Bulletin de la S. M. F.

E. Cahen

Sur l’irrationnalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l’indice

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 52-67
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__52_1>

SUR L'IRRATIONNALITÉ DES SOMMES DES SÉRIES DONT LE TERME GÉNÉRAL EST UNE FONCTION RATIONNELLE DE L'INDICE;

Par M. E. Cahen.

Les séries dont nous nous occupons sont de la forme

$$\sum_{n=n_0}^{n=\infty} \frac{f(n)}{g(n)},$$

f et g étant des polynomes entiers en n, le degré de $f(n)$ étant inférieur à celui de g d'au moins deux unités. Le nombre n_0 est un nombre entier. Enfin nous supposons que $g(n)$ n'a aucune racine entière supérieure ou égale à n_0 (sans quoi, certains termes de la série n'auraient pas de sens).

On peut d'ailleurs supposer $n_0 = 1$, car si $n_0 \neq 1$ on peut faire le changement de notation consistant à remplacer n par $n + n_0 - 1$. Dans la suite nous supposerons donc que la somme est prise de $n = 1$ à $n = \infty$ et nous supprimerons l'indication des limites 1 et ∞ qui seront sous-entendues.

Nous nous proposons d'abord de trouver quelle fonction des coefficients de f et et de g est la somme d'une telle série.

Un tel résultat n'est pas seulement d'un intérêt théorique, il peut être utile dans le calcul numérique de la somme, comme on en verra des exemples plus loin.

Théorème. — *La somme d'une série de la forme*

$$\sum \frac{f(n)}{g(n)}$$

s'exprime au moyen de fonctions rationnelles, de nombres rationnels, des coefficients de $f(n)$ et de $g(n)$, des racines de $g(n)$, de la dérivée logarithmique de la fonction eulérienne Γ, enfin des dérivées de cette dernière fonction jusqu'à un certain ordre.

En effet, décomposons $\frac{f(n)}{g(n)}$ en fractions simples. Nous aurons des termes de la forme

$$\frac{A}{(n-a)^p} \qquad (1 < p \leqq \alpha)$$

et des termes de la forme

$$\frac{A'}{n-a}.$$

Nous allons chercher d'abord à exprimer la somme des termes de la première forme

$$A \sum \frac{1}{(n-a)^p}.$$

Soit $\Gamma(x)$ la fonction eulérienne bien connue. On a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}$$

(C étant la constante d'Euler).

Appelant $h(x)$ la dérivée logarithmique du premier membre [c'est-à-dire la dérivée logarithmique de $\Gamma(x)$ changée de signe] nous avons

$$(1) \qquad h(x) = \frac{1}{x} + C - x\sum \frac{1}{n(x+n)},$$

d'où, en dérivant $p-1$ fois,

$$h^{(p-1)}(x) = (-1)^{p-1}(1.2\ldots p-1)\sum \frac{1}{(x+n-1)^p}.$$

Il en résulte que

$$(2) \qquad A\sum \frac{1}{(n-a)^p} = \frac{(-1)^{p-1} A\, h^{(p-1)}(1-a)}{1.2\ldots(p-1)}.$$

Passons maintenant aux termes de la forme $\frac{A'}{n-a}$. Réunissons-les avant de les sommer; soient

$$\frac{A'}{n-a} + \frac{B'}{n-b} + \ldots + \frac{L'}{n-l}$$

ces termes ; on peut les écrire

$$\frac{A'a}{n(n-a)} + \frac{B'b}{n(n-b)} + \ldots + \frac{L'l}{n(n-l)} + \frac{A'+B'+\ldots+L'}{n}.$$

Or

$$A'+B'+\ldots+L' = 0.$$

[On le voit, soit en exprimant que le degré de $f(n)$ est inférieur d'au moins deux unités à celui de $g(n)$, soit en remarquant que si $A'+B'+\ldots+L'$ n'était pas nul, le terme $\frac{A'+B'+\ldots+L'}{n}$ donnerait naissance à une série divergente.]

Les termes de la forme $\frac{A'a}{n(n-a)}$ donnent par sommation

$$A'a\sum \frac{1}{n(n-a)}.$$

Or, d'après la formule (1),

$$(3)\qquad A'a\sum\frac{1}{n(n-a)}=A'\left[h(-a)-C+\frac{1}{a}\right].$$

En résumé on a obtenu la somme de la série par des termes de la forme de ceux qui constituent les seconds membres des égalités (2) et (3).

Les nombres a sont les racines de $g(n)$, les nombres tels que A et A' s'expriment rationnellement en fonction des nombres tels que a et des coefficients de f et de g; quant au nombre C on peut le remplacer par $h(1)$. Enfin l'entier p ne dépasse pas α qui est le degré de multiplicité de a. Donc le théorème est démontré.

Différentes expressions de la somme. — On peut d'ailleurs modifier les expressions (2) et (3) d'après les relations fonctionnelles auxquelles satisfait la fonction $h(x)$.

On a

$$(4)\qquad h(1+x)=h(x)-\frac{1}{x},$$

d'où, en dérivant $p-1$ fois,

$$h^{(p-1)}(1+x)=h^{(p-1)}(x)+(-1)^p\frac{1.2\ldots(p-1)}{x^p}.$$

Donc la formule (2) peut s'écrire

$$(5)\qquad A\sum\frac{1}{(n-a)^p}=(-1)^{p-1}A\left[\frac{h^{(p-1)}(-a)}{1.2\ldots(p-1)}+\frac{1}{a^p}\right].$$

On a aussi la relation fonctionnelle

$$(6)\qquad h(x)-h(-x)=\frac{1}{x}+\pi\cot(\pi x),$$

d'où, par $(p-1)$ dérivations,

$$(7)\qquad \begin{aligned} &h^{(p-1)}(x)+(-1)^p h^{(p-1)}(-x)\\ &\quad=\frac{(-1)^{p-1}1.2\ldots(p-1)}{x^p}+\pi\frac{d^{p-1}\cot(\pi x)}{dx^{p-1}}, \end{aligned}$$

de sorte que la formule (5) peut encore s'écrire

$$A\sum\frac{1}{(n-a)^p}=\frac{A}{1.2\ldots(p-1)}\left[h^{(p-1)}(a)-\pi\frac{d^{(p-1)}\cot(\pi a)}{da^{p-1}}\right].$$

De même la formule (3), par l'emploi de la formule (6), peut s'écrire

$$A'a\sum\frac{1}{n(n-a)} = A'[h(a) - C - \pi\cot(\pi a)].$$

Exemple :

$$\sum\frac{1}{n(n^2-a^2)} = \frac{h(a)+h(-a)-2C}{2a^2} = \frac{2h(a)-\pi\cot(\pi a)-2C}{2a^2} - \frac{1}{2a^3}.$$

Il résulte du théorème précédent que l'étude des irrationnalités que peuvent présenter les séries dont nous nous occupons est ramenée à celle des irrationnalités que peuvent présenter la fonction h et ses dérivées jusqu'à un certain ordre pour les différentes valeurs de la variable.

Cette étude n'est pas encore faite. Le théorème que nous démontrerons plus loin, relativement au cas où la variable a une valeur rationnelle, peut en être considéré comme le début. On sait d'ailleurs combien elle est peu avancée pour les fonctions en général. Elle n'est guère faite que pour les fonctions algébriques et pour les fonctions circulaires et exponentielles.

Nous allons maintenant considérer des cas particuliers, cherchant principalemeut ceux dans lesquels la fonction h et ses dérivées disparaissent de l'expression de la somme ; cherchant dans les autres à réduire au moindre nombre d'irrationnelles possibles.

Premier cas. — *$g(n)$ a toutes ses racines entières et distinctes.* — Dans ce cas la somme de la série est un nombre rationnel. C'est un fait bien connu et qui se démontre facilement sans l'emploi de la fonction h. Il résulte immédiatement de la formule (3). En effet, a est dans ce cas un entier négatif ou nul. On peut même dire que a est plus petit que zéro, car si $a = 0$ le terme $A'a\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n(n-a)}$ est nul.

Soit donc

$$a = -a',$$

a' étant > 0.

Alors

$$h(-a) = C - \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a'-1}\right),$$

et par suite

$$A'a\sum\frac{1}{n(n-a)}=-A'\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a'}\right].$$

D'ailleurs $A'=\frac{f(a)}{g'(a)}$.

En résumé,

$$\sum\frac{f(n)}{(n+a')(n+b')\ldots(n+l')}$$
$$=\sum_{a',b',\ldots,l'}\frac{f(-a')}{(b'-a')\ldots(l'-a')}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{a'}\right],$$

résultat qui, encore une fois, se démontrerait simplement sans l'intervention de la fonction h.

Deuxième cas. — *$g(n)$ a toutes ses racines rationnelles et distinctes.* — Dans ce cas, *la somme de la série s'exprime au moyen de nombres algébriques et de fonctions logarithmes.*

Puisque les racines de $g(n)$ sont supposées distinctes, l'expression de la somme ne contient d'après le théorème fondamental que des nombres rationnels, et la fonction h.

Donc le théorème que nous avons en vue revient au suivant qui est celui annoncé plus haut :

Pour des valeurs rationnelles de x, la fonction $h(x)$ s'exprime au moyen de nombres algébriques, de la constante d'Euler, et de fonctions logarithmes.

Les deux théorèmes sont équivalents, démontrons le second.

D'abord on peut supposer que la valeur de x pour laquelle on veut calculer $h(x)$ est négative, car, d'après la formule (6) le calcul de h pour une valeur positive de x se ramène au calcul de $h(-x)$.

Ensuite on peut supposer

$$-1<x\leqq 0,$$

en vertu de la formule (4).

La valeur rationnelle de x pour laquelle on veut calculer x peut donc se désigner par

$$-\frac{p}{q}$$

avec

$$q > 0, \qquad 0 \leqq p < q.$$

Ceci posé on a, d'après la formule (1),

$$h\left(-\frac{p}{q}\right) = -\frac{q}{p} + C + p\sum \frac{1}{n(qn-p)} \tag{8}$$

$$= -\frac{q}{p} + C + q\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{qn-p} - \frac{1}{qn}$$

et tout revient à calculer la série du second membre. Pour cela nous partons de la formule

$$\frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \ldots = \frac{-L(1-x)}{x}$$

qui est, comme on sait, valable pour les valeurs de x dont le module est 1, sauf pour la valeur $x = 1$.

Faisons donc x égal à une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1, soit α cette racine. Il vient :

$$\frac{1}{1} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3} + \ldots = -\frac{L(1-\alpha)}{\alpha},$$

ou, en réunissant les termes [1] dont les rangs diffèrent entre eux d'un multiple de q,

$$\sum \frac{1}{qn-(q-1)} + \alpha\sum \frac{1}{qn-(q-2)} + \ldots + \alpha^{q-1}\sum \frac{1}{qn} = \frac{-L(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Maintenant, dans cette égalité, faisons α égal successive-

---

(1) On introduit ainsi dans le calcul des séries divergentes $\sum \frac{1}{qn-p}$, il suffit de lire $\sum_{1}^{n} \frac{1}{qn-p}$ et de ne faire croître n indéfiniment que dans le résultat définitif.

ment à

$$e^{\frac{2i\pi}{q}},\quad e^{\frac{2.2i\pi}{q}},\quad \ldots,\quad e^{\frac{(q-1)2i\pi}{q}},$$

puis, multiplions les égalités obtenues par des coefficients λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}$, et ajoutons ; il vient :

$$(9)\quad (\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{q-1})\sum\frac{1}{qn-(q-1)}$$
$$+\left(\lambda_1 e^{\frac{2i\pi}{q}}+\lambda_2 e^{\frac{2.2i\pi}{q}}+\ldots+\lambda_{q-1} e^{(q-1)\frac{2i\pi}{q}}\right)\sum\frac{1}{qn-(q-2)}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left(\lambda_1 e^{(q-p-1)\frac{2i\pi}{q}}+\lambda_2 e^{2(q-p-1)\frac{2i\pi}{q}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\lambda_{q-1} e^{(q-1)(q-p-1)\frac{2i\pi}{q}}\right)\sum\frac{1}{qn-p}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left(\lambda_1 e^{(q-1)\frac{2i\pi}{q}}+\lambda_2 e^{2(q-1)\frac{2i\pi}{q}}+\ldots+\lambda_{q-1} e^{(q-1)(q-1)\frac{2i\pi}{q}}\right)\sum\frac{1}{qn}$$
$$=-\left[\frac{\lambda_1 \mathrm{L}\left(1-e^{\frac{2i\pi}{q}}\right)}{e^{\frac{2i\pi}{q}}}+\frac{\lambda_2 \mathrm{L}\left(1-e^{\frac{2.2i\pi}{q}}\right)}{e^{\frac{2.2i\pi}{q}}}+\ldots+\frac{\lambda_{q-1} \mathrm{L}\left(1-e^{\frac{(q-1)2i\pi}{q}}\right)}{e^{(q-1)\frac{2i\pi}{q}}}\right].$$

Il ne reste plus maintenant qu'à déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}$, par les conditions suivantes : à savoir que les coefficients des séries dans le premier membre soient tous nuls, sauf celui de la série $\sum\frac{1}{qn-p}$ qui soit égal à 1 ; et celui de la série $\sum\frac{1}{qn}$ égal à -1, pour obtenir la valeur de la série qui entre dans la formule (8) en fonction du nombre algébrique $e^{\frac{2i\pi}{q}}$ et de fonctions logarithmes.

On obtient ainsi q équations du premier degré pour les $q-1$ indéterminées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q-1}$; mais elles sont compatibles, car en les ajoutant on trouve une identité.

Exemple :

$$h\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{3}{2}+\mathrm{C}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(3n-2)}=-\frac{3}{2}+\mathrm{C}+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n}\right).$$

L'égalité (9) devient ici

$$(\lambda_1+\lambda_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}+\left(\lambda_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}+\lambda_2 e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$$
$$+\left(\lambda_1 e^{\frac{4i\pi}{3}}+\lambda_2 e^{\frac{8i\pi}{3}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$$
$$=-\left[\frac{\lambda_1 L\left(1-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)}{e^{\frac{2i\pi}{3}}}+\frac{\lambda_2 L\left(1-e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)}{e^{\frac{4i\pi}{3}}}\right].$$

Posons

$$\lambda_1+\lambda_2=1,$$
$$\lambda_1 e^{\frac{2i\pi}{3}}+\lambda_2 e^{\frac{4i\pi}{3}}=0,$$

d'où

$$\lambda_1=\frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}-1},$$
$$\lambda_2=\frac{-1}{e^{\frac{2i\pi}{3}}-1};$$

l'équation $\lambda_1 e^{\frac{4i\pi}{3}}+\lambda_2 e^{\frac{8i\pi}{3}}=-1$ se trouve satisfaite et l'on trouve

$$\sum\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n}\right)=\frac{L\left(1-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)}{1-e^{\frac{2i\pi}{3}}}+\frac{L\left(1-e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)}{1-e^{\frac{4i\pi}{3}}}$$
$$=\frac{L3}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}\ (=0,84161)$$

et

$$h\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{3}{2}+C+\frac{3}{2}L3+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

On en tire

$$h\left(\frac{1}{3}\right)=h\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{2}=C+\frac{3}{2}L3+\frac{\pi\sqrt{3}}{6},$$
$$h\left(\frac{4}{3}\right)=h\left(\frac{1}{3}\right)-3=C-3+\frac{3}{2}L3+\frac{\pi\sqrt{3}}{6},$$

....

On peut même donner une expression générale de $h\left(-\frac{p}{q}\right)$ en résolvant les équations en λ par la règle de Cramer.

Autres exemples :

$$\sum \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - L2) = 0,6137,$$

$$\sum \frac{1}{n(3n+1)} = 3 - \frac{3}{2} L3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,4452,$$

$$\sum \frac{1}{n(9n^2-1)} = \frac{3}{2}(L3 - 1).$$

Nous vérifions sur ces exemples ce que nous avons annoncé au début de ce travail. Si ces séries se présentent dans un calcul numérique, il est plus simple de les calculer par leurs expressions aux seconds membres, que directement.

REMARQUE. — *Si les racines de $g(n)$ étant commensurables, leurs différences deux à deux sont entières, la somme est un nombre commensurable.*

Car les nombres désignés plus haut par $a, b, \ldots, l$ diffèrent entre eux d'entiers e, les quantités $h(a), h(b), \ldots, h(l)$ sont égales à des nombres rationnels près, on peut les réduire à la seule quantité $h(a)$. Comme de plus $A + B + \ldots = 0$, le coefficient de $h(a)$ disparaît

Exemple :

$$\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{3}.$$

Voici une formule plus générale (¹); soient

$$c, \quad c - q_1, \quad \ldots, \quad c - q_p, \qquad q_1 < q_2 < \ldots < q_p,$$

les racines du dénominateur; soit

$$\frac{\alpha_0}{n-c} + \frac{\alpha_1}{n-c+q_1} + \ldots + \frac{\alpha_p}{n-c+q_p}$$

le terme général décomposé en éléments simples, la somme de la

(¹) E. FABRY, *Théorie des séries à termes constants*, p. 79, Paris, Hermann, 1911.

série est

$$\alpha_0\left(\frac{1}{-c+1}+\frac{1}{-c+2}+\ldots+\frac{1}{-c+q_1}\right)$$
$$-(\alpha_0+\alpha_1)\left(\frac{1}{-c+q_1+1}+\ldots+\frac{1}{-c+q_2}\right)+\ldots$$
$$+(\lambda_0+\lambda_1+\ldots+q_p)\left(\frac{1}{c+q_{p-1}}+\ldots+\frac{1}{c+q_p}\right).$$

Troisième cas. — *Les polynomes $f(n)$ et $g(n)$ ne contiennent que des puissances paires de n.*

Alors, dans la décomposition de $\frac{f(n)}{g(n)}$ en éléments simples, à chaque terme

$$\frac{A'a}{n(n-a)} \qquad (a \neq 0)$$

correspond le terme

$$\frac{A'a}{n(n+a)}.$$

Or

$$A'a\sum\frac{1}{n(n-a)} = A'\left[h(-a)-C+\frac{1}{a}\right]$$

et

$$A'a\sum\frac{1}{n(n+a)} = -A'\left[h(a)-C-\frac{1}{a}\right].$$

Ces deux sommes en se réunissant donnent

$$A'\left[h(-a)-h(a)+\frac{2}{a}\right]$$

ou

$$A'\left[-\pi\cot(\pi a)+\frac{1}{a}\right],$$

donc la fonction h disparaît dans ces termes.

Il y a ensuite des termes de la forme

$$A\sum\frac{1}{(n-a)^p}$$

à chacun desquels correspond le terme

$$(-1)^p A\sum\frac{1}{(n+a)^p}.$$

Or

$$A\sum\frac{1}{(n-a)^p} = \frac{A}{1.2\ldots(p-1)}\left[h^{(p-1)}(a)-\pi\frac{d^{(p-1)}\cot(\pi a)}{da^{p-1}}\right]$$

et

$$(-1)^p A \sum \frac{1}{(n+a)^p}$$
$$= \frac{A}{1.2\ldots(p-1)}\left[(-1)^p h^{(p-1)}(-a) - \pi \frac{d^{(p-1)}\cot(\pi a)}{da^{p-1}}\right].$$

Ces deux termes, en se réunissant, donnent

$$\frac{A}{1.2\ldots(p-1)}\left[h^{(p-1)}(a) + (-1)^p h^{(p-1)}(-a) - 2\pi \frac{d^{(p-1)}\cot(\pi a)}{da^{p-1}}\right],$$

c'est-à-dire, d'après la formule (7),

$$A\left[\frac{(-1)^{p-1}}{a^p} - \frac{\pi}{1.2\ldots(p-1)}\frac{d^{p-1}\cot(\pi a)}{da^{p-1}}\right],$$

de sorte que la fonction h disparaît aussi dans ces termes. Restent enfin les termes correspondant à $a = 0$ et qui sont de la forme

$$\frac{A}{n^{2k}}.$$

Or, on sait que

$$A\sum \frac{1}{n^{2k}} = A\frac{2^{2k-1}B_k}{1.2\ldots(2k)}\pi^{2k},$$

B_k étant un nombre rationnel, le $k^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Exemples :

$$\sum \frac{1}{n^2 - a^2} = -\frac{1}{2a^2} - \frac{k}{2a}\cot \pi a,$$
$$\sum \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{a}\frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}},$$
$$\sum \frac{1}{n^4 + 4} = -\frac{1}{8} + \frac{\pi(e^{\pi} + e^{-\pi})}{8(e^{\pi} - e^{-\pi})},$$
$$\sum \frac{1}{(n^2 - a^2)^3} = \frac{1}{2a^6} - \frac{\pi^3}{8a^3}\frac{\cos \pi a}{\sin^3 \pi a} - \frac{3\pi^2}{16a^4 \sin^2 \pi a} - \frac{3\pi \cot \pi a}{16a^5},$$
$$\sum \frac{1}{(4n^2 - 1)^3} = \frac{1}{2} - \frac{3\pi^2}{64}.$$

Quatrième cas. — *$g(n)$ a ses racines entières, mais multiples.* — Dans ce cas, les termes de la forme $\sum \frac{1}{n(n-a)}$ sont rationnels; ceux de la forme $\sum \frac{1}{(n-a)^{\alpha}}$ $(\alpha > 1)$ se ramènent immédiatement à $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, somme qu'on désigne par $\zeta(\alpha)$ ou encore à $\frac{(-1)^{\alpha-1}}{1 \cdot 2 \ldots (\alpha-1)} h^{(\alpha-1)}(1)$. Si p est pair, ils s'expriment en fonction rationnelle de π; sinon, ce sont des transcendantes sans aucun rapport connu avec les transcendantes algébriques, circulaires, etc. Il peut d'ailleurs arriver que ces derniers termes disparaissent.

Exemple :

$$\sum \frac{7n(n+1)+2}{n^5(n+1)^5}$$
$$=\sum\left[\frac{2}{n^5}-\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^3}-\frac{2}{(n+1)^5}-\frac{3}{(n+1)^4}-\frac{2}{(n+1)^3}\right]$$
$$=2\zeta(5)-3\zeta(4)+2\zeta(3)$$
$$-2[\zeta(5)-1]-3[\zeta(4)-1]-2[\zeta(3)-1]$$
$$=-6\zeta(4)+7=7-\frac{\pi^4}{15}=0{,}5062.$$

Cinquième cas. — *$g(n)$ a ses racines commensurables et multiples.* — La série proposée se ramène à des séries de la forme

$$\sum \frac{1}{[q(n-1)+p]^\alpha} \qquad (\alpha > 1),$$

où l'on peut supposer $0 < p \leqq q$. Nous disons que ce sont les séries *de période q*.

1° *Soit* $q=1$. Alors $p=1$, la série est

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha).$$

2° $q=2$. Alors $p=1$ ou $p=2$.
Si $p=1$, la série est

$$\sum \frac{1}{(2n-1)^\alpha} = \left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha).$$

Si $p=2$, la série est

$$\sum \frac{1}{(2n)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\zeta(\alpha .$$

3° $q=3$. Alors $p=1, 2, 3$.

Si $p = 1$, la série est

$$\sum \frac{1}{(3n-2)^\alpha},$$

c'est une transcendante nouvelle (¹), appelons-la

$$\zeta_{3,2}(\alpha).$$

Si $p = 2$,

$$\sum \frac{1}{(3n-1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{3^\alpha}\right)\zeta(\alpha) - \zeta_{3,2}(\alpha)$$

Si $p = 3$,

$$\sum \frac{1}{(3n-1)^\alpha} = \frac{1}{3^\alpha}\zeta(\alpha).$$

4° $q = 4$. Alors $p = 1, 2, 3, 4$.

Si $p = 1$,

$$\sum \frac{1}{(4n-3)^\alpha}$$

est une transcendante nouvelle $\zeta_{4,3}(\alpha)$.

Si $p = 2$,

$$\sum \frac{1}{(4n-2)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha).$$

Si $p = 3$,

$$\sum \frac{1}{(4n-1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha) - \zeta_{4,3}(\alpha).$$

Si $p = 4$,

$$\sum \frac{1}{(4n)^\alpha} = \frac{1}{4^\alpha}\zeta(\alpha).$$

5° $q =$ *nombre premier impair quelconque*. Alors

$$p = 1, 2, \ldots, q.$$

Pour $p = 1, 2, \ldots, q-2$, on a des transcendantes nouvelles

$$\zeta_{q,q-1}(\alpha), \quad \zeta_{q,q-2}(\alpha), \quad \ldots, \quad \zeta_{q,2}(\alpha).$$

Pour $p = q$, on a

$$\sum \frac{1}{(qn)^\alpha} = \frac{1}{q^\alpha}\zeta(\alpha).$$

(¹) Tout au moins elle n'a pas été ramenée aux transcendantes précédentes.

Enfin pour $p=q-1$, on a

$$\sum \frac{1}{(qn-1)^{\alpha}} = \left(1 - \frac{1}{q^{\alpha}}\right)\zeta(\alpha) - \zeta_{q,q-1}(\alpha) - \zeta_{q,q-2}(\alpha) - \ldots - \zeta_{q,2}(\alpha).$$

6° *q quelconque*

$$p = 1, 2, \ldots, q,$$

d'où les q séries

$$\sum \frac{1}{[q(n-1)+1]^{\alpha}}, \quad \sum \frac{1}{[q(n-1)+2]^{\alpha}}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{[q(n-1)+q]^{\alpha}}.$$

Celles de la forme

$$\sum \frac{1}{[q(n-1)+p]^{\alpha}},$$

où p n'est pas premier à q, s'expriment par des séries de période inférieure à q.

Restent les séries

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{1}{[q(n-1)+r_1]^{\alpha}}, \quad \sum \frac{1}{[q(n-1)+r_2]^{\alpha}}, \quad \ldots, \\ \qquad\qquad \sum \frac{1}{[q(n-1)+r_{\varphi(q)}]^{\alpha}}, \end{array} \right.$$

$r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(q)}$ étant les entiers positifs plus petits que q et premiers avec lui. Mais elles ne constituent pas $\varphi(q)$ transcendantes nouvelles. En effet, soient d un diviseur de q et r un nombre de la suite $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(q)}$; on a

$$\sum \frac{1}{[q(n-1)+r]^{\alpha}} + \sum \frac{1}{[q(n-1)+d+r]^{\alpha}} + \ldots \\ + \sum \frac{1}{\left[q(n-1)+\left(\frac{q}{d}-1\right)d+r\right]^{\alpha}} = \sum \frac{1}{[\varphi(n-1)+r]^{\alpha}}.$$

On pourra écrire $\lambda(q)\varphi(q)$ telles relations, $\lambda(q)$ étant le nombre des diviseurs de q. Mais elles ne sont pas toutes distinctes.

Lorsque q est premier, il y en a deux distinctes, par conséquent toutes les séries de période q s'expriment en fonction de $q-2$ d'entre elles et de séries de périodes moindres.

Lorsque q est une puissance d'un nombre premier $[q=p^{\alpha}, (\alpha>1)]$, il y en a $p^{\alpha-2}(2p-1)$. Par conséquent, toutes les séries de période p^α s'expriment en fonction de $p^{\alpha-2}(p-1)^2$ d'entre elles et de séries de période moindre.

Lorsque $q=2p^\alpha$ (p premier impair), le nombre des relations distinctes est q, et par conséquent toutes les séries de période q s'expriment en fonction de séries de périodes moindres.

Exemple $q=6$, on a

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+1]^\alpha} = \left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta_{3,2}(\alpha) - \frac{1}{2^\alpha}\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\zeta(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+2]^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\zeta_{3,2}(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+3]^\alpha} = \frac{1}{3^\alpha}\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+4]^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha}\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\zeta(\alpha) - \frac{1}{2^\alpha}\zeta_{3,2}(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+5]^\alpha} = \left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\zeta(\alpha) - \left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right)\zeta_{3,2}(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+6]^\alpha} = \frac{1}{6^\alpha}\zeta(\alpha).$$

Il serait intéressant de faire le compte des séries indépendantes de périodes q pour q quelconque.

D'ailleurs ces fonctions

$$\zeta_{h,k}(\alpha) = \sum \frac{1}{(hn-k)^\mu},$$

auxquelles on est ramené, donnent encore lieu aux remarques suivantes :

$\zeta_{h,k}(\alpha)+\zeta_{h-k,k}(\alpha)$ est exprimable pour α pair;

$\zeta_{h,k}(\alpha)-\zeta_{h-k,k}(\alpha)$ pour α impair, en fonction des transcendantes π, $\cos\frac{2k\pi}{h}$, sur $\frac{2k\pi}{h}$.

Par exemple

$$\sum \frac{1}{[3(n-1)+1]^3} - \sum \frac{1}{[3(n-1)+2]^3} = \frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} = 0{,}88402.$$

Ces derniers résultats se trouvent déjà dans Euler (¹). On les retrouve comme cas particuliers des théorèmes précédents.

(¹) *Voir* E. Cahen, *Sur la fonction $\zeta(s)$ et sur des fonctions analogues* Chap. III, n° 49 (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1894).