BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. DE DONDER

Sur les invariants intégraux de l'optique

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 91-95

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__91_1>

SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX DE L'OPTIQUE;

PAR M. TH. DE DONDER.

La très intéressante démonstration du théorème de Straubel, que donne M. Dontot ([1]), pourrait être simplifiée grâce aux deux théorèmes que j'ai publiés en 1913 ([2]) et dont j'ai indiqué diverses applications à la physique mathématique.

THÉORÈME I. — *Si* ρ *est un invariant et si*

$$I_m \equiv \int M\, \delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_m \tag{1}$$

([1]) *Bull. Soc. math. de France,* t. XLII, fasc. 1, 1914.

([2]) *Sur un théorème de Jacobi* (*C. R. Acad. Sc.*, 10 février 1913); *Sur la répartition ergodique* (*Bull. Acad. royale de Belgique: Cl. des Sciences,* n° 3, 1913, p. 211-221).

est un invariant intégral m-uple des équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_m}{X_m} = dt$$

(X_1, X_2, ..., X_m *sont des fonctions continues et uniformes de* x_1, x_2, ..., x_m *et de* t), *la quantité*

$$(2) \qquad A_{m-1} \equiv \int \frac{M}{\dfrac{\partial\rho}{\partial x_1}} \delta x_2 \, \delta x_3 \ldots \delta x_m$$

est un invariant (m — 1)*-uple sur la variété* $\rho = \rho_0$.

Théorème II. — *Si* ρ *et* X_1, ..., X_m *ne renferment pas explicitement* t, *on peut déduire de l'invariant* (2) *l'invariant intégral* (m — 2)*-uple sur la variété invariante* $\rho = \rho_0$

$$(3) \quad A_{m-2} \equiv \frac{M}{\dfrac{\partial\rho}{\partial x_1}} \underset{k}{\mathrm{S}} (-1)^k X_k \, \delta x_2 \ldots \delta x_{k-1} \, \delta x_{k+1} \ldots \delta x_m \qquad (k = 2 \ldots m).$$

Démonstration. — Multiplions symboliquement [1] A_{m-2} par $\delta\rho$, on trouvera la forme intégrale (m — 1)-uple

$$\begin{aligned} \frac{M}{\dfrac{\partial\rho}{\partial x_1}} \Big[& X_2 \, \delta x_3 \, \delta x_4 \ldots \delta x_m \frac{\partial\rho}{\partial x_1} \delta x_1 + X_2 \, \delta x_3 \ldots \delta x_m \frac{\partial\rho}{\partial x_2} \delta x_2 \\ & - X_3 \, \delta x_2 \, \delta x_4 \ldots \delta x_m \frac{\partial\rho}{\partial x_1} \delta x_1 - X_3 \, \delta x_2 \, \delta x_4 \ldots \delta x_m \frac{\partial\rho}{\partial x_3} \delta x_3 \\ & + \ldots \\ & + (-1)^m X_m \, \delta x_2 \, \delta x_3 \ldots \delta x_{m-1} \frac{\partial\rho}{\partial x_1} \delta x_1 + (-1)^m X_m \, \delta x_2 \ldots \delta x_{m-1} \frac{\partial\rho}{\partial x_m} \delta x_m \Big]. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial\rho}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial\rho}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial\rho}{\partial x_m} X_m = 0,$$

d'où

$$X_1 = -\frac{1}{\dfrac{\partial\rho}{\partial x_1}} \left[\frac{\partial\rho}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial\rho}{\partial x_m} X_m \right].$$

En substituant dans la forme intégrale précédente, celle-ci se

---

[1] *Introduction à la théorie des invariants intégraux* (*Bull. Acad. royale de Belgique : Cl. des Sciences*, n° 12, 1913).

réduit (au signe près) à

$$\underset{i}{\mathrm{S}}(-1)^i \mathrm{M}\,\mathrm{X}_i\, \delta x_1 \ldots \delta x_{i-1}\, \delta x_{i+1} \ldots \delta x_m \qquad (i = 1 \ldots m);$$

or, cette dernière fournit un invariant intégral des équations (1).

C. Q. F. D.

Considérons maintenant avec M. Dontot les extrémales de

$$\delta \int n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = 0$$

ou $x' = \frac{dx}{dt}$, $y' = \frac{dy}{dt}$, $z' = \frac{dz}{dt}$. L'étude de ces extrémales revient à celle des équations différentielles

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial u}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial v}, & \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial w}, \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}, & \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} \end{cases}$$

sur la variété invariante

$$(5)\qquad \mathrm{H} \equiv \frac{1}{2n^2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}.$$

On a posé

$$u = \frac{\partial\, n \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{dx'} = \frac{n x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

de même pour v et pour w.

Les équations (4) admettent l'invariant intégral

$$\mathrm{I}_6 \equiv \int \delta x\, \delta y\, \delta z\, \delta u\, \delta v\, \delta w.$$

Appliquons le théorème I, d'où l'invariant intégral 5-uple

$$\mathrm{A}_5 \equiv \int \frac{n^2}{u}\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \delta v\, \delta w$$

sur la variété (5).

Appliquons le théorème II, d'où l'invariant intégral [1] 4-uple

$$\mathrm{A}_4 \equiv \int \frac{n^2}{u} \Big[\frac{u}{n^2}\, \delta y\, \delta z\, \delta v\, \delta w - \frac{v}{n^2}\, \delta x\, \delta z\, \delta v\, \delta w + \frac{w}{n^2}\, \delta x\, \delta y\, \delta v\, \delta w$$
$$+ \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \delta w - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\, \delta x\, \delta y\, \delta z\, \delta v \Big].$$

---

(1) La simplification introduite, ici surtout, me paraît importante.

Considérons deux surfaces quelconques σ et σ' dans l'espace ordinaire et joignons respectivement les différents points de σ aux différents points de σ' par des rayons lumineux, alors on aura $\delta x\,\delta y\,\delta z = 0$, et A_4 se réduira à

$$A_4 \equiv \int (u\,\delta y\,\delta z + v\,\delta z\,\delta x + w\,\delta x\,\delta y)\frac{\delta v\,\delta w}{u}.$$

Posons avec M. Dontot

$$m = \frac{u}{n} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$
$$p = \frac{v}{n},$$
$$q = \frac{w}{n};$$

donc m, p, q sont les cosinus directeurs de la demi-tangente au rayon lumineux dans le sens de propagation de la lumière. A_4 devient

$$\int n^2 [m\,\delta y\,\delta z + p\,\delta z\,\delta x + q\,\delta x\,\delta y]\,\frac{\delta p\,\delta q}{m}.$$

Or $\frac{\delta p\,\delta q}{m} = \delta\omega$ (angle solide ou surface élémentaire d'une sphère de rayon un), soit θ l'angle de la demi-normale à un élément $\delta\sigma$ de surface, alors

$$n^2 \cos\theta\,\delta\sigma\,\delta\omega = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce dernier résultat peut s'obtenir plus rapidement en partant de l'invariant relatif [1] :

$$\mathrm{J}_1 \equiv \int \frac{\partial n\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial x'}\,\delta x + \frac{\partial n\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial y'}\,\delta y + \frac{\partial n\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\partial z'}\,\delta z.$$

En reprenant les cosinus directeurs m, p, q, on pourra écrire

$$\mathrm{J}_1 \equiv \int n(m\,\delta x + p\,\delta y + q\,\delta z).$$

---

[1] *Étude sur les invariants intégraux* [*Rendiconti Circolo matematico di Palermo*, t. XVI, 1902 (Chap. XIII)].

Par différentiation symbolique, on introduit l'invariant intégral absolu (2-uple)

$$\dot{\mathrm{I}}_2 = \int \delta n(m\,\delta x + p\,\delta y + q\,\delta z) + n(\delta m\,\delta x + \delta p\,\delta y + \delta q\,\delta z).$$

En multipliant $\dot{\mathrm{I}}_2$ par $\dot{\mathrm{I}}_2$ symboliquement et en tenant compte de ce que $\delta x\,\delta y\,\delta z$ dans ce théorème d'optique est nul, on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{I}}_4^{\star} &= \int n^2(\delta x\,\delta y\,\delta m\,\delta p + \delta y\,\delta z\,\delta p\,\delta q + \delta z\,\delta x\,\delta q\,\delta m) \\
&= \int n^2\left(q\,\delta x\,\delta y\,\frac{\delta m\,\delta p}{q} + m\,\delta y\,\delta z\,\frac{\delta p\,\delta q}{m} + p\,\delta z\,\delta x\,\frac{\delta q\,\delta m}{p}\right) \\
&= \int n^2 \cos\theta\,\delta\sigma\,\delta\omega. \qquad\qquad \text{C. Q. F. D.}
\end{aligned}$$