BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FRÉCHET

Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

LE THÉORÈME DE BOREL DANS LA THÉORIE DES ENSEMBLES ABSTRAITS;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Introduction. — Dans la théorie des ensembles linéaires, un théorème fondamental a été énoncé par M. Borel. J'ai étendu dans ma Thèse ce théorème au cas d'ensembles abstraits appartenant à une classe très générale, en modifiant très légèrement le raisonnement de M. Borel.

Une nouvelle modification permet d'étendre le théorème à une classe d'éléments encore plus générale. Et cette fois l'extension obtenue est, à un certain point de vue, définitive. En effet, nous montrons d'abord que le théorème de Borel convenablement énoncé est vrai dans toute classe d'éléments jouissant de la propriété que tout ensemble dérivé y est fermé. Puis, *réciproquement, que toute classe d'éléments à laquelle le théorème de Borel s'étend est nécessairement une classe où tout ensemble dérivé est fermé.*

Dans la seconde Partie de cette Note, je généralise également ce qu'on peut appeler « le théorème de Borel-Lebesgue ». Mais la généralisation est moins étendue. Elle résulte au reste des théorèmes que j'ai démontrés ailleurs et d'une remarque de M. T. Hildebrandt. Mais je l'expose ici directement au moyen de deux lemmes préliminaires seulement; ceux-ci sont évidents quand les ensembles sont linéaires, la démonstration du théorème lui-même ne souffrant aucune complication quand on passe du cas des ensembles linéaires au cas des ensembles abstraits.

Pour éviter d'avoir à renvoyer à ma Thèse, je rappelle explicitement ci-après toutes les définitions qui seront utilisées par la suite :

J'appelle *classe* ($\mathcal{L}$) une classe d'éléments dans laquelle la limite d'une suite d'éléments A_1, A_2, ..., A_n, ... est définie, de façon quelconque d'ailleurs, pourvu que :

1° Si A_1, A_2, ... sont identiques, la suite soit nécessairement convergente et que sa limite soit A_1 ;

2° Toute suite extraite d'une suite convergente soit aussi convergente et vers la même limite.

Un ensemble E est *compact* si, de toute infinité d'éléments appartenant à E, on peut extraire une suite convergente (dont la limite d'ailleurs peut ne pas appartenir à E).

L'ensemble *dérivé* E' d'un ensemble E est l'ensemble de ses éléments limites. L'ensemble E est *fermé* s'il comprend son dérivé E'.

Un élément A est *intérieur* à un ensemble E dans une classe ($\mathcal{L}$) s'il appartient à E et s'il n'est, d'aucune façon, limite d'une suite d'éléments de la classe n'appartenant pas à E.

Nous appellerons *classe* ($\mathcal{S}$) toute classe ($\mathcal{L}$) dans laquelle tous les ensembles dérivés des ensembles d'éléments de cette classe sont fermés.

I. — Théorème de Borel.

Lemme de Hedrick [1]. — Si un élément A intérieur à un ensemble E d'éléments d'une classe ($\mathcal{S}$) est limite d'une suite A_1, A_2, ..., A_n, ... d'éléments de cette classe, les éléments de cette suite sont eux-mêmes intérieurs à l'ensemble E à partir d'un certain rang.

En effet, puisque A est intérieur à E, les éléments de la suite des A_n appartiennent à E à partir d'un certain rang n_0. Si le lemme n'était pas exact, il y aurait une infinité d'éléments A_n de rangs supérieurs à n_0 qui seraient limites d'éléments $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, ..., $A_n^{(p)}$, ... n'appartenant pas à E. Mais la classe d'éléments considérée étant une classe ($\mathcal{S}$), l'ensemble dérivé de l'ensemble des $A_n^{(p)}$ ($n = n_0 + 1$, $n_0 + 2$, ...; $p = 1, 2, \ldots$) est fermé; par suite l'élément A serait limite d'une suite d'éléments $A_n^{(p)}$; ceux-ci n'appartenant pas à E, A ne serait pas intérieur à E contrairement à l'hypothèse.

---

(1) *Transactions of the American Math. Soc.*, vol. XII, 1911, p. 285-294.

Théorème de Borel. — Soit E un ensemble compact et fermé appartenant à une classe ($\mathcal{S}$). Si $\mathcal{F}$ est une famille dénombrable d'ensembles I_n telle que tout élément de E soit intérieur à l'un des I_n, on peut toujours extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}_1$ formée d'un nombre fini des ensembles I_n et telle que tout élément de E est intérieur à l'un des ensembles I_n de la famille $\mathcal{F}_1$.

En effet, si le théorème était inexact, il existerait au moins un élément A_1 de E, qui n'est pas intérieur à I_1. Mais A_1 est intérieur à l'un des ensembles I_2, I_3, ... Soit I_{q_1} le premier à qui A_1 est intérieur ($q_1 > 1$). Il y a au moins un élément A_2 de E qui n'est intérieur à aucun des ensembles $I_1, I_2, \ldots, I_{q_1}$. Mais A_2 est intérieur à l'un au moins des ensembles I, soit I_{q_2}, le premier ($q_2 > q_1$). Et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite infinie d'éléments $A_1, A_2, \ldots$ appartenant à E, tous distincts et tels que A_{r+1} ne soit intérieur à aucun des ensembles $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_{q_r}$. De cette suite, on peut extraire une suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ qui converge vers un élément A de E (puisque E est compact et fermé). Or A est intérieur à un des ensembles I, soit I_k. Et comme il est limite de la suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$, les éléments de cette suite sont, d'après le lemme de Hedrick, intérieurs à I_k à partir d'un certain rang. Or, puisque $q_1 < q_2 < \ldots$, on a pour r assez grand $q_r > k$; dès lors, pour r assez grand, A_{r+1} ne pourrait être intérieur à I_k. On arrive ainsi à la contradiction prévue [1].

Champ d'application du théorème de Borel. — Il est intéressant maintenant de constater que *les deux propriétés d'une classe d'éléments exprimées l'une par le théorème de Borel, l'autre par la proposition d'après laquelle tout ensemble dérivé est fermé, sont entièrement équivalentes.*

En d'autres termes :

Considérons une classe ($\mathcal{L}$) (c'est-à-dire une classe où la limite est définie). Si pour tout ensemble E compact et fermé d'éléments de cette classe, et toute famille dénombrable $\mathcal{F}$ d'ensembles I_n telle

(1) Dans ma Thèse, je n'avais démontré le théorème de Borel que pour des classes (moins générales) où la limite est définie en partant de la notion de distance ou de voisinage.

que chaque élément de E soit intérieur à l'un au moins des ensembles I_n, on peut extraire de F une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini d'ensembles I_n et jouissant de la même propriété que $\mathcal{F}$; alors la classe $(\mathcal{L})$ est en outre une classe $(\mathcal{S})$, c'est-à-dire que les ensembles dérivés y sont tous fermés.

En effet, supposons que le théorème de Borel soit vrai pour une certaine classe $(\mathcal{L})$. Montrons que si F est un ensemble quelconque d'éléments de cette classe, son ensemble dérivé F' est fermé. C'est-à-dire que si une suite d'éléments de F' : $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ converge vers un élément A, A appartient à F'. Or A_n est la limite d'une suite d'éléments de F : $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots, A_n^{(p)}, \ldots$. Appelons I_0 l'ensemble formé par les éléments de la classe autres que les $A_n^{(p)} (n = 1, 2 \ldots, p = 1, 2 \ldots)$ et I_n l'ensemble formé par les éléments de la classe autres que $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$. L'élément A_n appartient à I_n et n'est limite d'aucune suite extraite de la suite d'éléments n'appartenant pas à I_n : A_n est intérieur à I_n. Il appartient à I_0, mais est limite des éléments $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots$ qui n'appartiennent pas à I_0 : A_n n'est pas intérieur à I_0. L'élément A appartient à I_0 ; mais si A n'appartenait pas à F', A ne serait limite d'aucune suite des éléments $A_n^{(p)}$ qui n'appartiennent pas à I_0. Donc A serait intérieur à I_0.

Par suite, on pourrait appliquer le théorème de Borel à l'ensemble E formé par $A, A_1, A_2, \ldots$ (ensemble qui est bien compact et fermé) et à la famille dénombrable $\mathcal{F}$ formée par les ensembles $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$. On pourrait donc remplacer $\mathcal{F}$ par une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini d'ensembles I tirés de $\mathcal{F}$.

Mais, en dehors de $\mathcal{F}_1$, il resterait une infinité d'ensembles I : soient $I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots$. Et alors les éléments $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ ne pourraient être intérieurs à aucun des ensembles I de $\mathcal{F}_1$ contrairement à la définition de $\mathcal{F}_1$.

Réciproque du théorème de Borel. — La réciproque du théorème de Borel s'étend à un champ encore plus vaste que les classes $(\mathcal{S})$.

Soient E un ensemble appartenant à une classe $(\mathcal{L})$ et $\mathcal{F}$ une famille dénombrable d'ensembles I_n telle que tout élément de E est intérieur à l'un des I_n. Si, quelle que soit la famille $\mathcal{F}$, on peut en extraire une famille $\mathcal{F}_1$ composée d'un nombre fini d'ensembles I_n

et jouissant de la même propriété, l'ensemble E est nécessairement compact et fermé.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait extraire de E une suite A_1, A_2, ... qui ne converge (ni elle-même, ni aucune suite extraite d'elle-même) vers aucun élément de E. Alors appelons H l'ensemble des éléments de la classe autres que les éléments de cette suite, puis I_k l'ensemble formé par A_k et par les éléments de H. Tout élément de E est intérieur à l'un des I_k (à I_k si c'est A_k, à tous les I_k s'il appartient à H). Et si l'on forme une famille $\mathcal{F}_1$ au moyen d'un nombre fini d'ensembles I_k, elle ne pourra jouir de la même propriété que $\mathcal{F}$ puisqu'elle ne contiendra même pas tous les A_k.

II. — Théorème de Borel-Lebesgue.

Dans le cas des ensembles linéaires, le théorème de Borel a été généralisé par M. Lebesgue au cas où la famille $\mathcal{F}$ n'est plus supposée dénombrable.

Dans ma thèse, j'avais étendu ce nouveau théorème au cas d'un ensemble abstrait appartenant à une classe ($\mathcal{V}$) normale. Il n'est pas nécessaire de donner ici la définition d'une telle classe, car grâce à une remarque de M. T. Hildebrandt [1], on peut en combinant divers théorèmes de ma thèse laisser de côté la condition que la classe soit normale. Je vais montrer ici comment on peut démontrer directement ce résultat au moyen de deux lemmes préliminaires, — dont l'un est celui de Hedrick.

Auparavant je rappelle ce qu'on appelle classe ($\mathcal{V}$).

Une classe d'éléments est une classe ($\mathcal{V}$) lorsque la limite est définie au moyen du *voisinage* de la façon suivante :

On suppose qu'à tout couple A, B d'éléments de la classe correspond un nombre $(A, B) \geqq 0$, appelé *voisinage* de A et de B, tel que :

1° (A, B) n'est nul que si A, B sont identiques;

2° Si A, B, C sont trois éléments variables quelconques, le voisinage (A, B) est toujours infiniment petit quand (A, C) et (B, C) le sont simultanément.

Et la limite est ainsi définie :

---

(1) *Am. Journal of Mathematics*, april 1914.

3° Si (A, A_n) tend vers zéro quand n croît indéfiniment, la suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ converge vers A et inversement.

Les conditions 1°, 3° montrent qu'une classe $(\mathcal{V})$ est une classe $(\mathcal{L})$. C'est aussi une classe $(\mathcal{S})$. Car si A est limite d'une suite d'éléments $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, de l'ensemble dérivé d'un ensemble E d'éléments d'une classe $(\mathcal{V})$, A_n sera la limite d'une suite d'éléments $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots$ de E. Et alors si l'on prend n puis p assez grands, (A, A_n) et $(A_n, A_n^{(p)})$ seront infiniment petits, donc aussi $(A, A_n^{(p)})$, c'est-à-dire que A appartient aussi à E'.

Ainsi pour une classe $(\mathcal{V})$ le théorème de Borel et sa réciproque s'appliquent. Nous allons démontrer qu'il en est de même de la généralisation de Lebesgue.

Deuxième lemme. — Étant donné un ensemble compact E appartenant à une classe $(\mathcal{V})$, il est possible de former pour chaque valeur du nombre $\varepsilon > 0$ un nombre fini d'ensembles d'éléments de cette classe, soient $K_1, K_2, \ldots, K_q$, tels que le voisinage de deux éléments quelconques appartenant à l'un des ensembles K soit inférieur à ε et que tout élément de E soit intérieur à l'un des ensembles K.

Choisissons d'abord un nombre $\eta > 0$, tel que les conditions $(A, C) < \eta$, $(B, C) < \eta$ entraînent $(A, B) < \varepsilon$. Puis prenons, arbitrairement pour le moment, un nombre $\omega < \eta$.

Soit A_1 un élément quelconque de E. S'il y a un élément de l'ensemble E dont le voisinage avec A_1 soit $\geqq \omega$, appelons-le A_2. S'il y a un élément de E dont les voisinages avec A_1, A_2 soient tous deux $\geqq \omega$, appelons-le A_3. Et ainsi de suite. Nous formons une suite $A_1, A_2, \ldots$ d'éléments de E, tels que le voisinage de deux quelconques d'entre eux est $\geqq \omega$. Mais cette suite est nécessairement finie. Autrement, on pourrait, puisque E est compact, extraire de la suite des A_n une suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots$ convergeant vers un certain élément A. Alors si r et s sont assez grands, (A, A_{n_r}), (A, A_{n_s}) sont infiniment petits, et par suite (A_{n_r}, A_{n_s}) pourrait être inférieur à ω contrairement à l'hypothèse.

Au moyen de la suite finie des A, soit $A_1, A_2, \ldots, A_q$, nous allons former la suite finie d'ensembles $K_1, K_2, \ldots, K_q$, en prenant pour K_p ($p = 1, 2, \ldots, q$) l'ensemble des éléments de la classe dont le voisinage avec A_p est inférieur au nombre η. Alors le voisinage de deux éléments de K_p est $< \varepsilon$, d'après le choix même de η.

D'autre part, tout élément B de E est intérieur à l'un des K_p. En effet, dire que la suite des A_q est finie, c'est dire qu'il n'existe aucun élément de E dont les voisinages avec $A_1, \ldots, A_q$ soient tous $\geqq \omega$. Il existe donc un des A, soit A_p tel que $(B, A_p) < \omega$. Alors B appartient à K_p. De plus, il lui est intérieur, si l'on a soin de prendre ω assez petit, — à savoir tel que les conditions $(M, N) < \omega$, $(N, P) < \omega$ entraînent $(M, P) < \eta$ —. Car, dans le cas contraire, B serait limite d'éléments $C_1, C_2, \ldots$, n'appartenant pas à K_p. Mais, pour r assez grand (B, C_r) serait — comme (A_p, B) — inférieur à ω; et par suite (A_p, C_r) serait inférieur à η contrairement à la définition de K_p.

Dans le cas des ensembles linéaires, le théorème précédent est évident. Tout ensemble linéaire compact étant borné, il suffit de prendre pour les K_p des intervalles de longueur $< \varepsilon$.

Théorème de Borel-Lebesgue. — Soit E un ensemble compact et fermé d'éléments d'une classe $(\mathcal{V})$. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles I d'éléments de cette classe, famille telle que tout élément de E est intérieur à l'un des ensembles I. Alors on peut extraire de $\mathcal{F}$ une famille $\mathcal{F}_1$ jouissant de la même propriété et constituée seulement par un nombre fini d'ensembles I.

En effet, formons les ensembles K_p du lemme précédent. Si le théorème actuel n'était pas exact, il ne le serait pas pour chacune des parties de E contenues dans $K_1, K_2, \ldots, K_q$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{p}$, appelons T_p un des ensembles $K_1, \ldots, K_q$ dont les éléments appartenant à E ne sont pas intérieurs à un nombre fini d'ensembles I.

Soit A_p l'un des éléments de E appartenant à T_p. Puisque E est compact et fermé, on peut extraire de la suite $A_1, A_2, \ldots$ une suite $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ qui converge vers un élément A de E. Par hypothèse, A est intérieur à un certain I′ des ensembles I. Si l'on démontre que pour une valeur assez grande de i, T_{p_i} a tous ses éléments intérieurs à I′, contrairement à la définition des T_p, on sera arrivé à la contradiction annoncée. Or, dans le cas contraire, il y aurait une infinité de valeurs de i : $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$ telles que dans

$T_{p_{i_r}}$ par exemple il y ait un élément C_r non intérieur à I'. Mais $(A, A_{p_{i_r}})$ tend vers zéro, $(A_{p_{i_r}}, C_r)$ est par hypothèse inférieur à $\frac{1}{p_{i_r}}$. Donc (A, C_r) tend aussi vers zéro. Et alors A étant intérieur à I'; d'après le premier lemme, la suite C_r qui converge vers A aurait ses termes intérieurs à A à partir d'un certain rang contrairement à l'hypothèse.

Remarque. — Il serait intéressant de déterminer — comme nous l'avons fait pour le théorème de Borel — quelle est la classe la plus générale où l'on peut énoncer le théorème de Borel-Lebesgue. Une telle classe est au moins une classe ($\mathcal{S}$), mais elle n'est pas nécessairement une classe ($\mathcal{V}$), comme on en peut facilement fournir des exemples.