BULLETIN DE LA S. M. F.

E. COTTON

Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 121-125

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__121_1>

SUR L'ABSCISSE DE CONVERGENCE DES SÉRIES DE DIRICHLET;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les séries de la forme

$$a_1 e^{-\lambda_1 z} + a_2 e^{-\lambda_2 z} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n z} + \ldots, \tag{1}$$

où les a sont des nombres quelconques, les λ des nombres réels positifs croissants avec l'indice n, et où z désigne une variable complexe, sont appelées *séries de Lejeune-Dirichlet*. Elles ont fait l'objet de nombreux travaux, parmi lesquels nous citerons la Thèse de M. Cahen [1]. Si une telle série est convergente pour une valeur z_0 de la variable, elle l'est encore pour toute valeur de z dont la partie réelle $R(z)$ surpasse celle $R(z_0)$ de z_0. De là résulte l'existence d'une *abscisse de convergence*, finie ou non, pour une série (1); soit α cette abscisse, (1) est convergente pour $R(z) > \alpha$, divergente pour $R(z) < \alpha$, le cas où $R(z) = \alpha$ étant réservé.

M. Cahen, dans le Travail cité plus haut, a démontré que, *si cette abscisse est positive*, son expression est

$$\alpha = \overline{\lim_{n=+\infty}} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \right\}, \tag{2}$$

où $\overline{\lim\limits_{n=+\infty}}\, s_n$ désigne, comme d'habitude, la plus grande des limites de la suite s_n pour n infini positif.

Je me propose de compléter cette proposition en établissant que, *si l'abscisse de convergence est négative*, on a de même

$$\alpha = \lim_{n=+\infty} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \log |a_n + a_{n+1} + \ldots| \right\}, \tag{3}$$

expression analogue à la précédente, mais où les restes de la série remplacent les sommes des premiers termes.

L'étude des intégrales

$$f(z) = \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(t) e^{-tz}\, dt,$$

où la variable t est réelle, la fonction $\varphi(t)$ et la variable z pouvant être complexes, présente avec celle des séries (1) une analogie manifeste.

M. Pincherle a montré l'existence pour ces intégrales d'une abscisse de convergence α; M. Landau a donné une expression de α analogue à celle de M. Cahen, lorsque $\alpha > 0$; enfin M. Pincherle a traité le cas de $\alpha < 0$ dans un Mémoire [2] qui m'a con-

---

[1] *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XI, 1894, p. 75.
[2] *Acta mathematica*, t. XXXVI, p. 269.

duit à la proposition qui vient d'être énoncée et dont voici la démonstration.

1. L'identité appelée *transformation d'Abel*, qui est, dans la théorie des différences et des sommes définies, l'analogue de la formule d'intégration par parties, intervient fréquemment dans l'étude des séries (1). Pour la démonstration qui va suivre, il nous sera commode de la présenter de la façon suivante :

Soient deux suites indéfinies

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots, \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots;$$

en supposant la série Σv_n convergente, désignons par R_n le reste

$$R_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots;$$

nous avons $R_{n-1} - R_n = v_n$, et, par suite,

$$u_n v_n = u_n(R_{n-1} - R_n) = u_n R_{n-1} - u_{n+1} R_n + R_n(u_{n+1} - u_n)$$

ou, avec la notation habituelle des différences,

$$u_n v_n = R_n \Delta u_n - \Delta(u_n R_{n-1}). \tag{4}$$

Cette identité nous montre que, *si les séries Σv_n, $\Sigma(R_n \Delta u_n)$ sont convergentes, et si de plus $u_n R_{n-1}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la série $\Sigma u_n v_n$ est aussi convergente.*

2. L'abscisse de convergence de la série (1) étant supposée négative, cette série est convergente pour $z = 0$. Elle se réduit alors à Σa_n, nous prendrons $v_n = a_n$, d'où

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots.$$

Comme $|R_n|$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, $\log|R_n|$ est négatif pour les grandes valeurs de n, et la plus grande des limites pour n infini de $\frac{\log|R_{n-1}|}{\lambda_n}$ ne peut surpasser zéro. Admettons qu'elle soit négative et désignons-la par $-\beta$. Soit ε un nombre positif inférieur à β, on peut trouver un nombre ν tel que l'inégalité $n > \nu$ entraîne

$$\frac{\log|R_{n-1}|}{\lambda_n} < -\beta + \varepsilon,$$

ou encore

(5) $$|R_{n-1}| < e^{-\lambda_n(\beta-\varepsilon)}.$$

Il nous suffit d'étudier la série (1) sur l'axe réel; désignons alors par x la variable, et montrons que la série

(6) $$\Sigma a_n e^{-\lambda_n x}$$

est convergente pour

(7) $$x > -\beta + \varepsilon.$$

Appliquons pour cela la proposition du n° **1**. Nous avons pris déjà $v_n = a_n$, nous ferons $u_n = e^{-\lambda_n x}$.

Les inégalités (5) et (7) montrent que

$$|u_n R_{n-1}| < e^{-\lambda_n(x+\beta-\varepsilon)}$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Pour établir la convergence de $\Sigma R_n \Delta u_n$, écrivons

$$R_n \Delta u_n = R_n(e^{-\lambda_{n+1}x} - e^{-\lambda_n x}) = R_n e^{-\lambda_{n+1}x} [1 - e^{(\lambda_{n+1}-\lambda_n)x}].$$

Or $1 - e^{-t}$ est, pour $t > 0$, inférieur à t; ceci montre que

$$|R_n \Delta u_n| < |R_n| e^{-\lambda_{n+1}x} |x| (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

et, à cause de (5),

$$|R_n \Delta u_n| < e^{-\lambda_{n+1}(x+\beta-\varepsilon)} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) |x|.$$

M. Cahen a démontré (*loc. cit.*, p. 91) que la série de terme général

$$(\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{-\lambda_{n+1}u}$$

est convergente pour $u > 0$. La convergence de la série (6) étant assurée dès que l'inégalité (7) est vérifiée, on a $\alpha \leqq -\beta + \varepsilon$, et, puisque ε est arbitrairement petit,

(8) $$\alpha \leqq -\beta.$$

3. Supposons maintenant la série (6) convergente pour une valeur négative de x, et posons

$$r_n = a_{n+1} e^{-\lambda_{n+1}x} + a_{n+2} e^{-\lambda_{n+2}x} + \ldots,$$

d'où

$$a_n = (r_{n-1} - r_n)e^{\lambda_n x}$$

et par suite

$$R_{n-1} = r_{n-1}e^{\lambda_n x} + r_n(e^{\lambda_{n+1}x} - e^{\lambda_n x}) + r_{n+1}(e^{\lambda_{n+2}x} - e^{\lambda_{n+1}x}) + \ldots.$$

Soit H un nombre supérieur à $|r_{n-1}|$, $|r_n|$, $|r_{n+1}|$, etc.; on a, puisque $x < 0$,

$$|R_{n-1}| < He^{\lambda_n x} + H\left\{e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_{n+1}x} + e^{\lambda_{n+1}x} - e^{\lambda_{n+2}x} + \ldots\right\},$$

c'est-à-dire

$$|R_{n-1}| < 2He^{\lambda_n x},$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{\log|R_{n-1}|}{\lambda_n} < \frac{\log 2H}{\lambda_n} + x.$$

On a donc, puisque x est aussi voisin de α qu'on le veut, et que λ_n devient infini avec n,

$$(9) \qquad -\beta \leqq \alpha.$$

Le rapprochement des inégalités (8) et (9) donne bien $\alpha = -\beta$.

Terminons par une remarque facile à déduire de la démonstration de M. Cahen et de celle qui précède. Quand l'abscisse de convergence est nulle, la formule (2) de M. Cahen est encore exacte (sauf peut-être si la série Σa_n avait en même temps une somme nulle); mais l'inverse n'est pas vrai, car le second membre de la formule (2) est nul lorsque l'abscisse de convergence est négative et ($\Sigma a_n \neq 0$). La formule (3) est exacte, même pour $\alpha = 0$, dès que le second membre a un sens, c'est-à-dire dès que la série Σa_n est convergente.