BULLETIN DE LA S. M. F.

F. BOULAD

Sur les équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 383-392
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__383_1>

SUR LES ÉQUATIONS A QUATRE VARIABLES D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE SUPÉRIEUR,

Par M. Farid Boulad.

On sait que, pour représenter une équation $F_{1234} = 0$ à quatre variables z_1, z_2, z_3, z_4 par un nomogramme à double alignement, il faut, en premier lieu, résoudre le problème analytique suivant posé, par M. d'Ocagne, sous le nom de *la disjonction des variables*, dans son *Traité de Nomographie*, page 213 et dans son *Cours de Calcul graphique et Nomographie*, page 305.

Les éléments F_i, G_i, H_i *désignant des fonctions réelles d'une* *seule variable* z_i, *former les deux déterminants*

$$(1) \quad \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_0 & G_0 & H_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2) \quad \begin{vmatrix} F_0 & G_0 & H_0 \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0,$$

tels que l'équation proposée $F_{1234} = 0$ *résulte de l'élimination de la variable auxiliaire* z_0 *entre ces deux déterminants.*

A notre connaissance, ce problème assez difficile n'a reçu, jusqu'à ce jour, aucune solution entièrement générale.

Toutefois, nous croyons qu'il est possible de parvenir à le résoudre dans le cas pratiquement fréquent où l'équation ci-dessus se présente sous la forme suivante :

$$(3) \qquad F_{1234} \equiv F_1 F_{234} + G_1 G_{234} + H_1 H_{234} = 0,$$

au plus d'ordre nomographique 2 par rapport à une même variable, d'après M. Soreau, et d'ordre quelconque par rapport à chacune des trois autres variables z_2, z_3 et z_4.

En effet, en étendant à ce cas particulier la notion fondamentale des valeurs critiques de M. d'Ocagne, que nous avons appliquée récemment à la disjonction des variables de l'équation suivante :

$$F_{123} = F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0,$$

en vue de sa représentation par un nomogramme à simple alignement (¹), nous avons été conduit à une méthode permettant, d'effectuer la disjonction des variables de l'équation (3), en résolvant des identités fonctionnelles au moyen de la susdite notion de M. d'Ocagne et l'emploi de la notion d'ordre nomographique de M. Soreau.

Voici en quoi consiste notre méthode :

Il est aisé de voir que, si l'équation (3) est représentable par un nomogramme à double alignement, et si les lettres F_1, G_1, H_1 qui y sont figurées sont les éléments de la première ligne du déterminant (1), chacun des autres éléments F_0, G_0, H_0 de ce dernier peut être admis, dans ce cas, comme fonction des deux variables z_3

(¹) (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 14 février 1910, p. 379; *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXIX, p. 105.

et z_4. Cela dit, soient

$$(4) \qquad F_0 = F_{34}, \qquad G_0 = G_{34}, \qquad H_0 = H_{34}$$

les expressions de ces fonctions. Pour qu'il existe une *charnière* ou *ligne des pivots* pour ce nomogramme, il faudrait que l'élimination de z_3 et z_4 entre ces expressions donne une certaine relation

$$(5) \qquad \Phi(F_0, G_0, H_0) = 0,$$

qui soit réelle et homogène en F_0, G_0, H_0.

Si cette condition est réalisée, on obtient alors l'équation de cette *charnière* en coordonnées cartésiennes et homogènes x, y, z, en substituant ces dernières respectivement à F_0, G_0, H_0 dans la relation (5).

Il en résulte que le problème de la disjonction des variables de l'équation $F_{1234} = 0$, dans le cas de la forme (3), se ramène *à la recherche des trois systèmes de trois fonctions* F_i, G_i, H_i *(*$i = 2, 3, 4$*) et du système de fonctions* (4) *de deux variables* z_3 *et* z_4 *avec la condition que l'élimination de ces variables entre les fonctions de ce dernier système donne une certaine relation qui soit réelle et homogène en* F_0, G_0, H_0 *et que les deux déterminants* (1) *et* (2) *soient nuls.*

Cela posé, les deux systèmes de fonctions (F_2, G_2, H_2) et (F_0, G_0, H_0) s'obtiennent en résolvant les deux identités suivantes [1] :

$$(6) \qquad F_2 F_{234} + G_2 G_{234} + H_2 H_{234} \equiv 0 \qquad \text{(quels que soient } z_3 \text{ et } z_4\text{)},$$

$$(7) \qquad F_0 F_{224} + G_0 G_{234} + H_0 H_{234} \equiv 0 \qquad \text{(quel que soit } z_2\text{)},$$

lesquelles avec l'équation (3) donnent, par élimination, le premier déterminant cherché

$$(8) \qquad F_{1234} \equiv \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_0 & G_0 & H_0 \end{vmatrix} = 0.$$

---

[1] Il convient de remarquer qu'en résolvant les deux identités (6) et (7), on effectue, en même temps, la disjonction des variables de l'équation (3) en vue de sa représentation par nomogramme à simple alignement, constitué par deux échelles curvilignes (z_1) et (z_2) et par un réseau (z_3, z_4) formé de deux faisceaux de lignes (z_3) et (z_4). *Cours de Calcul graphique et Nomographie* de M. d'Ocagne, p. 239 et son *Traité de Nomographie*, p. 321.

Connaissant, dès lors, les éléments de ce déterminant, on peut définir les échelles (z_1) et (z_2) par les formules

$$x_i = \frac{F_i}{H_i}, \qquad y_i = \frac{G_i}{H_i}, \qquad H_i \neq 0 \qquad (i = 1 \text{ et } 2).$$

Quant à la *charnière*, elle est définie, comme il a été dit ci-dessus, par l'équation $\Phi(x, y, 1) = 0$ obtenue en substituant à F_0, G_0, H_0 respectivement x, y, 1 dans la relation (5) qui résulte de l'élimination des deux variables z_3 et z_4 entre les expressions (4) de F_0, G_0, H_0 en fonctions de ces deux variables.

A présent, il reste à déterminer les deux systèmes de fonctions (F_3, G_3, H_3) et (F_4, G_4, H_4). Pour cela remarquons que, si

$$F_0\varphi_{34} + G_0\psi_{34} + H_0\chi_{34} = 0 \tag{9}$$

est le développement du déterminant (2) par rapport à F_0, G_0, H_0 ces deux systèmes de fonctions inconnues sont définies par les deux identités

$$F_3\varphi_{34} + G_3\psi_{34} + H_3\chi_{34} \equiv 0 \qquad (\text{quel que soit } z_4), \tag{10}$$

$$F_4\varphi_{34} + G_4\psi_{34} + H_4\chi_{34} \equiv 0 \qquad (\text{quel que soit } z_3), \tag{11}$$

lesquelles avec l'équation (9) donnent, par élimination, le second déterminant cherché (2).

Or, pour avoir les expressions du système des trois fonctions φ_{34}, ψ_{34}, χ_{34} figurées dans les relations ci-dessus, il suffit d'identifier, quels que soient z_1 et z_2, l'équation $F_{1234} = 0$ avec celle qui résulte en tirant les valeurs de F_0, G_0, H_0 des deux équations (5) et (9) et en les portant dans le développement suivant :

$$F_{1234} \equiv F_0\varphi_{12} + G_0\psi_{12} + H_0\chi_{12} = 0, \tag{12}$$

du déterminant (8) par rapport à F_0, G_0, H_0.

Il va sans dire que ce développement devra être effectué, après avoir fait disparaître dans ce déterminant les facteurs parasites; si, bien entendu, ces derniers ne sont pas contenus dans l'équation proposée (3).

Ces facteurs proviennent, comme on le sait, de la coïncidence de la *charnière* avec le support d'une ou deux échelles (z_1) et (z_2).

Il peut arriver, également, que la *charnière* se confonde avec le support d'une ou des deux échelles (z_3) et (z_4), il y aura lieu, dans ce cas, d'écrire le développement (9) du déterminant (2) sous la forme dans laquelle les facteurs parasites sont aussi chassés, comme on le verra dans les applications données ci-dessous.

Résolution des identités ci-dessus au moyen de la notion des valeurs critiques. — Distinguons les deux cas suivants :

Premier cas : Identité à satisfaire quelle que soit une seule des variables des fonctions connues. — Soit, par exemple, l'identité (7) à résoudre en rendant indéterminée la variable z_2.

Pour cela, on l'ordonne nomographiquement par rapport aux fonctions de cette variable. Soit

$$f_2^1 f_{34}^1 + f_2^2 f_{34}^2 + \ldots + f_2^{p_2} f_{34}^{p_2} \equiv 0$$

la forme la plus générale obtenue d'ordre quelconque $(p_2 - 1)$ par rapport à z_2, et dans laquelle f_{34}^1, f_{34}^1, ... désignent des fonctions quelconques de z_3 et z_4 linéaires et homogènes en F_0, G_0, H_0. En exprimant, suivant la méthode de M. d'Ocagne, que cette équation doit avoir lieu quel que soit z_2, on obtient le système suivant de p_2 équations linéaires et homogènes en F_0, G_0, H_0

$$f_{34}^1 \equiv 0, \qquad f_{34}^2 \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad f_{34}^{p_2} \equiv 0.$$

Finalement, il suffit de vérifier la compatibilité de ce système, quels que soient z_3 et z_4, et ensuite d'en résoudre deux quelconques, pour avoir les fonctions inconnues.

Deuxième cas : Identité à satisfaire quelles que soient deux des variables des fonctions connues. — Soit, par exemple, l'identité (6) à résoudre en rendant indéterminées les deux variables z_3 et z_4. Pour cela, on l'ordonne nomographiquement par rapport aux fonctions de l'une de ces deux variables, z_3 par exemple. Soit

$$f_3^1 f_{24}^1 + f_3^2 f_{24}^2 + \ldots + f_3^{p_3} f_{24}^{p_3} \equiv 0$$

la forme obtenue d'ordre quelconque $(p_3 - 1)$ par rapport à z_3. On ordonne, de même, chacune des fonctions f_{34}^k par rapport à l'autre variable z_4. Soit également

$$f_{24}^k = f_4^1 \varphi_2^k + f_4^2 \varphi_2^k + \ldots + f_4^{p_4} \theta_2^k \equiv 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, p_4)$$

la forme obtenue d'ordre quelconque $(p_4 - 1)$ par rapport à z_4. Si l'on exprime que l'identité (6) doit avoir lieu quels que soient z_3 et z_4, on a alors le système suivant de $p_3 \times p_4$ équations linéaires et homogènes en F_2, G_2, H_2 :

$$\varphi_2^k \equiv 0, \qquad \psi_2^k \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad \theta_2^k \equiv 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, p_3).$$

Il suffit, à présent, de vérifier, quel que soit z_2, la compatibilité de ce système d'équations et d'en résoudre ensuite deux quelconques, pour avoir les valeurs des fonctions inconnues F_2, G_2, H_2.

Remarque importante relative au premier cas ci-dessus. — S'il arrive que l'une des fonctions inconnues F_0, G_0, H_0 figurées dans l'équation (9), soit nulle, par exemple la fonction H_0, on peut, dans ce cas, adopter pour son facteur χ_{34} l'expression

$$\chi_{34} = \Sigma \alpha f_3^{k} + \Sigma \beta f_4^{k'} + \Sigma \gamma f_3^{k} f_4^{k'} + \theta,$$

où $f_3^k, f_4^{k'}$ désignent les fonctions de z_3 et z_4 par rapport auxquelles les deux fonctions φ_{34} et ψ_{34} figurées dans l'équation (9) sont nomographiquement ordonnables, et α, β, γ, θ des constantes qui seront déterminées de façon que chacun des deux systèmes d'équation en (F_3, G_3, H_3) et (F_4, G_4, H_4), résultant respectivement de la résolution des deux identités (6) et (11), soit compatible [1].

APPLICATION.

Premier exemple. — Appliquons notre méthode à l'équation suivante :

$$(13) \qquad F_{1234} \equiv f_1 - f_2 + (g_1 f_2 - 1)\left(\frac{f_3}{2} \pm \sqrt{\frac{f_3^2}{4} + \frac{1 - f_3 f_4}{g_4}}\right) = 0,$$

où f_i, g_i désignent des fonctions quelconques de la variable z_i.

---

[1] Il importe d'appliquer cette remarque dans la recherche des deux systèmes de fonctions (F_2, G_2, H_2) et (F_3, G_3, H_3) par notre susdit procédé de la disjonction des variables de l'équation

$$F_{1234} = F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0$$

dans le cas où l'une des trois fonctions F_1, G_1, H_1 est nulle, comme, par exemple, dans le cas de l'équation à trois variables d'ordre 3 la plus générale.

Pour cela posons, pour abréger,

$$f_{34} = \pm\sqrt{\frac{f_3^2}{4} + \frac{1 - f_3 f_4}{g_4}}$$

et essayons d'effectuer la disjonction de ses variables en prenant

$$F_1 = f_1, \qquad G_1 = 1, \qquad H_1 = g_1.$$

Cette équation s'écrit alors sous la forme

$$F_{1234} \equiv F_1 - G_1\left(f_2 + \frac{f_3}{2} + f_{34}\right) + H_1 f_2\left(\frac{f_3}{2} + f_{34}\right) = 0.$$

Si maintenant on substitue à F_1, G_1, H_1 respectivement F_2, G_2, H_2, et si l'on rend indéterminés successivement z_3 et z_4 dans l'identité obtenue, on a deux équations linéaires et homogènes ayant pour solution

$$F_2 = f_2^2, \qquad G_2 = f_2, \qquad H_2 = 1.$$

De même, en substituant à F_1, G_1, H_1 respectivement F_0, G_0, H_0 et en exprimant que l'identité obtenue doit avoir lieu quel que soit z_2, on a les relations

$$\frac{F_0}{G_0} = \frac{G_0}{H_0} = \frac{f_3}{2} + f_{34},$$

qui montrent que la *charnière* est une parabole ayant pour équation

$$x = y^2.$$

Nous pouvons, dès lors, exprimer comme ci-après F_0, G_0, H_0 en fonction d'une seule variable auxiliaire z_0 :

$$F_0 = f_0^2, \qquad G_0 = f_0, \qquad H_0 = 1;$$

de là les deux déterminants

$$(14)\quad F_{1234} \equiv \begin{vmatrix} f_1 & 1 & g_1 \\ f_2^2 & f_2 & 1 \\ f_0^2 & f_0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (15)\quad \begin{vmatrix} f_0^2 & f_0 & 1 \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit, maintenant, d'avoir les éléments de ce dernier déterminant. Pour cela, écrivons le développement suivant du déterminant (14), après en avoir chassé le facteur parasite $(f_0 - f_2)$

$$F_{1234} \equiv f_1 - (f_0 + f_2) + g_1 f_2 f_0 = 0.$$

Ensuite remplaçons dans ce développement f_0 par sa valeur tirée du développement suivant :

$$f_0^2 \varphi_{34} + f_0 \psi_{34} + 1 \times \chi_{34} = 0,$$

du déterminant (15), nous avons l'équation

$$f_1 - f_2 + (g_1 f_2 - 1)\left[\frac{-\psi_{34}}{2\varphi_{34}} \pm \sqrt{\left(\frac{\psi_{34}}{2\varphi_{34}}\right)^2 - \frac{\chi_{34}}{\varphi_{34}}}\right] = 0.$$

L'identification de celle-ci, quels que soient z_1 et z_2, avec l'équation (13), donne

$$\varphi_{34} = g_4, \qquad \psi_{34} = f_3 g_4, \qquad \chi_{34} = f_3 f_4 - 1.$$

Finalement en résolvant les deux identités (10) et (11) après y avoir remplacé φ_{34}, ψ_{34}, χ_{34} par leurs valeurs ci-dessus, nous aurons les éléments cherchés.

$$F_3 = f_2, \qquad G_3 = 1, \qquad H_3 = 0,$$
$$F_4 = 1, \qquad G_4 = 1, \qquad H_4 = g_4,$$

Remarque. — Si, par notre méthode, on ne parvient pas à effectuer la disjonction des variables de l'équation proposée, même en combinant ses quatre variables de toutes les manières possibles, on essaiera d'y arriver en appliquant la même méthode à cette équation après lui avoir fait subir une transformation algébrique non linéaire.

Deuxième exemple. — Considérons l'équation

$$(16) \quad F_{1234} \equiv (f_1 f_2 - g_1)(f_3 - f_4)^2 + f_3 f_4 (f_3 - f_4) - f_2 f_3^2 f_4^2 = 0.$$

Pour effectuer la disjonction de ses variables, prenons

$$F_1 = f_1, \qquad G_1 = g_1, \qquad H_1 = 1$$

et ordonnons par rapport à ces éléments, il vient

$$F_{1234} \equiv F_1 f_2 (f_3 - f_4)^2 - G_1 (f_3 - f_4)^2 - H_1 [f_2 f_3^2 f_4^2 - f_3 f_4 (f_3 - f_4)] = 0.$$

Substituons à F_1, G_1, H_1 respectivement F_2, G_2, H_2 et rendons indéterminées z_3 et z_4 dans l'identité obtenue ; nous avons

$$F_2 = 1, \qquad G_2 = f_2, \qquad H_2 = 0.$$

De même, substituons à F_1, G_1, H_1 respectivement F_0, G_0, H_0 et rendons indéterminé z_2 dans l'équation obtenue, nous avons les relations

$$\frac{F_0}{f_3^2 f_4^2} = \frac{G_0}{f_3 f_4 (f_3 - f_4)} = \frac{H_0}{(f_3 - f_4)^2};$$

ce qui montre que la charnière est une parabole ayant pour équation

$$y^2 = x.$$

Nous pouvons donc écrire

$$F_0 = f_0^2, \qquad G_0 = f_0, \qquad H_0 = 1,$$

où f_0 désigne, comme précédemment, une fonction quelconque d'une variable auxiliaire z_0.

De là, les deux déterminants

$$(17) \quad F_{1234} \equiv \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ 1 & f_2 & 0 \\ f_0^2 & f_0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (18) \quad \begin{vmatrix} f_0^2 & f_0 & 1 \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour avoir les éléments de ce dernier déterminant, écrivons le développement suivant du déterminant (17).

$$(19) \qquad F_{1234} = f_0^2 f_2 + f_0 + f_1 f_2 - g_1 = 0.$$

Remarquons ensuite que, si

$$(20) \qquad \Phi_{1234} = 0$$

est l'équation qu'on obtient en remplaçant dans (19) la valeur de f_0 tirée du développement suivant du déterminant (18)

$$f_0^2 \varphi_{34} + f_0 \varphi_{34} + 1 \times \chi_{34} = 0,$$

la résolution de l'identité suivante, quels que soient z_1 et z_2,

$$F_{1234} \equiv \Phi_{1234},$$

par rapport à φ_{34}, ψ_{34}, χ_{34}, ne peut avoir lieu, à moins toutefois de faire coïncider le support de l'échelle (z_3) avec la *charnière ;*

c'est-à-dire décrire le déterminant (18) sous la forme

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} f_0^2 & f_0 & 1 \\ f_3^2 & f_3 & 1 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ayant le développement suivant, après y avoir fait disparaître le facteur parasite $f_0 - f_2$,

$$(22)\qquad (f_0 + f_3)\varphi_{34} + 1 \times \psi_{34} + 0 \times \chi_{34} = 0.$$

En effet, si l'on tire de ce dernier la valeur de f et si on la porte dans le développement (19), on obtient l'équation

$$-f_2(\psi_{34} + f_3\varphi_{34})^2 - (\psi_{34} + f_3\varphi_{34})\varphi_{34} + (f_1 f_3 - g_1)\varphi_{34}^2 = 0.$$

Or, l'identification de cette dernière, quels que soient z_1 et z_2, avec l'équation (16), donne les expressions suivantes de φ_{34} et ψ_{34} :

$$\varphi_{34} = f_3 - f_4, \qquad \psi_{34} = -f_3^2.$$

Quant à celle de la fonction χ_{34}, elle est de la forme suivante, en vertu de la remarque importante ci-dessus :

$$\chi_{34} = \alpha f_3 + \beta f_4 + \gamma f_3^2 + \delta f_3^2 f_4;$$

α, β, γ, δ sont des paramètres que nous allons déterminer, en même temps que les éléments F_4, G_4, H_4. Pour cela introduisons, dans les deux identités (10) et (11), les expressions ci-dessus des trois fonctions φ_{34}, ψ_{34} et χ_{34} et remplaçons aussi, dans l'identité (10), F_3, G_3, H_3 par leurs valeurs suivantes admises ci-dessus :

$$F_3 = f_3^2, \qquad F_3 = f_3, \qquad H_3 = 1.$$

A présent, en exprimant que cette dernière identité doit avoir lieu quels que soient z_3 et z_4, on obtient

$$\delta = 1, \qquad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Tenant compte de cette condition, la résolution de l'identité (11) donne les éléments cherchés

$$F_4 = 0, \qquad G_4 = f_4, \qquad H_4 = 1.$$

FIN DU TOME XL.