

λ étant une fonction positive de u, v satisfaisant à l'équation (5), dans laquelle

$$E = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad G = \frac{1}{\lambda^2},$$

c'est-à-dire à l'équation

$$\Delta_2 \operatorname{Log} \lambda = 0;$$

λ est donc une fonction positive dont le logarithme est une intégrale de l'équation de Laplace.

Les relations (6) deviennent alors

$$a = \frac{\partial \operatorname{Log} \lambda}{\partial v}, \qquad b = \frac{\partial \operatorname{Log} \lambda}{\partial u};$$

les coefficients a et b de l'équation linéaire (1) satisfont donc aux relations

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}, \qquad \frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{\partial b}{\partial u},$$

et sont par conséquent des fonctions harmoniques associables, de telle sorte que $a + ib$ soit une fonction de la variable complexe $u + iv$.

L'équation (1) *la plus générale qui correspond à un réseau isothermique s'obtient donc en prenant pour a et b des fonctions de u, v telles que*

$$a + ib = \text{fonction de } (u + iv).$$

L'invariant unique de l'équation (1) est alors

$$h = \frac{\partial^2 \operatorname{Log} \lambda}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \operatorname{Log} \lambda}{\partial u} \frac{\partial \operatorname{Log} \lambda}{\partial v},$$

c'est-à-dire

(7) $$h = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v}.$$

De ce que $\operatorname{Log} \lambda$ est une fonction harmonique de u et de v il résulte que *l'invariant h est lui aussi une fonction harmonique :* en posant, en effet,

$$\lambda = e^{\omega},$$

il vient

$$\Delta_2 h = \frac{\partial^2 \Delta_2 \omega}{\partial u \, \partial v} + 2 \Delta_2 \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \Delta_2 \omega}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \Delta_2 \omega}{\partial u};$$

la condition $\Delta_2 \omega = 0$ entraîne donc la condition $\Delta_2 h = 0$.

L'équation (1) ayant ses invariants égaux peut être réduite à la forme

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \, \partial v} = h\theta_1, \tag{8}$$

en effectuant le changement de fonction inconnue défini par la formule

$$\theta_1 = \lambda\theta;$$

l'équation en θ_1 n'est autre que l'équation linéaire en θ_1 et $\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v}$ admettant λ pour solution particulière.

6. L'invariant h est, en général, distinct de zéro. Il y a naturellement lieu d'examiner le cas particulier où il est nul. L'équation (7) donne alors

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

et, comme Log λ doit être harmonique, λ est nécessairement réductible à l'une des quatre formes suivantes :

$$\lambda = e^{-mv},$$
$$\lambda = u^2 + v^2,$$
$$\lambda = \cos u + \operatorname{ch} v,$$
$$\lambda = e^{iu} + e^v.$$

Écrivons, en effet, que, U et V étant deux fonctions respectives de u et de v, la fonction Log (U + V) satisfait à l'équation de Laplace ; il vient la relation

$$UU'' - U'^2 + VV'' - V'^2 + UV'' + VU'' = 0,$$

qui, dérivée successivement par rapport à u et v, donne

$$U'V''' + V'U''' = 0.$$

De cette dernière relation il résulte qu'on pourra prendre

$$U' = 0,$$

d'où, m étant une constante arbitraire,

$$\lambda = e^{-mv} \times \text{const.};$$

c'est la première forme de réduction.

Si U' et V' ne sont pas nuls, on aura

$$\frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'} = 0,$$

et, par suite, on pourra poser

$$\begin{aligned} U''' &= - m^2 U', \\ V''' &= m^2 V', \end{aligned}$$

la constante m étant quelconque. Si elle est nulle, U et V sont des polynomes du second degré

$$\begin{aligned} U &= \alpha u^2 + \alpha_1 u + \alpha_2, \\ V &= \beta v^2 + \beta_1 v + \beta_2; \end{aligned}$$

entre les coefficients α, α_1, α_2, β, β_1, β_2 existent des relations

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ 2(\alpha_2 + \beta_2)(\alpha + \beta) &= \alpha_1^2 + \beta_1^2, \end{aligned}$$

qui entraînent la réduction de λ à la seconde forme.

En supposant m distinct de zéro, on obtient

$$\begin{aligned} U &= \alpha \cos mu + \alpha_1 \sin mu + \alpha_2, \\ V &= \beta \operatorname{ch} mv + \beta_1 \operatorname{sh} mv + \beta_2, \end{aligned}$$

avec les deux conditions simultanées

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 &= 0, \\ \alpha^2 + \alpha_1^2 &= \beta^2 - \beta_1^2. \end{aligned}$$

On peut donc prendre : soit

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = 1, \qquad \beta^2 - \beta_1^2 = 1;$$

soit

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = 0, \qquad \beta^2 - \beta_1^2 = 0;$$

on a ainsi les deux formes

$$\begin{aligned} \lambda &= \sin m(u - u_0) + \operatorname{sh} m(v - v_0), \\ \lambda &= \alpha\, e^{imu} + \beta\, e^{\pm mv}; \end{aligned}$$

par changements de variables il est possible de réduire λ à l'une ou l'autre des formes simples

$$\begin{aligned}\lambda &= \cos u + \operatorname{ch} v,\\ \lambda &= e^{-iu},\\ \lambda &= e^{-v},\\ \lambda &= e^{iu} + e^{v};\end{aligned}$$

les formes

$$\lambda = e^{-iu}, \qquad \lambda = e^{-v}$$

sont d'ailleurs réductibles l'une à l'autre et rentrent dans celle

$$\lambda = e^{-mv},$$

déjà trouvée; il reste ainsi les formes

$$\begin{aligned}\lambda &= \cos u + \operatorname{ch} v,\\ \lambda &= e^{iu} + e^{v}.\end{aligned}$$

7. Pour terminer, j'examinerai les cas particulièrement remarquables

$$\begin{aligned}\lambda &= e^{-mv},\\ \lambda &= u^2 + v^2.\end{aligned}$$

La forme $\lambda = e^{-mv}$ s'obtient en posant

$$\begin{aligned}x &= e^{mv}\cos u,\\ y &= e^{mv}\sin u;\end{aligned}$$

le système (u, v) dérive donc du système de coordonnées polaires : le réseau (u, v) est celui des cercles de centre O et des droites émanant de ce centre O. L'équation correspondante est

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} - m\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0;$$

son intégrale générale est

$$\theta = e^{mv}[\mathrm{U}(u) + \mathrm{V}(v)];$$

l'équation générale des surfaces (S) associées au ds^2,

$$ds^2 = e^{2mv}(du^2 + dv^2),$$

est donc

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\, f\left(\frac{y}{x}\right) + g(x^2+y^2);$$

la surface la plus générale représentée par cette équation est la surface diamétrale, pour les droites parallèles à Oz, d'un cône quelconque de sommet situé sur Oz et d'une surface quelconque de révolution autour de Oz.

8. La seconde forme est

$$\lambda = u^2 + v^2;$$

le ds^2 correspondant est

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2)^2},$$

c'est-à-dire celui qu'on obtient en prenant

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On est ainsi conduit à la solution générale

$$\theta = \frac{U + V}{u^2 + v^2},$$

U et V désignant deux fonctions arbitraires et respectives de u et de v. Les surfaces correspondantes ont pour équation générale

$$z = (x^2 + y^2)\left[U\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + V\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right];$$

parmi ces surfaces, se trouve la cylindroïde de Cayley-Plücker, qu'on obtient pour les fonctions particulières

$$U = u^2, \qquad V = -v^2.$$

Pour toutes les surfaces précédentes, le réseau conjugué projeté suivant un réseau orthogonal est celui des cercles passant par l'origine et tangents à chacun des axes coordonnés. Ces surfaces sont d'ailleurs les plus générales qui correspondent à ce réseau.

Plus généralement, pour un élément linéaire

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2)^m},$$

on est conduit à des surfaces, que j'avais étudiées dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1909 (p. 95), d'équations

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = r^k \sin k\theta,$$

dont les lignes de niveau, les lignes de plus grande pente, les lignes asymptotiques ont pour projections des lignes spirales sinusoïdes. Les projections des lignes constituant un réseau conjugué, orthogonal en projection, sont aussi des spirales sinusoïdes.