BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur les chemins de détermination des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 153-161

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__153_1>

SUR LES CHEMINS DE DÉTERMINATION DES FONCTIONS ENTIÈRES;

Par M. G. Valiron.

On sait qu'étant donnés une fonction entière $f(z)$ et un chemin C qui s'éloigne indéfiniment, les valeurs de $f(z)$ sur la courbe C n'ont pas en général de limite lorsque z croît indéfiniment. Mais il peut exister des chemins C sur lesquels $f(z)$ tend vers une limite a, je les appellerai *chemins de détermination* a *de* $f(z)$; je dirai aussi que a est une *valeur asymptotique* ou *valeur limite* de $f(z)$. En particulier, M. Iversen a démontré dans sa Thèse qu'il existe toujours des chemins de détermination infinie (1).

L'étude des chemins de détermination finie joue un rôle important dans la théorie des fonctions inverses des fonctions entières; la connaissance de l'ensemble des valeurs limites de la fonction s'impose même dès le début. Le théorème de M. Wiman fournit un premier renseignement : pour les fonctions d'ordre inférieur

(1) *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, Helsingfors, 1914.

à $\frac{1}{2}$ il n'existe pas de valeur asymptotique finie (1). Pour les autres fonctions d'ordre fini, M. Denjoy a énoncé le résultat suivant :

Théorème I. — *Le nombre des valeurs limites d'une fonction d'ordre* ρ *est au plus égal à* 2ρ (2).

Cette importante proposition serait rendue vraisemblable, ajoute M. Denjoy, si l'on établissait ce deuxième théorème :

Théorème II. — *Considérons une courbe* C *s'éloignant indéfiniment, faisons-la tourner d'un angle égal à* $\frac{\pi}{\rho+\alpha}$, α *étant un nombre positif quelconque, et soit* C′ *la courbe obtenue. Désignons par* D *le domaine compris entre* C *et* C′ *et intérieur à l'aire* D_1 *balayée par* C *pendant la rotation. Si une fonction d'ordre* ρ *admet des chemins de détermination intérieurs à* D, *les valeurs limites sur ces chemins sont les mêmes.*

C'est ce deuxième théorème que je me propose de démontrer dans ce qui suit (3) par une application fort simple d'un théorème général de MM. Phragmèn et Lindelöf (4).

Il convient de faire tout d'abord une remarque presque évidente, mais importante, sur la nature des chemins de détermination finie. On sait que la dérivée d'une fonction entière d'ordre ρ est aussi d'ordre ρ ; le logarithme du module de cette dérivée est donc, pour $|z|=r$ et à partir d'une certaine valeur de r, inférieur à $r^{\rho+\beta}$, β étant un nombre positif quelconque. Il résulte de là que, si l'on fait sur un chemin de détermination une transformation z, z' avec $\log|z-z'|<-r^{\rho+\beta}$, β étant positif, on obtient

---

(1) *Voir* Wiman, *Sur un théorème de M. Hadamard* (*Arkiv for Matematik*, t. II, nº 19).

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 juillet 1907.

(3) M. Denjoy a démontré ce théorème lorsque la courbe C est une droite ou une spirale logarithmique. *Voir* également mon Mémoire *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913, p. 252).

(4) *Sur une extension d'un principe classique de l'analyse* (*Acta mathematica*, t. XXXI, 1907).

encore un chemin de même détermination. En particulier, on peut considérer que, dans l'énoncé du théorème II, les chemins de détermination et les contours C et C′ sont des lignes polygonales.

Je rappellerai également l'énoncé du théorème de MM. Phragmèn et Lindelöf sous la forme suivante qui sera seule utile dans la suite :

Considérons une fonction $f(z)$ analytique et régulière dans un domaine simplement connexe D et sur le contour C de ce domaine, sauf au point A du contour. Supposons que le module de $f(z)$ soit inférieur ou égal à un nombre fixe E en tout point du contour autre que A, et admettons qu'il existe une fonction $\omega(z)$ régulière et différente de zéro à l'intérieur du domaine D, régulière et de module moindre que *un* sur la courbe C, sauf peut-être en A, et telle que, si petit que soit le nombre ε, on puisse trouver un cercle de centre A dans lequel on a

$$|f(z)[\omega(z)]^{+\varepsilon}| \leqq \mathrm{E}.$$

Dans ces conditions, le module de $f(z)$ reste inférieur à E en tout point intérieur à la courbe C.

J'aurai enfin à m'appuyer sur une propriété de certaines fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$ dont la démonstration est aisée ([1]). Soit la fonction

$$\mathrm{F}(\mathrm{Z}) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \mathrm{Z}n^{-\frac{1}{\rho_1}}e^{i\omega_n}\right),$$

dans laquelle ρ_1 est inférieur à $\frac{1}{2}$ et ω_n quelconque; pour toute valeur de z extérieure à un cercle de rayon $\mathrm{R}(\gamma)$ indépendant des nombres ω_n et à l'extérieur des cercles Γ_n définis par les égalités

$$\log\left|\mathrm{Z} - n^{\frac{1}{\rho_1}}e^{-i\omega_n}\right| = -n(\log n)^{-1}$$

$\mathrm{F}(\mathrm{Z})$ vérifie les inégalités

$$\frac{\pi\cos\pi\rho_1}{\sin\pi\rho_1}(1-\gamma)\mathrm{R}^{\rho_1} < \log|\mathrm{F}(\mathrm{Z})| < \frac{\pi}{\sin\pi\rho_1}(1+\gamma)\mathrm{R}^{\rho_1} \qquad (|\mathrm{Z}| = \mathrm{R}),$$

dans lesquelles γ est un nombre positif inférieur à *un*.

([1]) *Voir* par exemple mon Mémoire déjà cité, p. 231.

Ces propositions étant admises nous pourrons démontrer le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* D *un domaine défini comme au théorème II; si la fonction $f(z)$, d'ordre* ρ, *admet deux chemins de détermination finie intérieurs au domaine, elle reste bornée entre ces chemins.*

Supposons d'abord que la courbe C coupe en un seul point tout cercle ayant pour centre l'origine. Considérons les courbes C et C' comme des coupures dans le plan des z et faisons correspondre à z intérieur au domaine D le point Z défini par l'égalité $Z = z^{2(\rho+\alpha)}$. Au domaine D correspond un domaine Δ constitué par le plan des Z muni d'une coupure Γ transformée des courbes C et C'. Soit F(Z) la fonction entière d'ordre $\rho_1 = \dfrac{2\rho+\alpha}{4(\rho+\alpha)}$ définie comme il a été dit ci-dessus et dont les zéros sont situés sur la courbe Γ. Dans tout le domaine, exception faite des points intérieurs aux cercles d'équations

$$|Z| = R \qquad \text{et} \qquad \log\left|Z - n^{\frac{1}{\rho_1}} e^{-i\omega_n}\right| = -n(\log n)^{-1},$$

on aura l'égalité

$$\log|F(Z)| = hR^{\rho_1} \qquad (h > M > 0).$$

Désignons par $G(z)$ la transformée de F(Z) par la transformation qui fait correspondre le domaine D à Δ, dans tout le domaine D nous aurons l'égalité

$$\log|G(z)| = hr^{2\rho_1(\rho+\alpha)} = hr^{\rho+\frac{\alpha}{2}},$$

sauf à l'intérieur du cercle $|z| = R^{\frac{1}{2(\rho+\alpha)}}$ et à l'intérieur des courbes ayant pour équations

$$\log\left|z^{2(\rho+\alpha)} - n^{\frac{4(\rho+\alpha)}{2\rho+\alpha}} e^{i\omega_n}\right| = -n(\log n)^{-1}.$$

Ces courbes sont entièrement intérieures aux cercles ayant pour centres les points de C et C' de modules $r_n = n^{\frac{1}{\rho+\frac{\alpha}{2}}}$ et pour logarithmes des rayons

$$-\lambda n(\log n)^{-1} = -\lambda' r_n^{\rho+\frac{\alpha}{2}}(\log r_n)^{-1}.$$

Soit D′ le domaine intérieur à D et extérieur à tous ces cercles. D'après une remarque faite plus haut, à tout chemin de détermination intérieur à D en correspond un autre, de même détermination, intérieur à D′, et sur tout chemin compris entre eux, $f(z)$ a la même valeur limite. Pour établir le lemme on peut donc supposer que les deux chemins de détermination sont intérieurs à D′, et la démonstration résulte alors immédiatement de l'application du théorème de MM. Lindelöf et Phragmèn dans lequel on prendra

$$\omega(z) = [G(z)]^{\cdot}$$

J'ai supposé, pour simplifier l'exposé, que la courbe C coupe en un seul point tout cercle $|z| = r$. Il est clair que rien n'est changé si l'on suppose que la propriété n'a lieu qu'à partir d'une certaine valeur de r. Mais il peut arriver que, quel que soit r, cette propriété ne soit pas vérifiée. Dans ce cas, on considérera l'aire D_1 balayée par la courbe C et sa transformée Δ_1, Δ_1 sera limitée par deux courbes Γ_1 et Γ'_1 correspondant aux frontières C_1 et C'_1 de D_1 et tracées sur la surface de Riemann définie par la transformation (Γ_1 étant considérée comme coupure). On prendra les zéros de $F(Z)$ sur Γ_1 par exemple, avec cette restriction que, si pour une valeur $|Z| = R$ on obtient un arc de Γ_1, on exclut les points intérieurs à cet arc. Dans ces conditions, la fonction $G(z)$ pourra avoir des zéros intérieurs au domaine D_1, mais elle n'en aura pas à l'intérieur de D, et par suite tout ce qui précède s'applique. Le lemme est donc complètement démontré.

Pour passer à la démonstration du théorème II, il suffit alors d'appliquer un mode de raisonnement indiqué par M. Lindelöf (1). Nous devons démontrer que, pour deux chemins de détermination E et E′ intérieurs à D, la valeur limite est la même. Nous supposerons que le domaine D est extérieur à un cercle concentrique à l'origine, hypothèse légitime d'après ce qui pré-

(1) *Voir* la thèse de M. Iversen et le Mémoire de M. Lindelöf [*Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions*... (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXV, n° 7)].

cède. Faisons une inversion par rapport à ce cercle, nous obtiendrons un domaine d dont le contour est formé d'une infinité d'arcs de cercles, et dans ce domaine existent deux chemins e et e', tendant vers l'origine, sur lesquels la transformée $\varphi(z)$ de $f(z)$ a des limites; entre ces chemins $\varphi(z)$ est bornée.

Faisons la représentation conforme du domaine d sur un cercle de rayon *un*, le point $z = 0$ de d correspondant au point $z' = 1$ du cercle. Étant donnée la nature de la frontière du domaine d, aux chemins e et e' correspondent deux chemins γ et γ' aboutissant au point $z' = 1$ (1), sur ces chemins la transformée $\psi(z')$ de $\varphi(z)$ tend respectivement vers des limites lorsque z' tend vers *un*, et elle est bornée entre eux.

Tout revient donc à démontrer que les limites de $\psi(z')$ sur γ et γ' sont les mêmes. Nous allons montrer qu'elles ne peuvent être différentes; supposons qu'elles le soient et désignons-les par μ et μ'. La fonction

$$\theta(z') = \left[\psi(z') - \frac{\mu + \mu'}{2}\right]^2 - \left(\frac{\mu - \mu'}{2}\right)^2$$

a pour limite zéro sur γ et γ' et est bornée entre ces courbes. On déduit de là, comme nous le verrons ci-dessous, que $\theta(z')$ tend uniformément vers zéro lorsque z' tend vers *un* dans le domaine fermé limité par γ et γ' et intérieur au cercle (circonférence comprise). Il en résultera que, dans tout ce domaine, et par suite sur γ et γ', la fonction $\psi(z')$ tend vers l'un des deux nombres μ ou μ', ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite; cette hypothèse est donc inadmissible et le théorème II est démontré.

Il reste à démontrer la propriété admise ci-dessus, savoir que, $\theta(z')$ tendant vers zéro sur γ et γ' et étant bornée entre ces courbes, cette fonction tend uniformément vers zéro dans le domaine fermé limité par γ et γ'. J'appliquerai ici encore le théorème de MM. Lindelöff et Phragmèn.

Désignons par M la borne de $|\theta(z')|$ lorsque z' est compris entre γ et γ'; ε étant arbitrairement petit, il existe un cercle d_ε

(1) *Voir* CARATHÉODORY, *Ueber die gegenseitige Beziehung der Rände bei der konformen Abbildung des Innern einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis* (*Math. Annalen*, B. 73, 1913).

de centre $z'=1$ tel que, sur les portions de γ et γ' intérieures à ce cercle, $|\theta(z')|$ est inférieur à ε. Considérons alors la fonction

$$\theta(z')\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\left[1-(z'-1)M\varepsilon^{-\frac{1}{2}}d_\varepsilon^{-1}\right]^{-1}$$

pour les points du cercle d_ε compris entre γ et γ' le module de cette fonction est inférieur à *un*, et sur le reste du contour du domaine limité par ce cercle et par les courbes γ et γ', il est inférieur à $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, donc à *un*, enfin il est borné dans ce domaine. On peut donc appliquer le théorème de Lindelöf et Phragmèn en prenant $\omega(z')=z'-1$, et l'on voit que, dans tout le domaine fermé limité par γ, γ' et le cercle d_ε, on a

$$|\theta(z')|<\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left[1-(z'-1)M\varepsilon^{-\frac{1}{2}}d_\varepsilon^{-1}\right];$$

en particulier, pour les points de ce domaine intérieurs au cercle de centre $z'=1$ et de rayon $d_\varepsilon\varepsilon^{\frac{1}{2}}M^{-1}$, le module de $\theta(z')$ reste inférieur à $2\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, ce qui montre que $\theta(z')$ converge uniformément vers zéro lorsque z' tend vers *un* [1].

On remarquera que, dans la démonstration précédente, la seule propriété du cercle qui soit intervenue est l'existence, à l'extérieur du cercle, d'une région dont tout point est à une distance du cercle supérieur à d_ε. On voit aisément qu'on peut appliquer directement la démonstration au domaine D lui-même lorsqu'il existe, à l'extérieur de ce domaine, une suite de cercles C_n dont les centres A_n ont pour limite l'infini et dont les rayons sont supérieurs à $k\times\overline{OA_n}$, k étant fixe. C'est ce qui a lieu lorsque la courbe C a une équation polaire de la forme $r=f(\varphi)$, la dérivée logarithmique de $f(\varphi)$ restant supérieure à un nombre fixe [2].

Il résulte de là que le théorème II se démontrerait sans avoir à faire appel aux propriétés de la représentation conforme, si l'on établissait la propriété suivante qui constitue une généralisation du théorème de M. Wiman : pour toute fonction entière d'ordre

---

[1] M. Lindelöf a donné dans le Mémoire cité plus haut une démonstration de cette propriété basée sur l'emploi de l'intégrale de Poisson.

[2] *Voir* mon Mémoire déjà cité, p. 257.

fini ρ, il existe une infinité de courbes fermées sans points doubles Γ_n sur lesquelles le module de la fonction dépasse un nombre donné quelconque M, chaque courbe Γ_n enfermant à son intérieur un cercle de centre A_n et de rayon $k(\rho)\overline{OA_n}$.

En terminant, je signalerai encore une propriété générale de forme des chemins de détermination, qui se déduit des théorèmes de M. Boutroux sur la dérivée logarithmique [1].

Considérons une spirale d'équation $r = f(\varphi)$, $f(\varphi)$ étant une fonction croissante de φ, si la fonction

$$(1) \qquad \frac{f(\varphi + 2\pi) - f(\varphi)}{f(\varphi)} \log f(\varphi)$$

tend vers zéro lorsque φ croît indéfiniment, une fonction entière d'ordre fini non entier ne peut rester bornée sur cette spirale.

En effet, étant donnée une fonction $f(z)$, d'ordre non entier, il existe une fonction $\psi(r)$ satisfaisant à la condition de croissance

$$\lim_{r=\infty} \frac{\psi(r')}{\psi(r)} = 1 \qquad \text{si} \qquad \lim_{r=\infty} \frac{r'}{r} = 1,$$

et telle qu'on a :

1° Sur une infinité de droites issues de l'origine

$$(2) \qquad \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < A \frac{\psi(r) \log r}{r};$$

2° Dans une infinité de couronnes dont le rayon moyen croît indéfiniment

$$(3) \qquad \log M(r) > B\psi(r),$$

$M(r)$ désignant le maximum du module de la fonction pour $|z| = r$.

Supposons que sur la spirale $f(z)$ reste borné et considérons une droite D sur laquelle on a l'inégalité (2), et un cercle de rayon r sur lequel on a l'égalité (3). Soient A_1 et A_2 les points d'intersection de la droite D et de la portion de la spirale extérieure à C qui sont les plus proches de l'origine; dans la région limitée par

[1] Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Acta mathematica*, 1903).

la spire qui va de A_1 à A_2 et par le segment de droite A_1A_2, le maximum du module de $f(z)$ a lieu sur le contour et est supérieur à $e^{B\psi(r)}$ [inégalité (3)]. Ce maximum est donc atteint sur le segment de droite, mais il résulte alors de l'inégalité (2) et de la condition (1) que $f(z)$ sera supérieur à $e^{B'\psi(r)}$ aux points A_1 et A_2, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. La proposition est donc établie.

Il semble probable que la propriété précédente peut s'étendre et qu'on peut supprimer, dans (1), le terme en $\log f(\varphi)$; elle se démontre d'ailleurs facilement dans le cas de la spirale logarithmique, mais par une méthode qui ne semble pas pouvoir être généralisée [1].

[1] *Voir* le Mémoire de M. Lindelöf, *loc. cit.*, p. 388, et la Note de M. Denjoy déjà citée.

FIN DU TOME XLV.