BULLETIN DE LA S. M. F.

CH. DE LA VALLÉE POUSSIN

Sur les expressions qui s'écartent le moins de zéro dans un intervalle

Bulletin de la S. M. F., tome 45 (1917), p. 53-56
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__53_1>

SUR LES EXPRESSIONS QUI S'ÉCARTENT LE MOINS DE ZÈRO DANS UN INTERVALLE;

PAR M. DE LA VALLÉE POUSSIN.

Considérons une suite de $n+1$ puissances x^{α_0}, x^{α_1}, ..., x^{α_n} dont les exposants sont des nombres positifs donnés

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$$

dont le premier peut être nul. Donnons-nous le coefficient A_k de l'une des puissances précédentes ($A_k \neq 0$). Désignons par $P(x)$ l'expression (réelle)

$$(1) \qquad P(x) = a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + \ldots + A_k x^{\alpha_k} + \ldots + a_n x^{\alpha_n},$$

contenant le terme assigné $A_k x^{\alpha_k}$, qui peut être le premier sous la condition de ne pas se réduire à une constante ($\alpha_k \neq 0$), et où les coefficients non donnés a sont choisis de manière que P s'écarte le moins possible de zéro dans l'intervalle (0, 1). Le polynome P, qui est déterminé ainsi d'une manière univoque, est le *polynome d'approximation* de zéro relatif à la suite des exposants α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et au coefficient A_k. Le maximum L de $|P|$ est l'*écart* correspondant et cet écart est atteint $n+1$ fois avec alternance de signes dans l'intervalle (0, 1). Ces conclusions exigent une condition que nous supposerons réalisée : le terme assigné dans P ne se réduit pas à une constante; il diffère donc du premier si $\alpha_0 = 0$ (1).

On conçoit que laissant invariable le terme $A_k x^{\alpha_k}$, on modifie les autres exposants de la suite. Alors le polynome d'approximation change et l'écart correspondant varie. Les théorèmes suivants précisent le sens de cette variation :

Théorème. — *Si l'on majore un exposant $\alpha_i > \alpha_k$, l'écart augmente* (2).

Nous désignerons par $\beta > \alpha_i$ la nouvelle valeur de α_i, par Q le nouveau polynome d'approximation, et par M l'écart correspondant. Il faut prouver que M est supérieur à L.

On sait qu'une expression à $n+1$ termes de la forme (1) admet au plus n racines positives, et que le nombre de ces racines ne peut surpasser celui des variations de signes des coefficients (3).

Considérons le polynome initial d'approximation

$$P = a_0 x^{\alpha_0} + \ldots + A_k x^{\alpha_k} + \ldots + a_i x^{\alpha_i} + \ldots .$$

Il admet exactement n racines *positives* dans l'intervalle (0, 1) puisqu'il atteint l'écart L avec alternance de signes en $n+1$ points consécutifs de cet intervalle. Ses coefficients sont donc différents de zéro et de signes alternés. Si, pour fixer les idées, nous suppo-

---

(1) *Voir* S. Bernstein, *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues* (Ac. des Sc. de Belgique : *Mémoires*, in-4°, 2e série, t. IV, 1912).

(2) M. Bernstein a démontré ce théorème par un raisonnement plus détourné dans le cas particulier où l'on assigne x comme premier terme de P (*Mémoire cité*, théorème 36).

(3) *Mémoire cité*, lemme 27.

sons $A_k > 0$, nous voyons que le signe du premier coefficient a_0 est celui de $(-1)^k A_k$, donc $(-1)^k$.

Considérons maintenant le nouveau polynome

$$Q = b_0 x^{\alpha_0} + \ldots + A_k x^{\alpha_k} + \ldots + b x^\beta + \ldots;$$

le signe de b_0 sera le même que celui de a_0 pour la même raison.

Formons la différence ($\beta > \alpha_i$, par hypothèse)

$$P - Q = (a_0 - b_0) x^{\alpha_0} + \ldots + a_i x^{\alpha_i} - b x^\beta + \ldots;$$

le terme en x^{α_k} en a disparu.

Je vais d'abord prouver que M est $\gtreqless$ L. A cet effet, je supposerai les écarts inégaux et j'en conclurai $M > L$.

Le polynome $P - Q$ a $n + 1$ termes comme P (un terme en x^β remplace celui en x^{α_k}); donc $P - Q$ a n racines positives au plus. Je dis qu'il en a n exactement. Soient, en effet, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les $n + 1$ points où le plus grand des deux écarts est atteint par le polynome correspondant; $P - Q$ change de signe et admet une racine positive dans chaque intervalle de ces points et il n'y en a pas d'autre.

Il suit de là que les coefficients de $P - Q$ sont différents de zéro et de signes alternés. Les deux polynomes P et $P - Q$ ont un terme commun $a_i x^{\alpha_i}$; mais, avant lui, il y a un terme $(A_k x^{\alpha_k})$ en plus dans P que dans $P - Q$. Donc les premiers termes de P et de $P - Q$ sont de signes contraires, et le signe du premier terme de $P - Q$ est $(-1)^{k+1}$.

Ce signe est celui de $P - Q$ pour x infiniment petit, donc aussi au point x_0, car (au cas où $x_0 \neq 0$) il n'y a pas de racine entre 0 et x_0. Il vient donc

$$\text{signe}[P(x_0) - Q(x_0)] = \text{signe}(-1)^{k+1}.$$

Ceci exige $M > L$, car, si $M < L$, x_0 serait le premier point où P atteint l'écart L, donc avec le signe initial $(-1)^k$ qui est celui de a_0. Ce signe serait celui du premier membre de l'équation précédente, car $|Q|$ est $< L$; donc les deux membres de cette relation seraient de signes contraires.

Je vais maintenant, pour achever la démonstration, prouver que les deux écarts M et L ne peuvent pas être égaux.

Supposons, par impossible, $M = L$. D'après ce qu'on vient de démontrer, cette égalité subsistera si l'on donne à β une suite de valeurs décroissantes tendant vers α_0. Dans ce cas, Q tend vers P (sinon P ne serait pas unique) (1). Supposons β infiniment voisin de α_0; les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ où P atteint l'écart et ceux $y_0, y_1, \ldots, y_n$ où Q atteint le même écart respectivement avec le même signe seront deux à deux infiniment voisins (ou confondus). Alors $P - Q$ a une racine dans chaque intervalle x_i, y_i (ou confondue avec ces deux points), cela fait $n - 1$ racines.

C'est impossible si $\alpha_0 > 0$, car alors x_0, y_0 et ces $n + 1$ racines seraient positives. C'est encore impossible si x_0, y_0 et la première racine sont nuls (ce qui exige $\alpha_0 = 0$), car cela entraîne $a_0 = b_0 = \pm L$, de sorte que $P - Q$ perd son premier terme et ne peut plus avoir que $n - 1$ racines positives : la contradiction subsiste.

Théorème. — *Si l'on remplace un exposant $\alpha_i < \alpha_k$ par un autre plus petit β, l'écart augmente.*

Dans ce cas, on a

$$P - Q = (a_0 - b_0)x^{\alpha_0} + \ldots - bx^{\beta} + \ldots + a_i x^{\alpha_i} + \ldots.$$

Le terme $a_i x^{\alpha_i}$, commun à P et à $P - Q$ est précédé d'un terme de plus (en x^{β}) dans $P - Q$ que dans P. Les premiers termes de P et de $P - Q$ sont donc de signes contraires et la démonstration se fait comme dans le cas précédent.

On est ainsi conduit à la conclusion suivante :

Théorème. — *Si l'on considère le polynome d'approximation de zéro relatif à la suite des exposants $\alpha_0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_n$ et contenant le terme assigné $A_k x^{\alpha_k}$, l'écart dépend du choix des autres exposants, mais il augmente si l'on fait croître les exposants plus grands que α_k et décroître ceux qui sont plus petits.*

(1) De la suite des Q, on pourrait extraire une suite convergeant vers $P' \neq P$.