BULLETIN DE LA S. M. F.

B. GLOBA-MIKHAÏLENKO

Sur le mouvement d'une bille de billard

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 15-26
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__15_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE MOUVEMENT D'UNE BILLE DE BILLARD;

PAR M. B. GLOBA-MIKHAÏLENKO.

1. Cette question a été déjà traitée par M. Appell ([1]) qui a mis en évidence les éléments géométriques du problème. Il désigne par V la vitesse de la molécule de la bille située à l'instant t au point de contact A avec le tapis, par α l'angle que fait cette vitesse avec l'axe fixe $O\xi$ situé dans le plan du tapis, par Ω la composante horizontale de la rotation instantanée de la sphère dans son mouvement autour de son centre de gravité G, par β l'angle de Ω avec $O\xi$, enfin par f et δ les coefficients de frottement et de roulement. Avec ces notations, et en prenant pour axes fixes les axes $O\xi$, $O\eta$ situés dans le plan du tapis et l'axe $O\zeta$ vertical ascendant, M. Appell pose

$$fV = x, \qquad \delta\Omega = y, \qquad \beta - \alpha = \theta;$$
$$f^2\left(1 + \frac{R^2}{k^2}\right)g = a, \qquad f\frac{R\delta}{k^2}g = b, \qquad \frac{\delta^2}{k^2}g = c$$

(R étant le rayon de la sphère et k^2 son coefficient d'inertie) et obtient les équations suivantes :

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a + b\sin\theta, \\ x\frac{d\alpha}{dt} &= -b\cos\theta, \\ \frac{dy}{dt} &= b\sin\theta - c, \\ y\frac{d\beta}{dt} &= b\cos\theta, \\ \beta - \alpha &= \theta, \end{aligned}\right.$$

dont l'intégration est ramenée à l'intégration d'une seule équation de la forme suivante

$$z' = z^3 - z^2 + \lambda z(1 - z^2)^2$$

qui ne peut pas être intégrée dans le cas général.

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 1911.

2. Nous nous proposons ici de chercher les solutions approchées du problème, en supposant le coefficient de frottement de roulement δ très petit. Nous montrerons d'abord que les intégrales des équations (1) sont développables en séries suivant les puissances croissantes de δ et nous formerons les équations qui permettront de calculer autant de coefficients de ces séries que l'on voudra.

Assurons-nous d'abord que les intégrales des équations (1) sont développables suivant les puissances de δ. Pour cela écrivons ces équations comme il suit :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -a + \delta b' \sin[\theta_0 + (\theta - \theta_0)],\\ &\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\delta b' \cos[\theta_0 + (\theta - \theta_0)]}{x_0 + (x - x_0)};\\ &\frac{d\Omega}{dt} = b' \sin[\theta_0 + (\theta - \theta_0)] - \delta c',\\ &\frac{d\beta}{dt} = \frac{b' \cos[\theta_0 + (\theta - \theta_0)]}{\Omega_0 + (\Omega - \Omega_0)},\\ &\beta - \alpha = \theta, \end{aligned}\right.$$

où l'on pose

$$b' = f\frac{R}{k^2}g, \qquad c' = \frac{g}{k^2},$$

et où l'on désigne par $x_0, \alpha_0, \beta_0, \Omega_0, \theta_0$ les valeurs pour $\delta = 0$ des nombres x, α, β, Ω, θ.

Il suffit maintenant d'appliquer au système (2) le théorème général que M. Picard donne dans son *Traité d'Analyse* (t. III, p. 162) et dont voici l'énoncé :

« Soit le système d'équations

$$(\mathrm{S})\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 x_2 \ldots x_n, t, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On suppose que, pour $\mu = 0$, on ait l'intégrale

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(t)$$

continue de $t = 0$ à $t = t_0$. De plus les X_i sont supposées développables en séries ordonnées suivant les puissances de μ et $(x_i - \varphi_i t)$ pour toute valeur de t, entre 0 et t_0, les coefficients de ces développements étant, bien entendu, des fonctions continues de t.

» Dans ces conditions les intégrales de (S) prenant respectivement pour $t = 0$ les valeurs

$$\varphi_1(0) + x_1^0, \quad \varphi_2(0) + x_2^0, \quad \ldots, \quad \varphi_n(0) + x_n^0$$

seront continues de o à t_0 et développables suivant les puissances de x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 et μ pourvu que ces grandeurs aient des modules suffisamment petits. »

Or, le système (2) vérifie complètement les conditions de cet énoncé. De plus, il est facile de voir que les quantités x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 sont identiquement nulles dans notre problème, car, quel que soit δ, les conditions initiales restent toujours les mêmes. Donc V, α, β, Ω sont développables en séries suivant les puissances croissantes de δ, pourvu que cette dernière quantité soit suffisamment petite ; et par suite les coordonnées du centre de la sphère et les composantes de la rotation instantanée autour de son centre sont développables en séries de même nature.

3. Cela posé, établissons les équations de mouvement de la sphère sous leur forme classique.

Menons par le centre G de la sphère les axes Gxyz parallèles aux axes fixes O$\xi\eta\zeta$. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de la sphère, p, q, r les composantes de la rotation instantanée sur les axes mobiles Gxyz, m la masse de la sphère, mk^2 son moment d'inertie par rapport au diamètre.

La liaison s'exprime par la condition

$$\zeta = \mathrm{R} = \text{const.}$$

Les forces qui agissent sont :

a. La pesanteur (o, o, $-mg$) appliquée au centre de la sphère ;

b. La réaction inconnue du plan (mX, mY, N) appliquée au point de contact de la sphère avec le plan $\xi\eta$;

c. Le couple du frottement de roulement, dont le moment est égal à δN et qui est dirigé dans le sens inverse de la projection horizontale ω de la rotation instantanée de la sphère.

Avec ces notations les cosinus directeurs du moment de frottement de roulement sont

$$\frac{-p}{\omega}, \quad \frac{-q}{\omega}, \quad 0; \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2},$$

et les moments de cette force par rapport aux axes $Gxyz$ sont

$$-\frac{p\,N\delta}{\omega}, \quad -\frac{q\,N\delta}{\omega}, \quad 0.$$

Maintenant nous pouvons écrire les équations du mouvement

$$(3) \qquad m\xi'' = mX, \qquad m\eta'' = mY, \qquad m\zeta'' = -mg + N = 0;$$

d'où

$$N = mg.$$

Ensuite

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} mk^2 p' &= R\,m\,Y - \frac{p\,N\delta}{\omega}, \\ mk^2 q' &= -R\,mX - \frac{q\,N\delta}{\omega}, \\ mk^2 r' &= 0, \end{aligned} \right.$$

en supposant le coefficient de frottement de pivotement nul. La dernière équation donne ainsi

$$r = r_0 = \text{const.}$$

A ces équations nous devons ajouter encore la condition que la réaction horizontale du plan est égale à fN, ce qui nous donne

$$(5) \qquad X^2 + Y^2 = f^2 g^2.$$

Et enfin que cette réaction est dirigée en sens inverse de la vitesse du point de contact de la sphère avec le plan horizontal. Or, les projections de cette vitesse étant

$$u = \xi' - qR, \qquad v = \eta' + qR, \qquad 0,$$

la condition cherchée est

$$(6) \qquad (\xi' - qR)Y = (\eta' + pR)X.$$

Ces six équations : (3), (4), (5) et (6) nous déterminent complètement les six valeurs inconnues

$$(7) \qquad \xi, \quad \eta, \quad p, \quad q, \quad X, \quad Y.$$

4. Pour $\delta = 0$ ces six fonctions prennent des valeurs bien déterminées, que nous appellerons

$$\xi_0, \quad \eta_0, \quad p_0, \quad q_0, \quad X_0, \quad Y_0$$

et qui sont les fonctions connues du temps, prenant pour $t = 0$ les valeurs initiales constantes

$$\xi_0^0, \quad \eta_0^0, \quad p_0^0, \quad q_0^0, \quad X_0^0, \quad Y_0^0.$$

Nous savons que, pour δ suffisamment petit, les fonctions (7) peuvent être représentées par des séries entières en δ de la forme suivante

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \xi_1\delta + \xi_2\delta^2 + \ldots + \xi_n\delta^n + \ldots, \\ \eta &= \eta_0 + \eta_1\delta + \eta_2\delta^2 + \ldots + \eta_n\delta^n + \ldots, \\ p &= p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots + p_n\delta^n + \ldots, \\ q &= q_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots + q_n\delta^n + \ldots, \\ X &= X_0 + X_1\delta + X_2\delta^2 + \ldots + X_n\delta^n + \ldots, \\ Y &= Y_0 + Y_1\delta + Y_2\delta^2 + \ldots + Y_n\delta^n + \ldots, \end{aligned} \right.$$

où ξ_i, η_i, p_i, q_i, X_i, Y_i sont des fonctions inconnues du temps, s'annulant pour $t = 0$, car évidemment les conditions initiales sont indépendantes de δ.

Portons maintenant ces expressions dans les équations (3), (4), (5) et (6) et, en identifiant les coefficients de δ, nous obtiendrons les équations qui nous permettront de calculer autant de termes des séries (8) que nous voudrons.

Nous avons d'abord

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_0'' + \xi_1''\delta + \xi_2''\delta^2 + \ldots &= X_0 + X_1\delta + X_2\delta^2 + \ldots, \\ \eta_0'' + \eta_1''\delta + \eta_2''\delta^2 + \ldots &= Y_0 + Y_1\delta + Y_2\delta^2 + \ldots; \end{aligned} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} k^2(p_0' + p_1'\delta + p_2'\delta^2 + \ldots) &= R(Y_0 + Y_1\delta + Y_2\delta^2 + \ldots) - g\delta\frac{p}{\omega}, \\ k^2(q_0' + q_1'\delta + q_2'\delta^2 + \ldots) &= -R(X_0 + X_1\delta + X_2\delta^2 + \ldots) - g\delta\frac{q}{\omega}; \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad (X_0 + X_1\delta + X_2\delta^2 + \ldots)^2 + (Y_0 + Y_1\delta + Y_2\delta^2 + \ldots)^2 = f^2g^2;$$

$$(12) \quad \begin{aligned} &[(\xi_0' + \xi_1'\delta + \xi_2'\delta^2 + \ldots) \\ &\qquad - R(q_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots)](Y_0 + Y_1\delta + Y_2\delta^2 + \ldots) \\ &= [(\eta_0' + \eta_1'\delta + \eta_2'\delta^2 + \ldots) \\ &\qquad + R(p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots)](X_0 + X_1\delta + X_2\delta^2 + \ldots). \end{aligned}$$

Les deux équations (9) nous donnent immédiatement

$$\xi_i'' = X_i, \qquad \eta_i'' = Y_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

5. Mais, avant d'aller plus loin, il nous faut développer

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2}$$

suivant les puissances de δ.

On a

$$p^2 = (p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots)^2 = p_0^2 + 2\sum_1^\infty p_0 p_i \delta^i + \sum_{i,k=1}^\infty p_i p_k \delta^{i+k},$$

$$q^2 = (q_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots)^2 = q_0^2 + 2\sum_1^\infty q_0 q_i \delta^i + \sum_{i,k=1}^\infty q_i q_k \delta^{i+k},$$

et nous pouvons écrire

$$\omega^2 = p^2 + q^2 = \omega_0^2 + f(\delta),$$

où l'on pose

$$\omega_0^2 = p_0^2 + q_0^2,$$

$$f(\delta) = 2\sum_1^\infty (p_0 p_i + q_0 q_i)\delta^i + \sum_{i,k=1}^\infty (p_i p_k + q_i q_k)\delta^{i+k},$$

ou en développant

$$\begin{aligned} f(\delta) = {} & 2(p_0 p_1 + q_0 q_1)\delta + [2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + p_1^2 + q_1^2]\delta^2 \\ & + [2(p_0 p_3 + q_0 q_3) + 2(p_1 p_2 + q_1 q_2)]\delta^3 + \ldots \\ & + \text{les termes d'ordre supérieur en } \delta. \end{aligned}$$

Comme $f(\delta)$ est petit lorsque δ est petit, et s'annule avec δ, nous pouvons écrire

$$\omega = [\omega_0^2 + f(\delta)]^{\frac{1}{2}} = \omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0^{-1} f(\delta) - \frac{1}{8}\omega_0^{-3}[f(\delta)]^2 + \frac{1}{16}\omega_0^{-5}[f(\delta)]^3 + \ldots.$$

Et en remplaçant $f(\delta)$ par sa valeur

$$\begin{aligned} \omega = {} & \omega_0 + \omega_0^{-1}(p_0 p_1 + q_0 q_1)\delta \\ & + \left\{ \frac{\omega_0^{-1}}{2}[2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + p_1^2 + q_1^2] - \frac{\omega_0^{-3}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)^2 \right\} \delta^2 \\ & + \left\{ \omega^{-1}[(p_0 p_3 + q_0 q_3) + (p_1 p_2 + q_1 q_2)] \right. \\ & \quad - \frac{\omega^{-3}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)[2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + (p_1^2 + q_1^2)] \\ & \qquad \left. + \frac{\omega^{-5}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)^3 \right\} \delta^3 + \ldots \\ & + \text{les termes supérieurs en } \delta. \end{aligned}$$

Ou encore

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \delta + \omega_2 \delta^2 + \omega_3 \delta^3 + \ldots,$$

en posant

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_1 = \omega_0^{-1}(p_0 p_1 + q_0 q_1), \\ \omega_2 = \dfrac{\omega_0^{-1}}{2}[2(p_0 p_2 + q_0 q_2) + (p_1^2 + q_1^2)] - \dfrac{\omega_0^{-3}}{2}(p_0 p_1 + q_0 q_1)^2, \end{cases}$$

et ainsi de suite.

6. Reprenons maintenant notre calcul. En portant l'expression trouvée de ω dans les équations (10), on a

$$\begin{aligned} &[k^2(p'_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots) - \mathrm{R}(\mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1\delta + \mathrm{Y}_2\delta^2 + \ldots)] \\ &\quad \times (\omega_0 + \omega_1\delta + \omega_2\delta^2 + \ldots) + g\,\delta(p_0 + p_1\delta + p_2\delta^2 + \ldots) = 0, \\ &[k^2(q'_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots) + \mathrm{R}(\mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1\delta + \mathrm{X}_2\delta^2 + \ldots)] \\ &\quad \times (\omega_0 + \omega_1\delta + \omega_2\delta^2 + \ldots) + g\,\delta(q_0 + q_1\delta + q_2\delta^2 + \ldots) = 0. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de δ^i et en remplaçant les ω_i par leurs valeurs, on trouve, après quelques transformations, les équations suivantes :

$$(15) \quad \begin{cases} p'_0 = \dfrac{\mathrm{RY}_0}{k^2}, \\ p'_1 = \dfrac{\mathrm{RY}_1\omega_0 - g p_0}{k^2\omega_0} = \dfrac{\mathrm{RY}_1}{k^2} - \dfrac{g}{k^2\omega_0}p_0, \\ p'_2 = \dfrac{\mathrm{RY}_2}{k^2} - \dfrac{g p_1 \omega_0 - \dfrac{g p_0}{\omega_0}(p_0 p_1 + q_0 q_1)}{k^2\omega_0^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} q'_0 = -\dfrac{\mathrm{RX}_0}{k^2}, \\ q'_1 = -\dfrac{\mathrm{RX}_1}{k^2} - \dfrac{g}{k^2\omega_0}q_0, \\ q'_2 = -\dfrac{\mathrm{RX}_2}{k^2} - \dfrac{g q_1 \omega_0 + \dfrac{g q_0}{\omega_0}(p_0 p_1 + q_0 q_1)}{k^2\omega_0^2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces équations nous permettent, en connaissant les X_i et Y_i, de calculer de proche en proche tous les coefficients de p et de q à l'aide d'une seule intégration.

Passons maintenant aux équations (11). L'identification des coefficients nous donne immédiatement

$$(17) \qquad \begin{cases} X_0^2 + Y_0^2 = f^2 g^2, \\ X_0 X_1 + Y_0 Y_1 = 0, \end{cases}$$

et généralement

$$\sum_{i,k_1} (X_i X_k + Y_i Y_k) = 0 \qquad (i + k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ces équations nous permettront de calculer tous les X_i, en connaissant les Y_i sans aucun signe d'intégration. Le problème se ramène donc au calcul des Y_i. Les équations qui nous permettront de le faire seront données par les équations (12). L'identification des coefficients donne

$$(18) \qquad \begin{cases} (\xi'_0 - Rq_0)Y_0 = (\eta'_0 + Rp_0)X_0, \\ (\xi'_0 - Rq_0)Y_1 + (\xi'_1 - Rq_1)Y_0 = (\eta'_0 + Rp_0)X_1 + (\eta'_1 + Rp_1)X_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et, en général,

$$\Sigma(u_i Y_k - v_i X_k) = 0 \qquad (i + k = 0, 1, 2, \ldots),$$

où l'on pose

$$u = u_0 + u_1 \delta + u_2 \delta^2 + \ldots,$$
$$v = v_0 + v_1 \delta + v_2 \delta^2 + \ldots,$$

étant

$$u_i = \xi'_i - Rq_i, \qquad v_i = \eta'_i + Rp_i.$$

En dérivant la première des équations (18) nous avons, en tenant compte d'elle-même et en remplaçant ξ''_0, η''_0, q'_0, p'_0 par leurs valeurs tirées de (13), (15) et (16),

$$\frac{X'_0}{Y'_0} = \frac{X_0}{Y_0},$$

d'où

$$\frac{X_0}{Y_0} = \text{const.}$$

La réaction du plan conserve sa direction si $\delta = 0$, de même que la vitesse du point de contact de la sphère. C'est le résultat connu d'avance.

7. Faisons maintenant un choix d'axes qui nous permettra de simplifier notablement nos équations. Prenons pour l'axe $O\xi$ l'axe parallèle à la vitesse initiale du point de contact de la sphère, et nous aurons

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &u_0 = u_0^0, && v_0 = 0, \\ &X_0 = -fg, && Y_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

En portant ces valeurs dans les équations (13), (15) et (16), on retrouve d'abord la solution classique où l'on néglige le coefficient δ :

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi_0 = \xi_0^0 + \xi_0'^0 t - \frac{fg}{2} t^2, \\ &\eta_0 = \eta_0^0 + \eta_0'^0 t, \end{aligned}\right.$$

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &p_0 = p_0^0 = \text{const.}, \qquad q_0 = q_0^0 + \frac{fR}{k^2} gt = q_0^0 + \frac{5fg}{2R} t, \\ &u_0 = \xi_0' - q_0 R = u_0^0 - \frac{7}{2} fgt, \qquad v_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les équations (17) donnent ensuite

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} X_1 &= 0, \\ 2fg X_2 &= Y_1^2, \\ fg X_3 &= Y_1 Y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En connaissant les valeurs des Y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), on trouvera, à l'aide de ces équations, la valeur de X_{i+1}.

Enfin les équations (18) s'écrivent

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\xi_0' - Rq_0) Y_1 = (\eta_1' + Rp_1) X_0, \\ &(\xi_0' - Rq_0) Y_2 + (\xi_1' - Rq_1) Y_1 = (\eta_0' + Rp_0) X_2 + (\eta_2' + Rp_2) X_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En dérivant la première de ces équations par rapport à t, nous avons, en remplaçant ξ_0'', η_1'', q_0', p_1' par leurs valeurs tirées de (13), (15) et (16),

$$(\xi_0' - Rq_0) Y_1' = -\frac{Rgp_0 X_0}{k^2 \omega_0}.$$

D'où l'on tire

$$Y_1 = -\int_0^t \frac{Rgp_0 X_0}{k^2 \omega_0 (\xi_0' - Rq_0)} dt.$$

Et finalement

$$Y_1 = -\frac{Rg X_0 p_0^0}{k^2}\int_0^t \frac{dt}{\omega_0(\xi_0' - Rq_0)}. \tag{24}$$

En employant le même procédé avec la deuxième des équations (23), elle nous donne

$$(\xi_0' - Rq_0)Y_2' = -\frac{Rgq_0}{k^2\omega}\left[Y_1 + \frac{(p_1 q_0 - p_0 q_1)X_0}{\omega_0^2}\right],$$

et ainsi de suite. On voit clairement que tous les Y_i peuvent être calculés de proche en proche par des quadratures. Les équations (22) nous donneront les X_i par le calcul algébrique, les équations (15) et (16) nous donneront p_i et q_i par une nouvelle quadrature, enfin les équations (13) nous permettront de calculer ξ_i et η_i par deux quadratures.

Le problème est donc ramené aux seules quadratures.

8. *Première approximation.* — Lorsqu'on néglige le frottement de roulement, on se trouve dans le cas classique et l'on obtient la solution donnée par les équations (20) et (21). Nous voulons tenir compte de ce frottement de roulement, mais nous supposons que son coefficient δ est assez petit pour pouvoir négliger son carré et les puissances supérieures. Nous aurons ainsi pour la première approximation

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + \delta\xi_1, & \eta &= \eta_0 + \delta\eta_1, \\ X &= X_0 + \delta X_1, & Y &= Y_0 + \delta Y_1, \\ p &= p_0 + \delta p_1, & q &= q_0 + \delta q_1. \end{aligned}$$

En se reportant aux résultats précédents nous avons

$$X_1 = 0,$$

$$Y_1 = \frac{5fg^2 p_0^0}{2R^2}\int_0^t \frac{dt}{\omega_0\left(u_0^0 - \frac{7}{2}fgt\right)}.$$

Or

$$\omega_0 = \sqrt{p_0^2 + q_0^2} = \sqrt{b^2t^2 + 2bq_0^0 t + \omega_2^{0\,2}},$$

en posant

$$b = \frac{5fg}{2R}, \qquad \omega_0^0 = p_0^{0\,2} + q_0^{0\,2}.$$

L'intégration faite, on trouve

$$Y_1 = \frac{5}{7}\frac{g}{RA}p_0^0\left\{L\frac{\omega_0 - bt + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} + A}{\omega_0 - bt + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} - A} - L\frac{\omega_0^0 + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} + A}{\omega_0^0 + \frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} - A}\right\}.$$

A étant une constante essentiellement positive, ne dépendant que des conditions initiales du problème et donnée par la formule

$$A = +\sqrt{\left(\frac{5}{7}\frac{u_0^0}{R} + q_0^0\right)^2 + p_0^{0\,2}}.$$

Le calcul effectif de ξ_1, η_1, p_1, q_1, quoique laborieux, ne présente aucune difficulté, mais, en revanche, les expressions obtenues sont tellement compliquées que leur analyse directe ne donne pas d'indications sur l'influence du frottement de roulement sur le mouvement de la sphère. Tâchons de déterminer cette influence directement, sans calcul.

Remarquons d'abord que, d'après (13), $\xi_1'' = 0$ et comme ξ_1 et ξ_1' débutent par zéro,

$$\xi_1 = 0.$$

Ensuite

$$\eta_1'' = Y_1,$$

et comme η_1 et η_1' débutent par zéro, elles sont du signe de Y_1 et si Y_1 conserve son signe, η_1' et η_1 conservent le même signe et croissent en valeur absolue.

Cherchons maintenant le signe de Y_1. La dérivée de la quantité qui est sous le signe de logarithme est du signe de l'expression

$$-(\omega_0' - b)2A = 5A\frac{fg}{R}\left(1 - \frac{q_0}{\omega_0}\right),$$

qui est essentiellement positive.

Par conséquent le logarithme, partant de zéro, reste toujours positif et croît en valeur absolue. Donc Y_1 est du signe de p_0^0 et croît en valeur absolue.

Pour la commodité du langage, choisissons pour origine des axes fixes le point de contact de la sphère avec le plan horizontal pour $t = 0$.

Ceci posé, et en remarquant que

$$(\eta')_0^0 = \eta_0'^0 = -Rp_0^0,$$

nous pouvons dire que pour $p_0^0 > 0$, et en négligeant δ, la trajectoire tout entière est située du côté des η négatifs et pour $p_0^0 < 0$ du côté des η positifs. Mais comme, dans le premier cas, η_1 est positif et, dans le deuxième négatif, nous pouvons affirmer que, dans tous les cas, le frottement de roulement tend à rapprocher la trajectoire de l'axe $O\xi$.

Par conséquent, si la vitesse initiale du centre de la sphère fait un angle aigu avec l'axe $O\xi$ ($\zeta_0'^0 > 0$), le frottement de roulement redresse la trajectoire et, dans le cas contraire, ($\xi_0'^0 < 0$), il la rend plus courbe.