BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEBESGUE

Sur un théorème de M. Volterra

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 238-244

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__238_1>

SUR UN THÉORÈME DE M. VOLTERRA;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. On sait que la méthode des approximations successives a permis de résoudre des équations intégrales de formes très variées. Toutes les fois qu'on utilise cette méthode, il faut démontrer la convergence du développement qu'elle fournit pour la solution de l'équation. Dans cette démonstration, on est souvent guidé par une analogie entre les approximations nécessaires pour la résolution de l'équation intégrale et celles qu'il faudrait effectuer pour résoudre une certaine équation ordinaire, qui est en quelque sorte l'image de l'équation fonctionnelle proposée. Dans la plupart des cas, cette analogie est assez lointaine; M. Volterra a délimité une classe d'équations intégrales pour laquelle l'analogie est, au contraire, tellement simple qu'il suffit de connaître la solution de l'équation image pour pouvoir écrire de suite la solution de l'équation proposée. Je rappelle ces résultats de M. Volterra :

Soient deux fonctions $F(x,y)$, $G(x,y)$; elles seront dites *permutables*, si l'on a

$$\int F(x,s)\,G(s,y)\,ds = \int G(x,s)\,F(s,y)\,ds;$$

les intégrales sont étendues, soit à l'intervalle (x,y), c'est la permutabilité de première espèce, soit à l'intervalle fixe (a,b), c'est la permutabilité de seconde espèce.

Pour $G \equiv F$, F et G sont permutables et l'on appelle F^2 la valeur commune des intégrales; pour $G \equiv F^2$, F et G sont permutables et l'on appelle F^3, la valeur des intégrales, etc. On définit ainsi les puissances itérées F, F^2, F^3, ..., de F; elles sont toutes permutables avec F. Il en est par suite de même d'un polynome quelconque par rapport aux puissances itérées de F, ou même d'une série entière en F, pourvu que ce polynome ou cette série ne contienne pas de terme constant, car F n'est pas en général permutable avec une constante.

Ceci posé, soit une équation analytique de la forme

$$(1) \qquad G(z, z_1) = a_1 z + b_1 z_1 + a_2 z^2 + b_2 z z_1 + c_2 z_1^2 + \ldots = 0,$$

admettant une solution analytique donnée par la formule

$$(2) \qquad z_1 = \varphi(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots.$$

Dans le développement de $G(z, z_1)$ substituons à la place de z et de z_1 deux fonctions $F(x,y)$, $F_1(x,y)$ et convenons que z^α, z_1^β, $z^\alpha z_1^\beta$ seront remplacées par $F^\alpha(x,y)$, $F_1^\beta(x,y)$,

$$\int F^\alpha(x, s)\, F_1^\beta(s, y)\, ds,$$

F^α et F_1^β étant deux puissances itérées. On obtient ainsi une équation fonctionnelle (1′) associée à l'équation (1), (1) est l'image de (1′). En opérant de même sur la relation (2), on définit la fonction associée à $\varphi(z)$, celle dont $\varphi(z)$ est l'image. Cette relation (2′) définit alors la solution $F_1(x,y)$ de l'équation (1′), car il est évident que les approximations successives nécessaires pour résoudre l'équation (1′) et qui conduiraient à la relation (2) sont les images de celles qu'il faut effectuer pour résoudre (1′) et qui donnent la relation (2′). (2′) fournit donc la solution de l'équation (1′) et aussi de l'équation analogue obtenue en permutant F^α et F_1^β dans les intégrales qu'on substitue à $z^\alpha z_1^\beta$.

Mais tout cela suppose essentiellement la convergence des séries (1) et (2). Pour énoncer les théorèmes que M. Volterra a donnés à ce sujet, il sera commode, comme cela arrive fréquemment dans ce genre de questions, de laisser subsister les paramètres z et z_1 dans les fonctions associées. Je suppose donc qu'à une fonction $H(z, z_1, \ldots)$ donnée, comme image, par une série entière convergente au voisinage du point $z = z_1 = \ldots = 0$, et nulle en ce point, nous associons la fonction

$$\mathcal{H}[z\, F(x,y), z_1\, F_1(x,y), \ldots]$$

obtenue en remplaçant respectivement z^α, z_1^β, ..., $z^\alpha z_1^\beta$, ..., par

$$z^\alpha F^\alpha(x,y), \quad z_1^\beta F_1^\beta(x,y), \quad \ldots, \quad z^\alpha z_1^\beta \int F^\alpha(x,s) F_1^\beta(s,y)\,ds, \quad \ldots.$$

M. Volterra a démontré que $\mathcal{H}[zF, z_1F_1, \ldots]$ *était une fonction entière de* z, z, ... *s'il s'agissait de la permutabilité de première espèce et, s'il s'agissait de la permutabilité de seconde espèce, que si* H *était fonction entière ou une fonction méromorphe, il en était de même de* $\mathcal{H}$.

M. Volterra déduit le premier résultat du calcul de l'ordre de grandeurs des puissances itérées, calcul qui lui avait permis autrefois de montrer que la solution d'une équation linéaire intégrale à limites variables est une fonction entière du paramètre; il déduit le second résultat du théorème fondamental si important de M. Fredholm sur les équations intégrales linéaires à limites fixes. De ces deux résultats sur les équations linéaires, le théorème précédent peut aussi se déduire par un procédé différent de celui de M. Volterra, grâce à un théorème de M. J. Hadamard.

2. Prenons le cas où la fonction image $H(z)$ ne contient qu'une variable; alors

$$H(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{3}$$

et

$$\mathcal{H}[z F(x,y)] = a_1 z F(x,y) + a_2 z^2 \int F(x,s) F(s,y)\,ds + \ldots. \tag{4}$$

Donc $\mathcal{H}$ s'obtient en multipliant les coefficients de H respectivement par ceux de la série

$$z\Phi(z; x,y) = z F(x,y) + z^2 \int F(x,s) F(s,y)\,ds + \ldots. \tag{5}$$

Par conséquent, on a, d'après la formule de Parseval,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \Phi(t; x,y)\, H\left(\frac{z}{t}\right) dt, \tag{6}$$

$\mathcal{C}$ étant un contour entourant l'origine laissant à l'extérieur tous les points singuliers de Φ et entourant tous les points $\frac{z}{u}$, u étant un point singulier de H.

Quant à la fonction Φ, il suffit de se rappeler la théorie des équations intégrales ou de remarquer que la série qui représente $z\Phi$ est associée à la fonction $\frac{z}{1-z}$, pour voir que Φ est le noyau résolvant du noyau $F(x, y)$, c'est-à-dire la solution de l'équation

$$(7) \qquad \Phi(z; x, y) + z \int \Phi(z; x, s) F(s, y) \, ds = F(x, y).$$

Ainsi la correspondance entre une fonction image et la fonction associée est susceptible d'une expression analytique. Ceci s'étend de suite au cas où H dépend de plusieurs variables. Pour le cas de deux variables, posons

$$H(z, z_1) = H(z, 0) + H(0, z_1) + K(z, z_1).$$

On transformera $H(z, 0)$, $H(0, z_1)$, comme il vient d'être dit respectivement à l'aide des noyaux résolvants Φ et Φ_1 de F et F_1. Quant à $K(z, z_1)$, qui contient zz_1 en facteur, on le transformera d'abord à l'aide de $\Phi(z, x, s)$ puis à l'aide de $\Phi_1(z, s, y)$ et l'on intégrera par rapport à s, cela donnera :

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{\mathcal{C}_1} \int_{\mathcal{C}} \Phi_1(t_1; s, y) \Phi(t; x, s) K\left(\frac{z}{t}, \frac{z_1}{t_1}\right) dt \, dt_1 \, ds.$$

Remarquons que Φ et Φ_1 pourraient dépendre d'autres paramètres que ceux qui ont été indiqués; en particulier, Φ_1 pourrait dépendre de z et c'est ce qui arriverait si F_1 était la solution de l'équation intégrale

$$\mathcal{H}[z F(x, y); F_1(z; x, y)] = 0.$$

On pourrait aussi donner des représentations de $\mathcal{H}$, faisant intervenir la fonction $\Psi(z, z_1; x, y)$, dont le développement a pour image

$$\frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z_1} - 1.$$

Mais tout cela nous est inutile; j'ai voulu seulement indiquer que les fonctions de variables complexes H et $\mathcal{H}$ étaient liées analytiquement et c'est, je crois, l'existence de ce lien qui explique la correspondance étroite qu'il y a entre les fonctions de variables complexes et les relations fonctionnelles considérées par M. Volterra. C'est ce lien, en tout cas, qui permet les considérations suivantes :

3. Utilisant la formule de Parseval sous la forme générale que j'ai rappelée, M. Hadamard a démontré qu'une série entière d'une variable complexe, la série (4), par exemple, qui a pour coefficients les produits des coefficients de même rang de deux autres séries entières, les séries (3) et (5), par exemple, ne peut avoir d'autres points singuliers que ceux dont les affixes sont les produits des affixes des points singuliers des deux séries primitives. Il convient de compléter ce théorème, comme le fait M. Borel, en remarquant que si α et β sont les affixes de deux pôles de (3) et (5), $\alpha\beta$ est l'affixe d'un pôle de (4). Toutefois, si le produit $\alpha\beta$ pouvait être obtenu de plusieurs manières comme produit d'affixes singuliers, ce résultat pourrait être en défaut; mais si z n'est que d'un nombre fini de manières le produit d'affixes singuliers α et β et si tous ces affixes correspondent à des pôles, z sera un point régulier ou un pôle de la fonction (4).

Ceci étant, s'il s'agit de la permutabilité de première espèce, $z\Phi$ est une fonction entière, donc il en est de même de $\mathcal{H}$. S'il s'agit de la permutabilité de seconde espèce, $z\Phi$ est, d'après le résultat classique de M. Fredholm, une fonction méromorphe; donc, si H est une fonction entière, il en est de même de $\mathcal{H}$; si H est une fonction méromorphe, il en est aussi de même de $\mathcal{H}$.

Tout cela est jusqu'ici prouvé pour H dépendant d'une seule variable; mais il suffit d'appliquer le résultat obtenu successivement à chaque variable pour conclure dans le cas général.

Ce mode de démonstration présente l'avantage de fournir, dans tous les cas, des renseignements sur les affixes singuliers de $\mathcal{H}(z)$; ils font partie de l'ensemble des produits d'affixes singuliers de H et de Φ. Cet avantage pourrait être appréciable s'il arrivait qu'une équation du type considéré se rencontre effectivement dans des recherches physiques, car on sait de quel intérêt est alors tout renseignement sur le plus petit module des affixes singuliers.

4. La relation (6) permet, étant donné $H(z)$, de calculer

$$\mathcal{H}\,[zF(x,y)];$$

est-il possible de trouver une relation entre H et $\mathcal{H}$ qui soit résolue par rapport à H ? La question revient à la résolution en H de la relation (6), c'est-à-dire à la résolution d'une équation intégrale linéaire qu'on peut faire rentrer dans la catégorie des équations de première espèce du type Fredholm. C'est dire que la question posée est vraisemblablement fort difficile à résoudre, dans le cas général. Il n'en est que plus intéressant de noter que l'une des premières correspondances entre fonction associée et fonction image qui ait été considérée est susceptible d'une double expression analytique, résolue soit en $\mathcal{H}$, soit en H. Je veux parler du cas où l'on s'occupe de la permutabilité de première espèce et où $F \equiv 1$; alors on a, à la place de la formule (4),

$$\mathcal{H}[z\,F(x,y)] = (y-x)\left[\frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \ldots\right].$$

M. Borel a montré qu'on a

$$(y-x)\,H(z) = \int_0^\infty e^{-s}\,\mathcal{H}[s z\,F(x,y)]\,ds.$$

Ce résultat est utilisé par M. Borel de la manière suivante : la formule précédente permet de calculer $H(z)$ à l'aide de la fonction entière $\mathcal{H}$; elle peut donc permettre, et c'est ce qui arrive effectivement, de calculer $H(z)$ pour des valeurs de z, pour lesquelles le développement (3) ne serait pas convergent.

Il est évident que toutes les fois qu'on saura résoudre par rapport à H l'équation (6) on aura un procédé de sommation, avantageux ou non, de la série (3).

On peut peut-être trouver des procédés de sommation des séries entières, analogues à ceux de MM. Borel, Mittag-Leffler, Lindelöf, Le Roy, par l'emploi de cette remarque. Ce qui du moins est certain, c'est que tout procédé de sommation des séries entières permet d'écrire de nouveaux développements pour les solutions des équations du type de celles que nous étudions ici. Par exemple, d'un résultat connu de M. Mittag-Leffler, il résulte que l'expression

$$\frac{F}{\Gamma(1+\alpha)} + z\frac{F^2}{\Gamma(1+2\alpha)} + z^2\frac{F^3}{\Gamma(1+3\alpha)} + \ldots$$

tend vers la solution Φ de l'équation (7), quand α tend vers zéro, pour toute valeur de z qui ne se trouve pas sur une demi-droite, prolongement au delà de α du segment joignant l'origine à un point singulier α de Φ.