BULLETIN DE LA S. M. F.

G. KOENIGS

Sur le mouvement de deux surfaces réglées qui ne cessent de se raccorder

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 243-246
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__243_0>

SUR LE MOUVEMENT RELATIF DE DEUX SURFACES RÉGLÉES QUI NE CESSENT DE SE RACCORDER;

PAR M. G. KOENIGS.

1. L'article de la *Cinématique* dans *l'Encyclopédie des Sciences mathématiques,* dont mon ami si regretté Jules Molk m'avait demandé de m'occuper, a été pour moi l'occasion de préciser quelques points de Cinématique générale, et, entre autres, la question qui concerne le mouvement relatif de deux surfaces réglées qui se raccordent constamment suivant une génératrice variable.

On dit quelquefois que, dans sa manifestation élémentaire, ce mouvement consiste en une rotation infiniment petite autour de la droite de raccordement, accompagnée d'un *glissement*. Ce terme de glissement est incorrect si l'on entend par là une *translation* infiniment petite. Je vais, en effet, montrer que c'est seulement lorsque les deux surfaces *virent* l'une sur l'autre que cette circonstance peut se présenter, et encore, dans ce cas, le glissement dû à la translation a-t-il le sens de l'axe de rotation qui devient alors l'axe du mouvement hélicoïdal tangent. Je ferai même voir qu'il y a un cas où il est impossible de représenter le système tangent des rotations par deux dont l'une soit portée par la génératrice de raccordement.

2. Appelons Σ_1, Σ_2 les deux surfaces, d leur génératrice actuelle de raccordement, O le point central, Ω le plan central, et OY la normale commune aux deux surfaces au point O. Désignons par d' la droite conjuguée de la droite d dans le complexe linéaire $\mathcal{L}$ des normales. Le système tangent des rotations peut être en général représenté par une rotation ω portée par d, accompagnée d'une rotation ω' portée par d'.

Soient M un point de d et MV sa vitesse au cours du mouvement $\boxed{\Sigma_1, \Sigma_2}$ de Σ_1 par rapport à Σ_2. Cette vitesse résulte de la seule rotation ω'; le plan normal en M à MV passe donc par d', et comme ce plan contient la normale MN aux surfaces Σ_1, Σ_2 en M, il s'ensuit que MN coupe d' en quelque point M'. Comme, du reste, cette normale MM' ou MN est normale à d en M, sa construction s'opérera ainsi : on mènera en M le plan normal à d, ce plan coupera d' en un point M' et MM' sera la normale.

On se rend compte ainsi du rôle de d' dans la définition du paraboloïde des normales en tous les points de d.

La droite d' coupe, entre autres normales, la normale OY, et même la coupe à angle droit, ce qui équivaut à dire que d' est parallèle au plan central Ω. Et, en effet, si M'_0 était le point où d' couperait Ω et M_0 la projection de M'_0 sur d, M_0M' serait la normale en M_0 à la surface; puisque $M_0M'_0$ serait dans le plan Ω, le plan tangent en M_0 serait rectangulaire avec Ω; ce serait donc le plan asymptote, dont le point de contact est à l'infini sur d; M_0 et par suite M'_0 ne peuvent donc être qu'à l'infini.

En résumé : *Dans le cas général du mouvement de deux surfaces réglées qui se raccordent constamment, le système tangent des rotations peut être ramené à deux, dont l'une autour de la génératrice de raccordement et l'autre autour d'une droite qui coupe à angle droit la normale commune aux deux surfaces au point central.*

3. Se peut-il que cette rotation complémentaire ω' se réduise à une translation? Une translation est l'état limite d'une rotation dont l'axe d' est rejeté à l'infini, tandis que la vitesse ω' devient infiniment petite. Tous les plans passant par la position limite de d' sont parallèles et la direction de la translation leur est normale.

Or, ici d' est une génératrice de même système que d du paraboloïde des normales. Celle des droites de ce système, qui est à l'infini, coïncide avec la droite de l'infini du plan directeur, lequel est normal à d; en conséquence, si une translation se substitue à la rotation ω', elle ne peut être que dirigée suivant d, et alors, d étant l'axe même du mouvement hélicoïdal tangent, les surfaces proposées virent l'une sur l'autre.

Ce n'est donc que dans ce cas qu'il peut se présenter une translation complémentaire à la rotation autour de d. Cette translation ne sera JAMAIS oblique à d.

4. Enfin il y a un cas intéressant qu'il ne faut pas négliger : c'est celui où la droite d, faisant partie du complexe linéaire $\mathcal{L}$, il deviendrait impossible de représenter le système tangent des rotations au moyen de deux ω, ω', dont l'une ω portée par d.

Ce cas est susceptible d'être caractérisé géométriquement de la façon la plus simple. Cette hypothèse équivaut à dire que d est normale à la vitesse d'entraînement de tous ses points dans le mouvement $\boxed{\Sigma_1, \Sigma_2}$.

Imaginons alors un point M décrivant d, en même temps que d décrit Σ_1, de façon à tracer sur Σ_1 une courbe c_1, trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes. Soit $\vec{v}_1$ la vitesse de M sur c_1. En même temps, M décrit sur Σ_2, avec une vitesse $\vec{v}_2$, une courbe c_2, et si l'on appelle $\vec{u}$ la vitesse d'entraînement de M, on a

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}.$$

Or $\vec{v}_1$ est, par hypothèse, normale à d, dans le plan Π tangent en M aux deux surfaces ; pareillement $\vec{u}$, donc $\vec{v}_2$, qui est leur somme géométrique, est aussi portée par la même normale à d.

Il suit de là qu'au cours du mouvement, les trajectoires orthogonales des génératrices de Σ_1 restent chacune tangente à une pareille trajectoire de Σ_2 ; les trajectoires orthogonales des génératrices de Σ_1 ont comme *conjuguées* celles de Σ_2, pour me servir du terme que j'ai employé dans mon Mémoire *Sur les courbes conjuguées* inséré au Tome XXXV des *Savants étrangers*.

Lorsque les surfaces se meuvent en se raccordant et en présentant, par surcroît, cette circonstance, il ne faut plus songer à introduire deux rotations, dont l'une autour de la droite de raccordement.

5. Le plan tangent en M au paraboloïde des normales n'est autre alors que le plan polaire Ξ de M dans le complexe $\mathcal{L}$; la corrélation $\mathcal{G}$ entre le point M et le plan Ξ est alors celle qui est définie par le complexe $\mathcal{L}$ sur sa droite d. Or, si l'on fait tourner Ξ de 90° autour de d, on a précisément le plan Π tangent en M aux surfaces.

De là suit que la corrélation $\mathcal{H}$, qui naît sur d de la correspondance entre les plans tangents aux surfaces et leurs points de contact, se déduit de la corrélation $\mathcal{G}$ par une simple rotation de 90° autour de d; les corrélations $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont *rectangulaires*, pour employer un terme dont je me suis servi dans un travail *Sur la loi des courbures* inséré au *Journal de Mathématiques* (6^e série, t. VIII, 1912, p. 103).

Le plan central Φ de $\mathcal{G}$ est le plan asymptote de $\mathcal{H}$ rectangulaire avec Ω, le point central est O et le paramètre de distribution k est le même que celui de $\mathcal{H}$.

Il est aisé de se rendre compte que, parmi tous les complexes linéaires qui contiennent d et y définissent la corrélation $\mathcal{G}$, il en est un particulièrement simple, c'est celui qui a pour axe la normale OX à d dans le plan Ω et dont le pas est égal à $-k$. Nous appellerons $\mathcal{L}_1$ ce complexe particulier et $\mathcal{V}_1$ la vis qui lui est attachée.

Tous les complexes linéaires qui contiennent d et y déterminent la corrélation $\mathcal{G}$ forment un faisceau dont fait partie, outre le complexe $\mathcal{L}_1$, le complexe spécial $\mathcal{L}_0$ formé des sécantes de la droite d.

En conséquence, *le mouvement* HÉLICOÏDAL *tangent au mouvement* $\boxed{\Sigma_1, \Sigma_2}$ *résulte ici d'une rotation autour de d, accompagnée d'un mouvement hélicoïdal sur la vis* $\mathcal{V}_1$.

Ce résultat complète, en le précisant, l'énoncé négatif relatif à ce cas singulier.

J'ajouterai, pour terminer, que tous les résultats qui précèdent pourraient bien être traités au moyen d'un trièdre trirectangle mobile T, ayant pour origine le point central O, le plan central Ω pour plan ZOX et d pour axe OZ, tandis que OY serait le troisième axe. En ce qui concerne cette méthode, je ne puis que renvoyer à mon Mémoire *Sur les courbes conjuguées*, inséré au Tome XXXV du *Recueil des Savants étrangers* (p. 18 et suiv.).