Bulletin de la S. M. F.

H. Lebesgue

Sur certaines démonstrations d'existence

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 132-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__132_1>

SUR CERTAINES DÉMONSTRATIONS D'EXISTENCE;

PAR M. H. LEBESGUE.

Dans une lettre, adressée à M. Borel, et qui accompagnait l'envoi de l'article précédent, M. Sierpinski se demandait si cet article devait être publié, s'il ne ferait pas double emploi avec une démonstration que j'avais indiquée à M. Borel et que celui-ci a signalée dans la deuxième édition de ses *Leçons sur la théorie des fonctions* (p. 198).

Comme on va le voir, les deux articles, loin de faire double emploi, se complètent : ce qui est traité un peu trop rapidement dans l'un est complètement traité dans l'autre et inversement.

Le présent article avait été écrit en 1909, à la demande de M. Borel, pour être mis en note d'un de ses Ouvrages. M. Borel n'a pu le publier à l'époque. Je le donne ici sans changement, mais, comme je ne l'écrirais pas actuellement tout à fait de même, je crois devoir ajouter quelques explications.

C'était l'époque des discussions sur le raisonnement célèbre de M. Zermelo; j'avais précisé le débat en demandant : Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir? (1) et, en même temps, j'avais appelé l'attention sur certaines démonstrations d'existence d'ensembles qui ne semblaient pas permettre de définir un de ces ensembles.

Je venais d'examiner ces définitions dans un Mémoire qui parut peu de temps après (2); ma conclusion était que, à celles de ces définitions qui ne sont pas illusoires, il est possible d'apporter des précisions qui conduisent à la définition d'un des ensembles dont on démontre l'existence.

Le présent article est consacré au cas plus simple de quelques modes de démonstrations d'existence de nombres. Bien que les

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, décembre 1904.
(2) *Journal de Mathématiques*, 1905.

indications qu'il contient paraîtront maintenant banales, il m'avait semblé nécessaire de l'écrire après avoir lu les lignes suivantes dans un travail de M. Borel : « Dans l'état actuel de la Science, la détermination effective d'un nombre absolument normal paraît un problème des plus difficiles : il serait intéressant, soit de le résoudre en construisant un nombre absolument normal, ou en montrant qu'un nombre irrationnel connu est absolument normal, *soit de démontrer que, parmi les nombres pouvant être réellement définis, aucun n'est absolument normal; si paradoxal que paraisse cet énoncé, il n'est nullement incompatible avec le fait que la » mesure des nombres absolument normaux compris entre* o *et* 1 *est égale à* 1 (1).

Or, voici ma thèse : si l'on a pu démontrer que le complémentaire B, $[B = (0, 1) - A]$ d'un ensemble A, formé de nombres compris entre 0 et 1, est de mesure inférieure à 1, de la démonstration même on peut déduire la définition d'un nombre de A.

Bien entendu la démonstration ne saurait résulter de l'écriture des lettres A et B, il faut connaître sur A autre chose que son nom, A; mais si A est donné par ses propriétés caractéristiques et si, de ces propriétés, on a déduit logiquement la preuve que la mesure de B est inférieure à 1, on est dans le cas que je considère.

C'est la légitimation de cette affirmation générale, qui est la partie principale de ma Note. Je l'applique ensuite aux nombres absolument normaux, mais sans préciser aussi nettement que M. Sierpinski la preuve que la mesure de l'ensemble de ces nombres est égale à 1. J'avais cependant repris cette démonstration, parce que le raisonnement de M. Borel prêtait à quelques objections à cause de l'emploi de probabilités dont l'indépendance n'est pas évidente (2), et surtout pour avoir une fois de plus, et dans un cas un peu plus compliqué, l'occasion d'appliquer les procédés qui m'avaient déjà servi dans mes *Leçons sur l'intégration* et dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, pour prouver

---

(1) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1er semestre 1909.
Les *italiques* sont de moi. J'ai modifié la forme de la fin de la phrase pour ne pas avoir à définir le mot *probabilité*.

(2) C'est à l'occasion d'observations analogues (BERNSTEIN, *Math. Ann.*, Band 71; BOREL, *Math. Ann.*, Band 72) que cet article a été recherché dans les papiers de M. Borel.

que certains ensembles sont mesurables B. Ces procédés, bien connus aujourd'hui, étaient encore nouveaux alors. Il convient de rappeler que la seule fois où, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions*, M. Borel rencontre l'occasion d'appliquer ses idées sur la mesure à la solution d'une question de la théorie des fonctions, il ne peut affirmer que l'ensemble étudié est bien mesurable B [1]. C'est dans une Note de 1904 et dans mon Mémoire de 1905 que j'ai fixé la portée, tout à fait insoupçonnée alors, de la notion d'ensemble mesurable B.

---

1. Quand on veut prouver l'existence de nombres vérifiant une certaine condition, on emploie souvent un raisonnement par l'absurde consistant à démontrer sur l'ensemble des nombres ne vérifiant pas la condition imposée une propriété qui n'appartient pas à l'ensemble de tous les nombres. L'exemple classique de ce mode de raisonnement est la démonstration, par G. Cantor, de l'existence des nombres transcendants. La démonstration utilise ces propriétés : les nombres non transcendants forment un ensemble dénombrable et l'ensemble de tous les nombres n'est pas dénombrable.

On pourra utiliser un raisonnement analogue toutes les fois qu'on saura que l'ensemble des nombres ne vérifiant pas la condition imposée : (a) est dénombrable, ou (b) est partout non dense, ou (c) est de première catégorie [2], ou encore (d) si l'on sait que l'ensemble des nombres ne vérifiant pas la condition imposée et compris dans un intervalle (α, β) est de mesure plus petite que $\beta - \alpha$.

On se sent forcé d'admettre que ce mode de raisonnement prouve l'existence d'un ensemble de nombres satisfaisant à la condition considérée, mais on peut prétendre qu'il ne fournit pas la preuve de l'existence *d'un* nombre satisfaisant à cette condition, car il ne fournit aucun moyen de distinguer des autres un des nombres de l'ensemble dont il prouve l'existence, c'est-à-dire de nommer *un* nombre satisfaisant à la condition imposée.

---

(1) Page 67 (note 1).

(2) La notion d'ensemble de première catégorie est due à M. R. Baire (*voir* sa Thèse, *Annali di Mathem.*, 1899).

Cette difficulté n'est pas sérieuse ici. Supposons que l'on ne s'occupe que de nombres compris entre o et 1 et admettons d'abord qu'on est dans le cas (a).

Désignons les nombres ne vérifiant pas la condition considérée par u_1, u_2, ...; le nombre x, défini par la condition d'avoir pour $p^{\text{ième}}$ chiffre décimal 1 ou 2 suivant que le $p^{\text{ième}}$ chiffre de u_p est différent de 1 ou lui est égal ([1]), répond à la question. C'est en somme le raisonnement même de Cantor.

Admettons maintenant qu'on soit dans le cas (c) qui contient comme cas particulier (b) [et aussi le cas (a)] puisqu'un ensemble est dit de première catégorie s'il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles partout non denses U_1, U_2, ... Considérons la suite d'intervalles (S)

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{array}{l} \left(0, \frac{1}{10}\right);\ \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right);\ \ldots;\ \left(\frac{9}{10}, 1\right);\ \left(0, \frac{1}{100}\right); \\ \left(\frac{1}{100}, \frac{2}{100}\right);\ \ldots;\ \left(\frac{99}{100}, 1\right);\ \left(0, \frac{1}{1000}\right);\ \ldots. \end{array}\right.$$

Soit I_1 le premier de ces intervalles ne contenant à son intérieur aucun nombre de U_1. Ne conservons dans la suite que ceux des intervalles qui sont entièrement, c'est-à-dire extrémités comprises, intérieurs à I_1 et soit I_2 le premier de ceux-là ne contenant à son intérieur aucun nombre de U_2, etc. Le nombre commun à I_1, I_2, ... satisfait à la condition imposée. C'est le raisonnement même de M. Baire, précisé seulement quant au choix des I_1, I_2, ...

2. C'est à cause de cette précision, puérile tant elle est immédiate, que l'on peut dire avoir nommé *un* nombre répondant à la question. Il est certain que toutes les propriétés de ce nombre sont des conséquences logiques de sa définition; mais cela est illusoire en pratique, car, dans la plupart des cas, on ne saura pas tenir compte de ce que I_1, I_2, ... sont les *premiers* intervalles jouissant de certaines propriétés. Doit-on, à cause de cela, considérer cette définition d'un nombre comme illusoire et, adoptant à

[1] On fait telle convention que l'on veut relativement à la façon d'écrire dans le système décimal ceux des u_p qui sont des fractions décimales exactes.

peu près le point de vue de Kronecker, exiger une définition fournissant un *procédé de calcul* du nombre défini?

Une telle exigence me paraîtrait tout à fait exagérée. Si l'on sait faire le choix des I_1, I_2, ..., on sait obtenir les décimales successives du nombre défini; mais, pour choisir I_1, il faut connaître U_1, U_2, ... Si l'on sait démontrer que l'ensemble des nombres ne répondant pas à la question est de première catégorie on sait aussi, le plus souvent, nommer les ensembles U_1, U_2, ... Nommer U_1, c'est nommer une propriété de ses points; si l'on sait démontrer que U_1 est partout non dense, on sait aussi, le plus souvent, déterminer les intervalles α_1, α_2, ... contigus à cet ensemble et alors, par un nombre fini d'équations, on trouvera, I_1. Les intervalles I_2, I_3 se détermineront de même.

Sans doute il n'y a pas là l'indication d'un procédé opératoire régulier; mais, dans la plupart des cas se présentant pratiquement, on voit comment, à partir de la définition de l'ensemble de première catégorie, on doit opérer pour calculer un nombre ne faisant pas partie de l'ensemble ([1]); à mesure que l'on connaît mieux l'ensemble de première catégorie donné, à mesure qu'il est donné plus simplement, le procédé de calcul apparaît mieux et se précise d'avantage.

Il me semble que c'est là tout ce qu'on peut demander; demander plus ce serait vouloir que de cette seule hypothèse « on a énoncé une propriété caractérisant les nombres d'un ensemble de première catégorie » on déduise un procédé de calcul applicable quelque bizarre que soit la propriété énoncée; on voudrait une réponse plus précise que l'énoncé; à une question idéaliste on exigerait une réponse empiriste.

A ce compte, ne devrait-on pas dire que la définition classique de l'intégrale des fonctions continues est illusoire puisqu'elle ne fournit pas de procédé de calcul pour

$$\int_0^1 x[\lim_{m=\infty}\lim_{n=\infty}(\cos m!\pi C)^{2n}]\,dx,$$

([1]) Il n'est peut-être pas inutile de faire observer que c'est la *loi du calcul*, c'est-à-dire l'ensemble des mots définissant le nombre, qui est seule intéressante ici et non pas les premiers résultats du calcul, les premiers chiffres décimaux du nombre à définir, puisque ce nombre est choisi dans un ensemble partout dense et qu'on peut par suite se donner arbitrairement ses premiers chiffres.

quand C est la constante d'Euler? ou encore que la règle d'addition des fractions par la réduction au même dénominateur est illusoire parce que ce ne serait pas celle qu'on pourrait employer si l'on avait besoin de la somme des nombres de Bernoulli $B_{1000^{1000}}$, $B_{2000^{2000}}$ (1)?

En résumé, il me semble qu'on doit exiger de la démonstration de l'existence d'une catégorie d'êtres mathématiques qu'elle contienne l'énoncé des caractéristiques logiques d'*un* de ces êtres, mais cela seulement. Il est souhaitable que cet énoncé conduise au moins dans les cas plus simples à un procédé de construction effective de l'être défini et que ce procédé soit d'autant plus régulier et précis que les données sont plus particulières.

Comme exemple d'une démonstration d'existence ne remplissant aucune de ces conditions je citerai la preuve, donnée par M. Zermelo, du théorème suivant : *Un ensemble quelconque* M *étant donné, il existe un ensemble bien ordonné* M_1 *correspondant à* M, *élément à élément, d'une façon univoque et réciproque* (2).

M. Zermelo indique en effet comment on construirait M_1 si l'on avait choisi une correspondance entre chaque sous-ensemble de M et un des éléments de ce sous-ensemble; mais il considère comme évidente l'existence de telles correspondances sans chercher aucunement à caractériser l'une d'elles. De plus le procédé de construction de M_1 semble ne pouvoir même pas servir dans des cas particuliers, car les seuls cas particuliers où l'on a pu jusqu'ici nommer une corrrespondance de la nature de celles que M. Zermelo utilise sont ceux où l'on connaît à l'avance M_1 et même c'est le plus souvent en utilisant cet ensemble M_1 qu'on nomme la correspondance (3).

3. Plaçons-nous maintenant dans le cas (*d*) (4). On suppose donc donné un ensemble de mesure inférieure à 1 et il s'agit de

(1) Il me semble que si l'on prend pour critère de la bonté d'une définition la possibilité d'effectuer un calcul numérique, les difficultés que l'on rencontre dans ces deux exemples doivent être considérées comme aussi graves l'une que l'autre.

(2) *Math. Annalen*, Band 59, 1904, p. 514-516.

(3) *Voir* une Note de M. E. Borel dans les *Math. Annalen*, Band 60, 1905, p. 194-195.

(4) Le cas (*d*) ne contient pas le cas (*c*), car un ensemble peut être de première catégorie et avoir pour complémentaire un ensemble de mesure nulle.

montrer qu'il existe dans (o, 1) des points ne faisant pas partie de l'ensemble. En d'autres termes : un ensemble de mesure non nulle contient des points, et par suite, une infinité non dénombrable de points. C'est la propriété que M. E. Borel utilise surtout dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* et c'est en vue de cette utilisation qu'il a introduit la notion d'ensembles mesurables et en particulier celle d'ensemble de mesure non nulle.

Si l'on se rappelle le procédé que j'emploie pour définir la mesure, on peut énoncer le théorème à démontrer sous la forme suivante : *Étant donné un ensemble dénombrable d'intervalles dont la longueur totale est inférieure à* 1, *il existe des points de* (o, 1) *ne faisant partie d'aucun de ces intervalles.* Sous cette forme la proposition avait été utilisée par M. Borel dans sa Thèse [1].

Soient U_1, U_2, ... les intervalles donnés; la longueur de U_p sera α_p ou un nombre plus petit, mais les α_p sont tels que la série $\sum \alpha_p$ est convergente et de somme plus petite que 1. Pour éviter une petite difficulté accessoire, je supposerai qu'aux intervalles donnés on en a ajouté de nouveaux de façon que l'on soit certain que les extrémités des intervalles donnés primitivement sont toutes intérieures à un autre; c'est cet ensemble total d'intervalles qui est désigné par U_1, U_2, ... Il suffira qu'un point soit extérieur à U_1, U_2, ... ou extrémité de certains d'entre eux sans être *intérieur* à aucun autre pour qu'il réponde à la question.

Considérons les p_1 premiers intervalles $U_1, U_2, \ldots, U_{p}$; soient $s_0^{p_1}, s_1^{p_1}, \ldots, s_9^{p_1}$ la longueur totale des parties de ces intervalles qui sont comprises respectivement dans le premier, dans le deuxième, etc., dans le dixième intervalle de la suite S du n° 1. Posons

$$s = \sum_1^{\infty} \alpha_p, \qquad s_p = \sum_1^{p} \alpha_p, \qquad r_p = s - s_p, \qquad r = 1 - s.$$

On a

$$s_0^{p_1} + s_1^{p_1} + \ldots + s_9^{p_1} \leqq s_{p_1},$$

d'où

$$(s_0^{p_1} + r_{p_1}) + (s_1^{p_1} + r_{p_1}) + \ldots + (s_9^{p_1} + r_{p_1}) \leqq s_{p_1} + 10 r_{p_1} = s + 9 r_{p_1};$$

---

(1) *Loc. cit.*

donc, quand p_1 aura été choisi assez grand, cette somme sera inférieure à 1 et l'une au moins des quantités $s_i^{p_1}+r_{p_1}$ sera au plus égale à $\frac{s+9r_{p_1}}{10}$, donc inférieure à $\frac{1}{10}$. Quand p_1 sera choisi, on donnera à i la plus petite valeur possible satisfaisant aux conditions imposées; soit i_1 cette valeur.

On partagera alors l'intervalle $\left(\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right)$ en 10 parties égales et par la considération de ces 10 parties et des p_2 premiers intervalles U ($p_2 > p_1$) on formera les sommes $\sigma_0^{p_2}, \ldots, \sigma_9^{p_2}$ analogues aux $s_j^{p_1}$. On aura

$$\begin{aligned}(\sigma_0^{p_2}+r_{p_2})+\ldots+(\sigma_9^{p_2}+r_{p_2}) &\leqq \sigma_0^{p_2}+\ldots+\sigma_9^{p_2}+10\,r_{p_2}\\ &\leqq (s_i^{p_1}+r_{p_1}-r_{p_2})+10\,r_{p_2} \leqq (s_i^{p_1}+r_{p_1})+9r_{p_2} \leqq \frac{1}{10}(s+9r_{p_1})+9\,r_{p_2}.\end{aligned}$$

Si donc p_1 et p_2 sont assez grands pour que

$$s+9\,r_{p_1}+90\,r_{p_2}$$

soit plus petit que 1, l'une des quantités $\sigma_i^{p_2}+r_{p_2}$ sera au plus égale à $\frac{s+9r_{p_1}+90r_{p_2}}{100}$, donc plus petite que $\frac{1}{100}$. Quand p_1 et p_2 seront choisis, i_2 désignera le plus petit indice i tel qu'il en soit ainsi.

Continuant de même on arrivera à déterminer un nombre i_3 et à écrire la condition

$$s+9\,r_{p_1}+90\,r_{p_2}+900\,r_{p_3}<1,$$

et ainsi de suite.

Toutes les conditions seront remplies si la série

$$s+9\,r_{p_1}+90\,r_{p_2}+900\,r_{p_3}+9000\,r_{p_4}+\ldots$$

est convergente et de somme au plus égale à 1. Nous pouvons donc convenir de prendre pour p_1 le premier entier tel qu'on ait

$$r_{p_1} \leqq \frac{r}{18}$$

et, pour $k>1$, de prendre pour p_k le premier entier supérieur à p_{k-1} et tel qu'on ait

$$r_{p_k} \leqq \frac{r}{2^k.9.10^{k-1}}.$$

Les entiers p_k étant ainsi définis, les entiers i_k sont déterminés et le nombre qui, dans le système décimal, est représenté par le développement o, $i_1 i_2 i_3 \ldots$ répond évidemment à la question. On voit que pour obtenir les k premières décimales il suffit de se servir des p_k premiers intervalles, le nombre p_k étant d'ailleurs déterminé à l'avance par la seule étude de la série $\sum \alpha_p$. Quant à cette série elle se présente en général d'elle-même, si en effet on a pu vérifier par le calcul qu'un ensemble dénombrable d'intervalles donné numériquement a une mesure inférieure à 1, c'est qu'on a pu trouver, pour la série des longueurs des intervalles, une série majorante dont on sait calculer la somme inférieure à 1.

4. Il faudrait indiquer maintenant un procédé permettant, un ensemble mesurable étant donné, de l'enfermer dans une infinité dénombrable d'intervalles dont la mesure diffère aussi peu que l'on veut de l'ensemble donné. Il est manifestement impossible de nommer un procédé régulier si l'on ne précise pas la façon dont est donné l'ensemble mesurable; tout ce que l'on peut faire c'est indiquer des exemples qui, pour d'autres cas analogues, suggéreront peut-être des artifices utilisables.

Pour tous les ensembles que l'on a démontré être mesurables, la démonstration a consisté à prouver que ces ensembles pouvaient être enfermés dans des ensembles construits à partir d'intervalle par les opérations suivantes :

I. Faire la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles précédemment définis;

II. Prendre la partie commune à une infinité dénombrables d'ensembles précédemment définis;

III. Passer d'nn ensemble à son complémentaire.

Cette troisième opération permet d'ailleurs de supprimer l'une des opérations I ou II.

Il est évident que, si l'on connaît la loi de formation d'un ensemble à l'aide des opérations I, II, III à partir d'intervalles donnés, il est facile de l'enfermer dans des intervalles satisfaisant à la condition indiquée.

Tout revient donc à trouver cette loi de formation et les intervalles primitifs. J'ai dit ailleurs comment on avait cette loi pour des ensembles définis par des égalités ou inégalités entre des fonctions dont on connaît une représentation analytique ([1]). Je me contenterai ici de donner un exemple où cette loi s'obtient très simplement parce que l'ensemble est défini par une propriété des chiffres des nombres de l'ensembles ([2]).

Proposons-nous de nommer un nombre absolument normal, M. Borel ([3]) appelle ainsi un nombre normal par rapport à toutes les bases de numération possible. Il dit qu'un nombre est normal par rapport à la base q si, ce nombre étant exprimé dans le système de base q et un groupement quelconque de p chiffres consécutifs étant considéré, le nombre de fois c_n que se rencontre ce groupement dans les n premiers chiffres après la virgule satisfait à la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n} = \frac{1}{q^p},$$

quel que soit l'entier p et le groupement considéré.

M. Borel démontre que l'ensemble des nombres absolument normaux compris entre 0 et 1 a une mesure égale à 1; en utilisant ce qui précède, pour nommer un nombre absolument normal de $(0, 1)$, il suffit donc d'indiquer un moyen d'enfermer le complémentaire dans des intervalles de longueur totale au plus égale à un nombre ε, donné, inférieur à 1.

Pour qu'un nombre A soit absolument normal, il faut et il suffit évidemment que, quels que soient les entiers p, q, r, $p > 0$, $q > 0$, $q > r > 0$, le nombre $p^r A$ étant écrit dans le système de base p^q, si l'on désigne par $c_0, c_1, \ldots, c_{p^q-1}$ les nombres de fois que figurent les chiffres $0, 1, \ldots, p^q - 1$ dans les n premiers chiffres après la virgule, les rapports

$$\frac{c_0}{n}, \quad \frac{c_1}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{c_{p^q-1}}{n}$$

([1]) *Journal de Mathématiques*, 1905.

([2]) *Voir* un exemple analogue, mais plus simple, dans mes *Leçons sur l'intégration*, p. 109.

([3]) *Rend. del Cirolo math. di Palermo*, t. XXVII, 1909, p. 247-271.

tendent vers la même limite, $\frac{1}{p^q}$, quand n augmente indéfiniment. Appelons $E_{p,q,r}$ l'ensemble des nombres pour lesquels la condition précédente est remplie pour les valeurs p, q, r des entiers considérés. Soient l'ensemble E des nombres absolument normaux de $(0, 1)$, C son complémentaire, $C_{p,q,r}$ le complémentaire de $E_{p,q,r}$. On a évidemment

$$C = \sum_p \sum_q \sum_r C_{p,q,r}.$$

Si donc on choisit des nombres positifs $\varepsilon_{p,q,r}$ tels que

$$\varepsilon = \sum_p \sum_q \sum_r \varepsilon_{p,q,r},$$

il suffit d'enfermer chaque $C_{p,q,r}$ dans des intervalles dont la longueur totale est $\varepsilon_{p,q,r}$ au plus.

Pour simplifier le langage je prends le cas $p = 3$, $q = r = 1$ et je pose

$$E_{3,1,1} = \mathcal{E}, \qquad C_{3,1,1} = \mathfrak{C}, \qquad \varepsilon_{3,1,1} = 2e.$$

$\mathcal{E}$ est la partie commune à tous les ensembles $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ formés des nombres pour lesquels les rapports $\frac{c_0}{n}$, $\frac{c_1}{n}$ tendent respectivement vers $\frac{1}{3}$; auquel cas $\frac{c^2}{n}$ tend également vers $\frac{1}{3}$.

C'est donc la somme des deux ensembles C_0, C_1 complémentaires de $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ et il suffit d'enfermer chacun d'eux dans des intervalles de longueur totale au plus égale à e. Prenons C_0, par exemple.

$\mathcal{E}_0$ est la partie commune à tous les ensembles $\mathcal{E}_{0,\alpha}$, pour toutes les valeurs entières de α; $\mathcal{E}_{0,\alpha}$ est formé des nombres pour lesquels on a toujours, pour n assez grand,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha} < \frac{c_0}{n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}.$$

C_0 est donc la somme des $C_{0,\alpha}$, complémentaires des $\mathcal{E}_{0,\alpha}$, et il suffit d'enfermer $C_{0,\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ dans des intervalles de longueur totale $\frac{e}{2^\alpha}$.

$\mathcal{E}_{0,\alpha,\beta}$ étant l'ensemble des nombres pour lesquels la double inégalité précédente est vérifiée dès que n est au moins égal à β;

$\mathcal{C}_{0,\alpha}$ est la somme des $\mathcal{C}_{0,\alpha,\beta}$, β prenant les valeurs 1, 2, ... Mais $\mathcal{C}_{0,\alpha,\beta}$ étant évidemment contenu dans $\mathcal{C}_{0,\alpha,\beta+1}$, on peut ne donner à β qu'une infinité arbitrairement choisie de valeurs entières croissantes. $C_{0,\alpha}$ est donc la partie commune à une infinité quelconque des $C_{0,\alpha,\beta}$, complémentaires des $\mathcal{C}_{0,\alpha,\beta}$, et il suffit de montrer comment, pour une valeur assez grande de β, on peut enfermer $C_{0,\alpha,\beta}$ dans des intervalles de longueur totale $\frac{e}{2^\alpha}$ au plus.

Or $C_{0,\alpha,\beta}$ est la somme des ensembles $C_{0,\alpha,\beta,\gamma}$ ($\gamma = 0, 1, 2, \ldots$), $C_{0,\alpha,\beta,\gamma}$ étant formé des nombres pour lesquels la double inégalité précédente n'est pas vérifiée pour $n = \beta + \gamma$. Il suffit donc, pour arriver à la détermination de β, de montrer que la série $\sum_\gamma$ mesure $[C_{0,\alpha,1,\gamma}]$ est convergente et de trouver combien de termes on doit négliger au commencement pour que la somme de ceux qui restent ne surpasse pas $\frac{e}{2^\alpha}$.

Or $C_{0,\alpha,1,\gamma}$ est formé d'un certain nombre d'intervalles de la forme $\left(\frac{p}{2^{\gamma+1}}, \frac{p+1}{2^{\gamma+1}}\right)$. Tous ces intervalles sont égaux et la somme totale de leurs mesures est 1, donc la mesure de $C_{0,\alpha,1,\gamma}$ est la probabilité pour qu'en choisissant $\gamma + 1$ fois l'un des chiffres 0, 1, 2, le chiffre 0 ne se présente pas un nombre de fois compris entre $(\gamma+1)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\alpha}\right)$ et $(\gamma+1)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha}\right)$. C'est-à-dire qu'à très peu près (¹) la mesure de $C_{0,\alpha,1,\gamma}$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2}{3\alpha}\sqrt{\gamma+1}}^{\infty} e^{-t^2}\, dt;$$

ou, en posant $e^{-t^2} = u$,

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}}}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{-\log u}} < \frac{1}{\pi} e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{-\log u}}\right]_{u=e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}}} = \frac{3\alpha e^{-\frac{4(\gamma+1)}{9\alpha^2}}}{2\sqrt{\pi(\gamma+1)}}.$$

Ceci est le terme général de rang γ d'une série convergente; on

---

(¹) Pour être rigoureux il faudrait évidemment tenir compte de l'erreur commise dans cette approximation, il nous suffira ici d'être certain qu'elle ne modifiera pas la conclusion. ce qui résulte du fait que l'erreur relative tend vers zéro. (On pourrait aussi imiter les calculs de M. Sierpinski.)

pourrait donc indiquer un procédé régulier pour choisir β en fonction de α et alors les $C_{0,\alpha,\beta,\gamma}$ ($\gamma \geqq 0$) couvriraient $C_{0,\alpha,\beta}$ donc $C_{0,\alpha}$ comme nous le voulons.

Il n'y aurait donc aucune difficulté à nommer un nombre absolument normal; nous avons en passant démontré à nouveau que l'ensemble des nombres absolument normaux est de mesure égale à 1.