BULLETIN DE LA S. M. F.

E. R. HEDRICK
W. D. A. WESTFALL

# Sur l'existence des fonctions implicites

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 44 (1916), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

---

# SUR L'EXISTENCE DES FONCTIONS IMPLICITES;

PAR MM. E.-R. HEDRICK ET W.-D.-A. WESTFALL [1].

1. *Introduction.* — Les théorèmes usuels [2] sur les fonctions implicites paraissent plus restrictifs qu'ils ne doivent l'être, parce qu'on suppose habituellement l'existence de certaines dérivées.

Nous nous proposons de démontrer qu'on peut énoncer les hypothèses sous une forme nouvelle, où l'on ne suppose l'existence d'aucune dérivée. Dans le cas d'une équation à une inconnue, ce procédé ne présente pas de difficulté. Aussi nous ne donnerons les détails de la démonstration que dans le cas de plusieurs équations à plusieurs inconnues.

Il est à remarquer que les énoncés habituels des théorèmes d'existence résultent de ceux de ce travail, si les hypothèses qui figurent dans ces énoncés, y compris l'existence de certaines dérivées, sont satisfaites. D'ailleurs la démonstration n'est guère plus difficile dans le cas général traité ici.

2. *Cas d'une seule équation entre deux ou plusieurs variables.* — Dans le cas d'une seule équation donnant la valeur d'une fonction inconnue, on peut donner plusieurs formes aux hypothèses; nous en donnerons deux seulement. Nous supposerons qu'il y a une seule variable indépendante, mais les extensions au

---

[1] Lu à la séance d'été de The American Mathematical Society, août 1913.

[2] *Voir*, par exemple, E. GOURSAT, *Bulletin*, t. XXXI, 1903; *Cours d'Analyse*, t. I, 2e édition.

cas de plusieurs variables indépendantes sont presque évidentes. D'ailleurs ces extensions sont très importantes pour la suite, car on les emploiera fréquemment dans les autres démonstrations [1].

Théorème I. — *Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables réelles $x$ et $y$, définie dans le domaine* R

$$[|x - x_0| < h, |y - y_0| < h]$$

*autour du point $(x_0, y_0)$, et satisfaisant aux conditions suivantes : 1° elle est une fonction continue de $x$ en tout point $(x_0, y)$ de* R *sur la ligne $x = x_0$ ; 2° elle est une fonction continue de $y$ en tout point de* R ; *3° le quotient*

$$Q_y^0 = \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

*est défini (c'est-à-dire de même signe et différent de zéro) tant que l'on a $0 < |y - y_0| < h$. Il existe alors un nombre positif $\eta$, et au moins une fonction $\varphi(x)$, définie dans l'intervalle $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, continue au point $x = x_0$, et telle que l'on ait*

$$y_0 = \varphi(x_0), \qquad f[x, \varphi(x)] = f(x_0, y_0),$$

*tant que l'on a $|x - x_0| < \eta$.*

En effet, supposons que $Q_y^{(0)}$ reste toujours positif. Alors, si l'on choisit une quantité positive $\delta$ plus petite que $h$, il existe une autre quantité positive $\theta$, telle que l'on ait

$$f(x_0, y_0 + \delta) > f(x_0, y_0) + \theta,$$
$$f(x_0, y_0 - \delta) < f(x_0, y_0) - \theta.$$

---

[1] Ainsi dans le théorème I, on peut remplacer la variable indépendante $x$ par un système de $n$ variables indépendantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Le théorème subsiste pourvu que l'on fasse les hypothèses correspondantes sur $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$. De plus, une fonction $f(x_1, \ldots, x_n; y)$ peut satisfaire aux conditions du théorème I pour quelques-unes des variables $x$ et aux conditions du théorème II pour les autres.

On peut, dans le théorème I, remplacer l'hypothèse faite sur Q par l'hypothèse qu'il y a dans le voisinage de $y_0$ deux valeurs de $y$, $y_1$ et $y_2$, pour lesquelles on a

$$[f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)]\,[f(x_0, y_2) - f(x_0, y_0)] < 0.$$

Mais $f(x, y)$ est une fonction continue de $x$ pour $x = x_0$; il existe alors un nombre positif $\zeta$ tel que l'on ait

$$f(x, y_0 + \delta) > f(x_0, y_0) > f(x, y_0 - \delta)$$

pour $|x - x_0| < \zeta$, et puisque $f(x, y)$ est une fonction continue de $y$, il existe au moins une valeur de $y$ comprise entre $y_0 - \delta$ et $y_0 + \delta$ pour laquelle on aura

$$(1) \qquad f(x, y) = f(x_0, y_0), \qquad |x - x_0| < \zeta, \qquad |y - y_0| < \delta.$$

Il est ainsi démontré qu'il existe au moins une solution $y$ de l'équation (1) pour tout choix de $\delta$ moindre que $h$, $x$ vérifiant la condition $|x - x_0| < \zeta$. Pour vérifier qu'il existe une solution continue au point $x = x_0$, choisissons une suite décroissante de valeurs de $\delta$ : $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ ayant zéro pour limite. Soient $\zeta_1$, $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n, \ldots$, les valeurs correspondantes de $\zeta$, et soient $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ une suite quelconque (s'il y en a plusieurs) de fonctions correspondantes de $x$ satisfaisant à l'équation (1). La fonction $\Phi(x)$ définie par les équations

$$\Phi(x_0) = y_0, \quad \Phi(x) = y_i(x), \quad \text{pour} \quad \zeta_{i-1} < |x - x_0| \leqq \zeta_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

est alors une solution de l'équation (1) pour chaque valeur de $x$ de l'intervalle $|x - x_0| < \zeta_1 < \eta$, et cette solution est évidemment continue pour $x = x_0$.

Une conséquence directe du théorème I est le corollaire suivant, qui est assez intéressant par lui-même pour justifier son énoncé.

Corollaire I. — *Soit $f(x, y)$ une fonction continue de $x$ et de $y$ dans le voisinage de $x_0, y_0$. Supposons que les $p$ premières dérivées partielles de $f$ par rapport à $y$ existent et soient elles-mêmes des fonctions continues de $y$ pour $x = x_0$, $|y - y_0| < h$, et que la $p^{\text{ième}}$ dérivée soit la première qui n'est pas nulle au point $(x_0, y_0)$. Si $p$ est impair, il existe dans tout intervalle suffisamment petit autour de $x = x_0$ une solution $y = \Phi(x)$ de l'équation $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ qui est continue au point $x = x_0$, et qui est égale à $y_0$ pour $x = x_0$.*

En effet, le théorème des accroissements finis montre que l'on a

$$Q_y^{(0)} = \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{(y - y_0)^{p-1}}{p!} f^{(p)}[x_0, y_0 + \theta(y - y_0)]$$

$$(0 < \theta < 1),$$

et ce quotient est évidemment défini, si $p$ est impair, pour des valeurs assez petites de $y - y_0$, puisque $f^{(p)}_{(x_0, y_0)}$ est continue en $y$ et n'est pas nulle pour $y = y_0$.

Un cas assez important et déjà connu du théorème est le suivant :

Corollaire II. — *Soit $f(y)$ une fonction continue et monotone (croissante ou décroissante) de $y$ au voisinage de $y = y_0$; il existe alors un nombre positif $\eta$ et une fonction $y = \Phi(x)$, et une seule, continue pour $x = x_0$, et satisfaisant aux conditions*

$$x = f[\Phi(x)], \qquad \Phi(x_0) = y_0 \qquad \text{pour} \qquad |x - x_0| < \eta.$$

Pour démontrer que la solution est *unique*, comme il est dit dans l'énoncé ci-dessus, il est nécessaire de modifier légèrement les conditions du théorème I. Voici une autre forme de ce théorème, où l'on peut dire que la solution est déterminée d'une façon unique par des conditions très générales.

Théorème II. — *Soit $f(x, y)$ une fonction continue de $x$ et de $y$ dans le domaine* R; *si le quotient*

$$Q_y = \frac{f(x, \bar{y}) - f(x, y)}{\bar{y} - y}$$

*est défini pour tous les couples de points distincts $(x, y)$, $(x, \bar{y})$ de* R, *il existe un nombre positif $\eta$ et une fonction unique $y = \Phi(x)$, définie dans l'intervalle $|x - x_0| < \eta$, pour laquelle on a*

$$\Phi(x_0) = y_0, \qquad f[x, \Phi(x)] = f[x_0, \Phi(x_0)], \qquad |x - x_0| < \eta,$$

*et cette solution $\varphi(x)$ est continue pour toute valeur de $x$ telle que l'on ait $|x - x_0| < \eta$.*

Il résulte du théorème I qu'il existe au moins une solution $y = \Phi_1(x)$ qui est continue pour $x = x_0$. S'il y en avait une autre $y = \Phi_2(x)$, il est évident que le quotient $Q_y$ serait nul pour au moins deux couples de points de R. Ainsi la solution doit être unique. De plus, cette solution est certainement continue en chaque point de l'intervalle, parce que les conditions du théorème I sont satisfaites en chaque point dont les coordonnées satisfont à l'équation $y = \Phi(x)$.

3. *Cas de deux équations à trois ou un plus grand nombre de variables.* — Pour le cas de deux équations, nous énoncerons seulement l'analogue du théorème II.

Théorème III. — *Soient $f_1(x, y_1, y_2)$ et $f_2(x, y_1, y_2)$ deux fonctions des trois variables $x, y_1, y_2$, définies et continues dans le domaine* R

$$[|x - x_0| < h, \ |y_1 - y_{10}| < h, \ |y_2 - y_{20}| < h],$$

*autour du point fixe $x_0, y_{10}, y_{20}$. Supposons que, pour un choix convenable de l'ordre des fonctions $f_1$ et $f_2$, et des deux variables $y_1$ et $y_2$, le déterminant*

$$j = \begin{vmatrix} \dfrac{f_1(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) - f_1(x, y_1, \bar{y}_2)}{\bar{y}_1 - y_1} & \dfrac{f_1(x, y_1, \bar{y}_2) - f_1(x, y_1, y_2)}{\bar{y}_2 - y_2} \\ \dfrac{f_2(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2) - f_2(x, y_1, \bar{y}_2)}{\bar{y}_1 - y_1} & \dfrac{f_2(x, y_1, \bar{y}_2) - f_2(x, y_1, y_2)}{\bar{y}_2 - y_2} \end{vmatrix}$$

*ainsi que les éléments de la diagonale principale, soient définis pour tous les points $(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $(x, y_1, \bar{y}_2)$, $(x, y_1, y_2)$, de* R *pour lesquels $j$ existe. Alors il existe un nombre positif $\eta$ et un système unique de deux fonctions $y_1 = \Phi_1(x)$, $y_2 = \Phi_2(x)$, définies si l'on a $|x - x_0| < \eta$, pour lesquelles on a*

$$(2) \qquad \begin{cases} y_{10} = \Phi_1(x_0), & f_1[x, \Phi_1(x), \Phi_2(x)] = f_1(x_0, y_{10}, y_{20}), \\ y_{20} = \Phi_2(x_0), & f_2[x, \Phi_1(x), \Phi_2(x)] = f_2(x_0, y_{10}, y_{20}), \end{cases}$$

*et chacune des fonctions $\Phi_1$, $\Phi_2$ est continue pour toute valeur de $x$ de l'intervalle $|x - x_0| < \eta$.*

En effet, puisque par hypothèse le dernier élément de la deuxième ligne du déterminant $j$ est défini, il résulte du théorème (*voir* la note du paragraphe 2) qu'il existe un nombre positif $\eta_1$ et une fonction continue $y_2 = \omega(x, y_1)$ (et une seule), définie dans le domaine $|x - x_0| < \eta_1$, $|y_1 - y_{10}| < \eta_1$, telle que l'on a

(3) $\quad y_{20} = \omega(x_0, y_{10}), \qquad f_2[x, y_1, \omega(x, y_1)] = f_2(x_0, y_{10}, y_{20}).$

Si l'on remplace dans la fonction $f_1(x, y_1, y_2)$ la variable $y_2$ par cette fonction $\omega(x, y_1)$, on obtient la nouvelle fonction

$$\mathfrak{F}(x, y_1) = f_1[x, y_1, \omega(x, y_1)],$$

qui est continue si l'on a $|x - x_0| < \eta_1$, $|y_1 - y_{10}| < \eta_1$, et le quotient

$$Q_{y_1}(\mathfrak{F}) = \frac{\mathfrak{F}(x, \bar{y}_1) - \mathfrak{F}(x, y_1)}{\bar{y}_1 - y_1}$$

calculé pour cette nouvelle fonction est défini. Nous avons en effet ([1])

$$\begin{aligned} Q_{y_1}(\mathfrak{F}) &= \frac{f_1[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_1[x, y_1, \omega(x, y_1)]}{\bar{y}_1 - y_1} \\ &= \frac{f_1[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_1[x, y_1, \omega(x, \bar{y}_1)]}{\bar{y}_1 - y_1} \\ &\quad + \frac{f_1[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_1[x, y_1, \omega(x, y_1)]}{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)} \\ &\quad \times \frac{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)}{\bar{y}_1 - y_1}; \end{aligned}$$

d'après la formule (3), on a aussi

$$\frac{f_2[x, \bar{y}_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_2[x, y_1, \omega(x, \bar{y}_1)]}{\bar{y}_1 - y_1} + \frac{f_2[x, y_1, \omega(x, \bar{y}_1)] - f_2[x, y_1, \omega(x, y_1)]}{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)} \, \frac{\omega(x, \bar{y}_1) - \omega(x, y_1)}{\bar{y}_2 - y_1} = 0.$$

En désignant $\omega(x, \bar{y}_1)$ par $\bar{y}_2$, il est évident que nous aurons

$$j = Q_{y_1}(\mathfrak{F}) \times E_{22},$$

$E_{22}$ désignant le dernier élément de la seconde ligne de $j$. Mais $j$

---

([1]) S'il y a deux valeurs de $y$, $y_i$ et $\bar{y}_1$ pour lesquelles $\omega(x, y_1) = \omega(x, \bar{y}_1)$ les démonstrations suivantes ne s'appliquent pas. Mais, dans ce cas, il est évident que $Q_y = E_{11}$ est défini.

et $E_{22}$ sont tous les deux définis par hypothèse. Il en résulte que $Q_{y_1}(\mathfrak{F})$ est lui-même défini, pour tous les couples de points distincts $(x, \overline{y}_1)$, $(x, y_1)$ pour lesquels on a

$$|x - x_0| < \eta_1, \qquad |y_1 - y_{10}| < \eta_1.$$

D'après le théorème II, il existe un nombre positif $\eta < \zeta$ et une fonction continue $y_1 = \Phi_1(x)$ (et une seule), telle que l'on ait

$$y_{10} = \Phi_1(x_0), \qquad F[x, \Phi_1(x)] = F(x_0, y_{10});$$

cette fonction est continue dans l'intervalle $|x - x_0| < \eta$, et vérifie la condition $|y_1 - y_{10}| < \eta_1$ dans cet intervalle. Si nous posons

$$y_2 = \omega[x, \Phi_1(x)] = \Phi_2(x),$$

les deux fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ satisfont aux équations (2), et elles sont des fonctions continues définies pour toutes les valeurs de $x$ pour lesquelles $|x - x_0| < \eta$.

Ce système de solutions est unique dans le domaine R. Supposons en effet que pour une valeur particulière de $x$ telle que l'on ait $|x - x_0| < \eta$, il existe un système de valeurs $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, différent du système $y_1 = \Phi_1(x)$, $y_2 = \Phi_2(x)$, pour lesquelles on ait aussi

$$f_1(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2) = f_1(x_0, y_{10}, y_{20}), \qquad f_2(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2) = f_2(x_0, y_{10}, y_{20}).$$

Il en résulterait que $j$ est nul pour les valeurs $y_1$, $y_2$, $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ elles-mêmes; si l'on avait $\overline{y}_2 = y_2$, $j$ serait nul pour une valeur quelconque de $y_2$.

Le théorème III est ainsi établi. On en trouve une application assez importante dans la théorie des transformations ponctuelles du plan.

Théorème IV. — *Soient*

$$u = f(x, y), \qquad u_0 = f(x_0, y_0),$$
$$v = \varphi(x, y), \qquad v_0 = \varphi(x_0, y_0),$$

*une transformation ponctuelle bien définie, où les fonctions f et $\varphi$ sont des fonctions continues dans le domaine* R

$$[|x - x_0| < h, \; |y - y_0| < h]$$

*autour du point* $(x_0, y_0)$. *On suppose de plus que le déterminant*

$$j = \begin{vmatrix} \dfrac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{\bar{x} - x} & \dfrac{f(x, \bar{y}) - f(x, y)}{\bar{y} - y} \\ \dfrac{\varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(x, \bar{y})}{\bar{x} - x} & \dfrac{\varphi(x, \bar{y}) - \varphi(x, y)}{\bar{y} - y} \end{vmatrix},$$

*ainsi qu'un élément au moins de chaque ligne et de chaque colonne soit défini pour tous les points* $(\bar{x}, \bar{y})$, $(x, \bar{y})$, $(x, y)$ *de* R *pour lesquels* $j$ *existe. Il existe alors un nombre positif* $\eta$ *tel que la transformation inverse est déterminée et continue dans le cercle de rayon* $\eta$ *de centre* $(u_0, v_0)$.

C'est en effet un cas particulier du théorème III; les fonctions $f$ et $\varphi$ pouvant être échangées entre elles, ainsi que les variables $x$ et $y$, on peut supposer que ce sont les éléments de la diagonale principale qui sont définis.

Remarquons que le déterminant $j$ peut être mis sous la forme

$$j = \begin{vmatrix} f(\bar{x}, \bar{y}) & f(x, \bar{y}) & f(x, y) \\ \varphi(\bar{x}, \bar{y}) & \varphi(x, \bar{y}) & \varphi(x, y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{x}' & x & x \\ \bar{y}' & \bar{y} & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où l'on déduit que l'on a $j = \frac{A'}{A}$, en désignant par A l'aire du triangle dont les sommets sont $(x, y)$, $(x, \bar{y})$, $(\bar{x}, \bar{y})$, et par A′ l'aire du triangle dont les sommets sont les points correspondants du plan $(u, v)$. La condition que $j$ soit défini signifie que les aires A et A′ doivent toujours être de même signe ou de signes opposés.

Les théorèmes habituels sur la résolution d'un système de deux équations à deux fonctions inconnues se déduisent des théorèmes III et IV, en supposant que les fonctions données ont des dérivées continues par rapport aux inconnues, et que le jacobien est différent de zéro au voisinage d'un point fixe. Prenons par exemple le théorème IV, et supposons que le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

existe et n'est pas nul au point $(x_0, y_0)$, et que tous ses éléments sont continus dans le voisinage. Nous pouvons écrire le premier élément de $j$,

$$\frac{f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, \bar{y})}{\bar{x} - x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\bar{y}} x + \theta(\bar{x} - x) \qquad (0 < \theta < 1),$$

et mettre les autres éléments de $j$ sous une forme analogue. Puisque les éléments de J sont continus dans le voisinage de $(x_0, y_0)$, il est clair que J sera défini dans ce voisinage s'il n'est pas nul au point $(x_0, y_0)$, et par suite $j$ sera lui-même défini dans un petit domaine autour de ce point. De même, puisqu'il y a au moins un élément de J dans chaque ligne et chaque colonne qui n'est pas nul au point $(x_0, y_0)$, on en déduit aisément que les autres conditions supplémentaires du théorème IV sont aussi remplies.

4. *Cas général.* — Dans le cas général, on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème V. — *Soient*

$$\begin{array}{l} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{array}$$

*$n$ fonctions des $n+1$ variables réelles $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ continues dans un domaine* $\mathrm{R}[|x - x_0| < h,\ |y_i - y_{i0}| < h]$ *autour du point fixe* $\mathrm{P}_0(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$. *Si l'on peut ranger les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et les variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans un ordre tel que le déterminant*

$$i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

*où*

$$a_{ik} = \frac{f_i(x, y_1, \ldots, y_{k-1}, y'_k, \bar{y}_{k+1}, \ldots, \bar{y}_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_k, \bar{y}_{k+1}, \ldots, \bar{y}_n)}{y'_k - y_k},$$

*ainsi que tous les éléments de la diagonale principale, et tous* *les mineurs que l'on obtient en supprimant les i premières lignes et les i premières colonnes* ($i = 1, 2, \ldots, n$), *soient définis pour tout choix des points qui figurent dans l'énoncé, pourvu que ces points soient dans* R *et que chaque élément de j existe, il existe un nombre positif* $\eta$ *et un système (et un seul) de fonctions* $y_i = \varphi_i(x)$, *continues dans l'intervalle* $|x - x_0| < \eta$, *pour lesquelles on a*

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{c} y_{i0} = \Phi_i(x_0), \\ f_i[x, \Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x)] = f_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}), \\ |y_i - y_{i0}| < h. \end{array}\right.$$

Ce théorème se réduit au théorème III pour $n = 2$. Nous allons montrer que, si le théorème est vrai pour toutes les valeurs de $n$ inférieures à N, il est encore vrai pour $n = \mathrm{N}$.

Les conditions de l'énoncé sont vérifiées pour les $n - 1$ fonctions $f_2, \ldots, f_n$. Si l'on suppose le théorème vrai pour un système de $n - 1$ fonctions continues de $x$ et de $y$ dans le domaine $|x - x_0| < \eta_1$, $|y_1 - y_{10}| < \eta_1$,

$$y_i = \omega_i(x, y_1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

qui satisfait aux conditions

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{c} y_{i0} = \omega_i(x_0, y_{10}), \\ f_i[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \ldots, \omega_n(x, y_1)] = f_i(x_0, y_0, \ldots, y_{n0}) \\ (i = 2, 3, \ldots, n). \end{array}\right.$$

Remplaçons dans la fonction $f_1$ les variables $y_2, y_3, \ldots, y_n$ par les fonctions $\omega_i$; nous obtenons ainsi une nouvelle fonction de $x$ et de $y_1$:

$$\mathfrak{F}(x, y_1) = f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \omega_3(x, y_1), \ldots, \omega_n(x, y_1)].$$

qui est continue dans le domaine défini par les conditions

$$|x - x_0| < \eta_1, \qquad |y_1 - y_{10}| < \eta_1.$$

Nous allons montrer que le quotient

$$\mathrm{Q}_{y_2}(\mathfrak{F}) = \frac{\mathfrak{F}(x, y_1') - \mathfrak{F}(x, y_1)}{y_1' - y_2}$$

est défini. Nous avons en effet

$$Q_{y_2}(\mathfrak{F}) = \frac{f_1[x, y'_1, \omega_2(x, y'_1), \ldots, \omega_n(x, y'_1)] - f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \ldots, \omega_n(x, y_1)]}{y'_1 - y_1}$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n} b_{1k},$$

où nous avons posé

$$b_{11} = \frac{f_1[x, y'_1, \omega_2(x, y'_1), \ldots, \omega_n(x, y'_1)] - f_1[x, y_1, \omega_2(x, y'_1), \ldots, \omega_n(x, y'_1)]}{y'_1 - y_1}$$

et pour $k > 1$,

$$b_{1k} = \frac{\left\{\begin{array}{l} f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_2), \ldots, \omega_{k-1}(x, y_1), \omega_k\ (x, y'_1) \ldots] \\ -f_1[x, y_1, \omega_2(x, y_2), \ldots, \omega_k\ (x, y_2), \omega_{k+1}(x, y'_1) \ldots] \end{array}\right\}}{\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)}$$
$$\times \frac{\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)}{y'_1 - y_1},$$

si $\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)$ n'est pas nul, et $b_{1k} = 0$ si ce dénominateur est nul. Puisque les équations (5) sont vérifiées identiquement en $x$ et $y_1$, nous avons

$$f_i[x, y'_1, \omega_2(x, y'_1), \ldots, \omega_n(x^*, y'_n)] = f_i[x, y_1, \omega_2(x, y_1), \ldots, \omega_n(x, y_1)]$$
$$(i = 2, 3, \ldots, n)$$

ou

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} = 0,$$

$b_{ik}$ se déduisant de $b_{1k}$ en remplaçant $f_1$ par $f_i$. Si nous choisissons comme il suit les valeurs des $y$ et des $\overline{y}$

$$y_1 = y_1, \qquad y'_1 = y'_1, \qquad \ldots,$$
$$y_i = \omega_i(x, y_1), \qquad y'_i = \omega_i(x, y'_1), \qquad \overline{y}_i = \omega_i(x, y'_1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

les quantités $b_{ik}$ sont égales aux éléments correspondants de $j$ multipliés par

$$c_k = \frac{\omega_k(x, y'_1) - \omega_k(x, y_1)}{y'_1 - y_1}.$$

Par conséquent, si nous multiplions les éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne de $j$ par $c_k$ et remplaçons la première colonne par la somme de tous ces produits, le premier élément de cette colonne devient précisément $Q_{y_1}$, et tous les autres éléments de cette colonne deviennent nuls. Dans cette opération, si l'on a

$$\omega_k(x, y') = \omega_k(x, y),$$

la valeur de $y'_k$ dans la $k^{\text{ième}}$ colonne ne doit pas être remplacée par la valeur correspondante $\omega_k(x, y'_1)$, mais les conclusions restent les mêmes parce que le $c_k$ correspondant est nul. On a alors dans tous les cas

$$A_{11} Q_{y_1}(\mathfrak{F}) = j,$$

$A_{11}$ étant le mineur de $a_{11}$ dans $j$, et les valeurs des $y$ ayant été choisies comme il a été dit plus haut. Puisque $j$ et $A_{11}$ sont définis, par hypothèse, il en est de même de $Q_{y_1}$; c'est ce que nous voulions établir. La fonction $\mathfrak{F}(x, y_1)$ remplit alors toutes les conditions du théorème II dans le domaine

$$|x - x_0| < \eta_1, \qquad |y_1 - y_{10}| < \eta_1.$$

Il en résulte qu'il existe un nombre positif $\eta$ et une fonction $y_1 = \Phi_1(x)$, continue pour $|x - x_0| < \eta$ et telle que l'on ait

$$y_{10} = \Phi_1(x_0), \qquad \mathfrak{F}[x, \Phi_1(x)] = \mathfrak{F}[x_0, \Phi_2(x_0)],$$

c'est-à-dire telle que

$$y_{10} = \Phi_1(x_0),$$

$$f_2\{x, \Phi_2(x), \omega_2[x, \Phi_2(x)], \ldots, \omega_n[x, \Phi_2(x)]\} = f_2(x_0, y_{20}, \ldots, y_{n0}).$$

Remplaçons dans les fonctions $\omega_i(x, y_1)$, la variable $y_1$ par $\varphi_1(x)$; nous obtenons ainsi les $n - 1$ nouvelles fonctions

$$y_i = \Phi_i(x) = \omega_i[x, \Phi_1(x)] \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

qui satisfont évidemment aux équations (4).

Comme dans le cas de deux équations, il est évident aussi dans le cas général que ce système est unique, et que les fonctions $\Phi_i$ sont continues. Il faut remarquer aussi que la variable indépendante $x$ peut être, comme plus haut, remplacée par un système de $n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il est aisé de voir que les énoncés habituels se déduisent du théorème V, comme plus haut pour les théorèmes III et IV, en supposant que les dérivées, limites des éléments de $j$, existent et sont continues au voisinage du point $P_0$, et que le jacobien J est différent de zéro en ce point. En effet, sous ces conditions, chaque élément de $j$ est égal à l'élément correspondant de J en un point voisin de $P_0$, et $j$ est défini dans un certain domaine autour de ce point. Quant aux conditions supplémentaires du théorème V, il est évident qu'il y a au moins un élément de J et le mineur correspondant qui sont différents de zéro au point $P_0$; dans ce mineur, il y a au moins un élément et son mineur qui ne sont pas nuls en ce point, et ainsi de suite. Il en résulte qu'il est possible de ranger les fonctions et les variables dans un ordre tel que tous les éléments de la diagonale principale de J, ainsi que tous les mineurs qu'on obtient en supprimant les $i$ premières lignes et les $i$ premières colonnes sont différents de zéro au point $P_0$. Puisque les éléments de J sont continus dans le voisinage, ces éléments et ces mineurs seront aussi différents de zéro dans un certain domaine autour de $P_0$. D'après cela, les éléments et les mineurs de correspondants de $j$ seront aussi définis dans un domaine autour de $P_0$, et les conditions supplémentaires du théorème V se trouvent remplies (¹).

On a donc démontré tous les théorèmes usuels sur les fonctions implicites sans parler de dérivées, et, pour avoir les énoncés habituels, il suffit d'introduire l'hypothèse de l'existence des dérivées dans les énoncés plus généraux de ce Mémoire. Les auteurs espèrent pouvoir discuter, dans un autre travail, la question de l'existence des solutions dans un domaine plus étendu.

(¹) Il est aisé de voir que J est la limite de $j$, lorsque les points qui figurent dans $j$ tendent vers $P_0$.