BULLETIN DE LA S. M. F.

E. KERAVAL

Surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent comme celles de la surface des ondes

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 39-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__39_1>

SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT COMME CELLES DE LA SURFACE DES ONDES;

Par M. E. Keraval.

Au Tome IV de sa *Théorie des surfaces*, dans une Note sur la surface des ondes de Fresnel, M. Darboux a démontré, pour cette surface, la proposition suivante :

En tous les points de chaque ligne asymptotique de la surface, le plan tangent à la surface est tangent au cône d'un complexe de Chasles dont le tétraèdre fondamental est formé par les plans de symétrie et le plan de l'infini.

L'intégrale générale de l'équation différentielle des lignes asymptotiques est alors de la forme

$$\sqrt{\alpha z} + \sqrt{-\beta p x} + \sqrt{-\gamma q y} = 0, \tag{1}$$

où α, β, γ sont trois constantes de somme nulle.

Réciproquement, M. Darboux cherche ensuite toutes les surfaces pour lesquelles l'équation différentielle des lignes asymptotiques est de la forme (1) et il trouve d'abord les surfaces tétraédrales et ensuite toutes celles qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$s^2 - rt = \frac{pq}{xyz}(px + qy - z) \tag{2}$$

avec cette différence que pour les surfaces tétraédrales seulement la génératrice de contact du cône du complexe et du plan tangent coïncide avec une tangente à une ligne asymptotique de la surface.

C'est cette équation (2) que je me propose d'étudier. Je vais faire voir qu'on peut ramener son intégration à celle de

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(x-y)^2} \qquad \text{pour} \qquad \lambda = \frac{1}{2},$$

qui est l'équation de Poisson. On sait que pour celle-ci on ne peut obtenir d'intégrale générale explicite bien qu'on puisse écrire sans aucun signe de quadrature les équations de chaque système de caractéristiques. Il en est de même pour l'équation (2).

Cette équation (2) étant de la forme

$$s^2 - rt = F(x, y, z, p, q),$$

les caractéristiques sont les lignes asymptotiques des surfaces intégrales. Ce sont donc des courbes dont le plan osculateur est tangent au cône d'un complexe tétraédral. Au lieu de la forme (1) je prends la forme

$$b\sqrt{px} + \sqrt{qy} + a\sqrt{z} = 0 \qquad \text{avec} \qquad a^2 - b^2 = 1; \tag{3}$$

à tout système de valeurs de a, b correspond un complexe. Soit maintenant

$$p(X - x) + q(Y - y) = Z - z,$$

l'équation du plan osculateur à la courbe au point x, y, z. Ces trois quantités x, y, z, ainsi que p, q, sont fonctions d'un paramètre λ. Je dérive deux fois par rapport à λ et j'exprime que les équations obtenues sont vérifiées pour $X = x$, $Y = y$, $Z = z$. Au lieu de garder p et q j'introduis

$$\frac{px}{z} = A, \qquad \frac{qy}{z} = B.$$

J'ai ainsi

$$A\frac{X}{x} + B\frac{Y}{y} - \frac{Z}{z} = A + B - 1.$$

En effectuant les opérations que j'ai indiquées on trouve les deux équations

$$A\frac{x'}{x} + B\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z},$$

$$A\left(\frac{x'}{x}\right)^2 + B\left(\frac{y'}{y}\right)^2 - \left(\frac{z'}{z}\right)^2 = A'\frac{x'}{x} + B'\frac{y'}{y}.$$

Je vais poser pour abréger $\frac{x'}{x} = X$, $\frac{y'}{y} = Y$, $\frac{z'}{z} = Z$, X, Y, Z n'ayant pas naturellement la même signification que plus haut. J'ai alors

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} AX + BY &= Z, \\ AX^2 + BY^2 - Z^2 &= A'X + B'Y. \end{aligned} \right.$$

Or, pour vérifier (3), on peut poser

$$A = \lambda^2, \qquad B = (a + b\lambda)^2,$$

d'où

$$A' = 2\lambda, \qquad B' = 2b(a + b\lambda).$$

Si j'élimine Z entre les équations (4) je trouve

$$A(A - 1)X^2 + B(B - 1)Y^2 + 2ABXY + A'X + B'Y = 0.$$

Cette équation en X, Y représente une conique dont le discriminant Δ est nul si l'on remplace A et B en fonction de λ. Cette équation se décompose donc et donne

$$\lambda(\lambda^2 - 1)X + \lambda(a + b\lambda)^2 Y + 1 = \pm[1 + Y(a + b\lambda)(a\lambda + b)].$$

Si je prends le signe + je trouve

$$\lambda X + b(a + b\lambda)Y = 0$$

ou

$$A'X + B'Y = 0;$$

dans ce cas la génératrice de contact coïncide avec la tangente à la courbe, il faut donc prendre le signe —

$$\lambda(\lambda^2-1)X+(a+b\lambda)(b\lambda^2+2a\lambda+b)Y+2=0,$$
$$AX+BY=Z.$$

La première équation va nous donner x et y en fonction de λ, la deuxième donnera z.

Pour plus de symétrie on peut introduire une deuxième variable μ liée à la première par la relation

$$\mu=a+b\lambda.$$

On a alors

$$(5)\qquad b\lambda(\lambda^2-1)\frac{x'}{x}+\mu(\mu^2-1)\frac{y'}{y}+2b=0.$$

Posons

$$\frac{d}{d\mu}\operatorname{Log}x=\mu(\mu^2-1)b\,\varphi_\lambda^{(\mathrm{IV})}$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Log}x}{b}=\mu(\mu^2-1)\varphi_\lambda'''+b(1-3\mu^2)\varphi_\lambda''+6b^2\mu\varphi_\lambda'-6b^3\varphi$$

et (5) devient

$$\operatorname{Log}y=-b^2[\lambda(\lambda^2-1)\varphi_\lambda'''+(1-3\lambda^2)\varphi''+6\lambda\varphi'-6\varphi]-\operatorname{Log}\frac{\mu^2-1}{\mu^2}.$$

On a ensuite

$$\frac{z'}{z}=b^2\lambda\mu(a\lambda^2+2b\lambda+a)\varphi_\lambda^{\mathrm{IV}}-\frac{2b\mu}{\mu^2-1},$$

et il suffit de remplacer φ^{IV} par une dérivée d'ordre cinq pour pouvoir intégrer sans aucun signe de quadrature.

Théorème. — *L'intégration de l'équation de M. Darboux*

$$(2)\qquad s^2-rt=\frac{pq}{xyz}(px+qy-z)$$

se ramène à celle de l'équation d'Euler

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{K(1-K)}{(x-y)^2}\qquad\text{où}\qquad K=\frac{1}{2}.$$

Je pose comme plus haut

$$\frac{px}{z} = A, \qquad \frac{qy}{z} = B,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{pq}{xyz}(px + qy - z)} = \frac{z}{xy}\sqrt{AB(A + B - 1)}.$$

Si α, β sont les paramètres des lignes asymptotiques, les équations des caractéristiques me donnent

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha} = -\lambda\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \alpha} = +\lambda\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} = +\lambda\frac{\partial x}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \beta} = -\lambda\frac{\partial y}{\partial \beta}.$$

Je pose

$$X = \operatorname{Log} x, \qquad Y = \operatorname{Log} y, \qquad P = \operatorname{Log} p, \qquad Q = \operatorname{Log} q,$$
$$F = \sqrt{AB(A + B - 1)}.$$

Les quatre équations précédentes deviennent alors, en remplaçant α, β par x, y qui désigneront les paramètres des lignes asymptotiques :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{F}{B}\dfrac{\partial X}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial y} = +\dfrac{F}{B}\dfrac{\partial X}{\partial y}; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = +\dfrac{F}{A}\dfrac{\partial Y}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{F}{A}\dfrac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases}$$

Or, A et B sont les mêmes aux points homologues de toutes les surfaces intégrales, c'est-à-dire aux points qui correspondent aux mêmes valeurs des paramètres. On peut donc poser par analogie avec les quadriques

$$A = \frac{(xy - 1)^2}{(x - y)^2}, \qquad B = \frac{(x + y)^2}{(x - y)^2},$$

d'où

$$F = \frac{(xy - 1)(x + y)(xy + 1)}{(x - y)^3},$$

$$\frac{F}{A} = \frac{(x + y)(xy + 1)}{(x - y)(xy - 1)}, \qquad \frac{F}{B} = \frac{x^2y^2 - 1}{x^2 - y^2}.$$

Si je pose, en adoptant les notations de M. Darboux,

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

je sais que le système (I) conduit à l'équation

$$\mathcal{F}\left(X\sqrt{\frac{F}{B}}\right) = \mathcal{F}\left(\sqrt{\frac{F}{B}}\right).$$

Or,

$$\mathcal{F}\sqrt{\frac{F}{B}} = -\frac{xy}{(x^2y^2-1)^2} - \frac{3xy}{(x^2-y^2)^2}.$$

Je suis donc ramené à intégrer l'équation

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{xy}{(x^2y^2-1)^2} - \frac{3xy}{(x^2-y^2)^2}.$$

Je pose $x^2 = \alpha$, $y^2 = \beta$, cette équation devient

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{-1}{4(\alpha\beta-1)^2} - \frac{3}{4(\alpha-\beta)^2}.$$

Je change encore de variables et je prends

$$x' = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}, \qquad y' = \frac{\beta+1}{\beta-1};$$

l'équation devient, en mettant xy au lieu de $x'y'$,

$$\mathcal{F}(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{(x+y)^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{(x-y)^2}.$$

Elle est de la forme considérée par M. Darboux au Tome II de sa *Théorie des surfaces*

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\mu(\mu-1)}{(x+y)^2} - \frac{\mu'(\mu'-1)}{(x-y)^2}$$

en posant

$$\mu = +\frac{1}{2}, \qquad \mu' = -\frac{1}{2};$$

on peut augmenter μ' d'une unité et prendre

$$\mu = \mu' = +\frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$\mathcal{F}(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{(x+y)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+y)^2},$$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{xy}{(x^2-y^2)^2};$$

en prenant pour variables $x^2 = \alpha$, $y^2 = \beta$, on aura

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{4(\alpha-\beta)^2}.$$

C'est bien l'équation de Poisson. On pourrait faire de même pour le système (II), mais je préfère indiquer une deuxième méthode.

THÉORÈME I. — *On passe de l'equation*

(A) $$s^2 - rt = \frac{pq}{xyz}(px + qy - z)$$

à l'équation

(B) $$x(x-1)r + 2xys + y(y-1)t = 0$$

par une transformation de contact.

Je pars de l'équation (A) à laquelle j'applique la transformation ponctuelle

$$x = e^{x'}, \qquad y = e^{y'}, \qquad z = e^{z'},$$

d'où

$$p = p' e^{z'-x'}, \qquad q = q' e^{z'-y'},$$
$$r = e^{z'-2x'}[r' + p'(p'-1)],$$
$$t = e^{z'-2y'}[t' + q'(q'-1)],$$
$$s = e^{z'-x'-y'}[s' + p'q'].$$

Les exponentielles disparaissent dans (A) qui devient, en supprimant les accents,

(C) $$(s^2 - rt) + 2pqs - p(p-1)t - q(q-1)r = 0.$$

A cette équation j'applique la transformation de Legendre

$$p = x', \qquad q = y', \qquad s^2 - rt = \frac{1}{s'^2 - r't'}.$$

Cette équation devient, en supprimant les accents,

(D) $$x(x-1)r + 2xys + y(y-1)t + 1 = 0.$$

Si alors $z = F(x, y)$ est une solution particulière de cette équation en posant

$$z = F(x, y) + z_1,$$

elle prend la forme (B).

Il résulte de là que l'équation (A) de M. Darboux admet un groupe d'ordre infini de transformations de contact, car si dans (B) on change z par $z + z_1$, z_1 étant une intégrale particulière quelconque, l'équation ne change pas.

Théorème II. — *L'équation*

$$x^{2-k}(x^k - 1)r + 2xys + y^{2-k}(y^k - 1)t = 0, \tag{E}$$

qui correspond à la déformation infiniment petite des surfaces tétraédrales, s'intègre complètement (mais pas explicitement); elle est équivalente à l'équation d'Euler

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\mu(1-\mu)}{(x-y)^2}.$$

La surface tétraédrale qui correspond à (E) est

$$x^k + y^k + z^k = 1.$$

Pour $k = 1$, l'équation (E) devient l'équation (D); la surface tétraédrale est alors un plan. On peut prendre alors la surface

$$z = (x + y - 1)\,\mathrm{Log}(x + y - 1) - x\,\mathrm{Log}\,x - y\,\mathrm{Log}\,y.$$

k et m sont liés par la relation

$$\mu = \frac{k-2}{2k}.$$

Je considère l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &+ \left[\frac{P}{x+y} + \frac{P'}{y-x} + \frac{Rx}{xy+1} + \frac{R'x}{xy-1}\right]\frac{\partial z}{\partial x} \\ &+ \left[\frac{P}{x+y} + \frac{P'}{x-y} + \frac{Ry}{xy+1} + \frac{R'y}{xy-1}\right]\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\end{aligned} \tag{λ}$$

où les constantes $PP'RR'$ sont liées par la relation

$$P + P' + R + R' = 0.$$

Cette équation a ses invariants égaux et égaux à

$$\frac{P(P-1)}{(x+y)^2}-\frac{P'(P'-1)}{(x-y)^2}-\frac{R(R-1)}{(xy+1)^2}+\frac{R'(R'-1)}{(xy-1)^2}.$$

En cherchant si cette équation (λ) admet des solutions de la forme

$$x=(x+y)^{\mu}(x-y)^{\mu'}(xy-1)^{\nu}(xy+1)^{\nu'},$$

je trouve que, pour

$$P=\frac{1-m}{2},\qquad P'=\frac{1+m}{2},\qquad R=\frac{m-3}{2},\qquad R'=\frac{1-m}{2},$$

l'équation (λ) admet les deux solutions

$$z=\left(\frac{x+y}{y-x}\right)^m \qquad \text{et} \qquad z=\left(\frac{xy-1}{y-x}\right)^m,$$

de telle sorte qu'en changeant de variables et en posant

$$x=\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\right)^m,\qquad y=\left(\frac{\alpha\beta-1}{\beta-\alpha}\right)^m,$$

la nouvelle équation sera linéaire et homogène par rapport aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Or, si l'on forme cette équation en remplaçant α, β par x, y, on trouve précisément l'équation (E), à condition de poser

$$\frac{2}{m}=k.$$

Ainsi l'équation (E) et l'équation (λ), où P, P', R, R' ont les valeurs indiquées, se correspondent par une transformation ponctuelle. J'ai donc à ramener cette équation (λ) à l'équation d'Euler.

Or, cette équation (λ) a été envisagée sous sa forme réduite par M. Darboux au Chapitre des équations harmoniques. La forme réduite ne change pas si l'on change P' en $1-P'$; or $P'=1-P$. On peut donc prendre

$$P=P'=\frac{m+1}{2}.$$

On peut augmenter R et R' chacun d'une unité, alors

$$R=\frac{m-1}{2},\qquad R'=\frac{3-m}{2},$$
$$R+R'=1$$

On remplace R' par $1-R'=R$, alors

$$R=R'=\frac{m-1}{2}.$$

Enfin on peut augmenter R et R' de un, alors

$$P=P'=R=R'=\frac{m+1}{2}$$

et la forme réduite de l'équation (λ) est alors

$$\mathcal{F}(z)=\frac{m^2-1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(xy-1)^2}-\frac{1}{(xy+1)^2}\right],$$

ou

$$\mathcal{F}(z)=(m^2-1)\left[\frac{-xy}{(x^2-y^2)^2}+\frac{xy}{(x^2y^2-1)^2}\right],$$

et, en prenant pour variables $x^2=\alpha$, $y^2=\beta$,

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{m^2-1}{4}\left[\frac{1}{(\alpha\beta-1)^2}-\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\right].$$

Je pose

$$\alpha=\frac{x+1}{x-1},\qquad \beta=\frac{y+1}{y-1},$$

$$\mathcal{F}(z)=\frac{m^2-1}{4}\left[\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right];$$

une dernière transformation donne

$$\mathcal{F}(z)=\frac{1-m^2}{4}\,\frac{1}{(x-y)^2}.$$

Enfin je pose

$$m=1-2\mu,$$

$$\mathcal{F}(z)=\frac{\mu(1-\mu)}{(x-y)^2};$$

d'ailleurs

$$k=\frac{2}{m}=\frac{2}{1-2\mu},$$

d'où

$$\mu=\frac{k-2}{2k}.$$

Solutions particulières de l'équation

$$\text{(A)}\qquad s^2-rt=\frac{pq}{xyz}(px+qy-z).$$

Il est clair d'abord que l'équation (A) admet toutes les transformations homographiques qui conservent le tétraèdre fondamental T formé des plans de coordonnées et du plan de l'infini. On vérifie facilement que (A) admet la solution

$$z = \mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right)$$

quel que soit F et, par suite,

$$z = x\,\mathrm{F}(y) \qquad \text{et} \qquad z = y\,\mathrm{F}(x);$$

on trouve encore

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \mathrm{C}.$$

Je vais maintenant associer à l'équation (A) une autre équation (A′) qui me conduira à quelques surfaces intéressantes. J'applique à (A) la transformation d'Ampère

$$x' = p, \qquad y' = y, \qquad z' = z - px, \qquad p' = -x, \qquad q' = q$$

et j'ai l'équation

$$(\mathrm{A}') \qquad \frac{r}{t} = \frac{py}{qx}\,\frac{z - px}{z - qy}.$$

Or, cette équation (A′) est vérifiée par les surfaces tétraédrales de Lamé, donc l'équation (A) admet comme solution les transformées de ces surfaces par la transformation d'Ampère. On a ainsi les surfaces

$$(\mathrm{S}) \qquad z = \mathrm{A}(x^\alpha + h)^{\frac{1}{\alpha}}(y^\beta + k)^{\frac{1}{\beta}}$$

avec

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

On trouve les mêmes surfaces en cherchant les solutions de (A) qui sont de la forme

$$z = \mathrm{F}(x)\,\mathrm{G}(y).$$

Lorsqu'on a l'équation d'une surface vérifiant (A), on a immédiatement ses lignes asymptotiques, puisqu'il suffit de poser

$$\frac{px}{z} = \frac{(uv - 1)^2}{(u - v)^2}, \qquad qy = \frac{(u + v)^2}{(u - v)^2},$$

u et v étant les paramètres des lignes asymptotiques.

Les surfaces (S) rapportées à leurs lignes asymptotiques ont pour équations

$$x^{\alpha} = A\,\frac{(uv-1)^2}{(u^2-1)(v^2-1)},$$

$$y^{\beta} = B\,\frac{(u+v)^2}{uv},$$

$$z^{\alpha+\beta} = C\,\frac{(u-v)^{2\alpha+2\beta}}{(uv)^{\alpha}(u^2-1)^{\beta}(v^2-1)^{\beta}},$$

avec

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1.$$

En particulier, en transformant les quadriques

$$Ax^2+By^2+Cz^2+D=0$$

par la transformation d'Ampère, on trouve une surface intéressante dite *surface de l'arrière voussure Saint-Antoine* (PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, et ROUCHÉ, *Comptes rendus*, mars 1877). On peut l'écrire

$$c^2z^2 = (x^2-a^2)(y^2-b^2)$$

et rapportée à ses lignes asymptotiques,

$$x^2 = a^2\,\frac{(uv-1)^2}{(u^2-1)(v^2-1)},$$

$$y^2 = b^2\,\frac{(u+v)^2}{4uv},$$

$$z^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}\,\frac{(u-v)^4}{4uv(u^2-1)(v^2-1)}.$$

Cette surface rentre dans la catégorie de celles étudiées par M. E. Blutel dans sa Thèse sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. Appelons ces surfaces des surfaces Σ.

Si l'on transforme par la transformation d'Ampère une surface réglée absolument quelconque, on obtient une surface Σ. Le fait est à peu près évident et résulte de ce que la transformation d'Ampère fait correspondre à une droite un paraboloïde hyperbolique de plans directeurs zOx et zOy, c'est-à-dire une quadrique passant par deux arêtes de T. Soient A, B, C les points à l'infini sur Ox, Oy, Oz : T sera le tétraèdre OABC et à un lieu de droites il correspondra en général un lieu de coniques s'appuyant sur CA, CB.

Si l'on se donne une droite Δ et des plans tangents passant par Δ et correspondant homographiquement aux points de contact, la transformation d'Ampère leur fera correspondre une conique avec plans tangents le long de la conique enveloppant un cône.

On peut généraliser. Les transformées par homographie de la transformation de Lie fournissent des transformations de contact qui, à une droite, font correspondre une quadrique passant par une conique fixe. Par exemple, les deux égalités

$$-xz'+zx'+y'-z=0,$$
$$+yz'-zy'+x'+1=0$$

définissent une transformation de contact qui fait correspondre, à une droite, une quadrique passant par le cercle $z=0$, $x^2+y^2=1$. De pareilles transformations transforment une surface réglée en une surface Σ engendrée par une conique mobile s'appuyant sur une conique fixe. Il est facile de voir que le théorème de M. E. Blutel sur les courbes conjuguées des coniques se déduit dans ce cas particulier du théorème bien connu sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées.

Dans la surface Saint-Antoine on retrouve les propriétés indiquées par M. E. Blutel pour les surfaces du quatrième degré ayant deux paires de points doubles. Il y a deux séries de coniques passant par les couples de points doubles : les cônes circonscrits le long des coniques d'une série ont leurs sommets sur la droite qui joint les points coniques de l'autre; les deux systèmes de coniques sont donc conjugués.

L'équation (A′) peut fournir des solutions intéressantes de l'équation (A). Par exemple, la fonction

$$z=\frac{xy}{Axy+Bx+Cy+D}$$

est une solution de (A′). La transformation d'Ampère la change en une solution de (A). On trouve ainsi une surface du quatrième degré engendrée par le déplacement d'une conique tangente à CA en un point variable. Pour $A=0$ on a une surface Σ, puisque c'est la transformée d'une surface réglée.

Cette surface en fournit d'autres plus générales en appliquant le théorème suivant qui me paraît être une des propriétés intéressantes de cette équation (A') :

Théorème. — *L'équation*

$$\text{(A')} \qquad \frac{r}{t} = \frac{py}{qx}\,\frac{z-px}{z-qy}$$

ne change pas si on lui applique la transformation

$$x' = x^m,$$
$$y' = y^m,$$
$$z' = z^m,$$

où m est quelconque.

Effectivement on trouve

$$p' = p\left(\frac{z}{x}\right)^{m-1}, \qquad q' = q\left(\frac{z}{y}\right)^{m-1},$$

$$\frac{m\,x^{2m-2}}{z^{m-1}}\,r' = r - \frac{(m-1)p(z-px)}{zx},$$

$$\frac{m\,y^{2m-2}}{z^{m-1}}\,t' = t - \frac{(m-1)q(z-qy)}{zy},$$

d'où facilement le résultat énoncé. On peut également appliquer la méthode indiquée par M. Goursat pour ce genre de question, c'est-à-dire se servir des caractéristiques.