BULLETIN DE LA S. M. F.

E. BOREL

# Sur la répartition probable et les fluctuations des distances mutuelles d'un nombre fini de points, droites et plans

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 46 (1918), p. 105-120

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__105_1>

## SUR LA RÉPARTITION PROBABLE ET LES FLUCTUATIONS DES DISTANCES MUTUELLES D'UN NOMBRE FINI DE POINTS, DROITES ET PLANS;

PAR M. ÉMILE BOREL.

1. *Remarques préliminaires.* — Avant d'aborder les problèmes de probabilités continues qui font l'objet de cette Note, nous exposerons quelques remarques qui s'appliquent à tous les problèmes de probabilité et, pour plus de netteté, nous prendrons comme exemple des problèmes de probabilités discontinues.

Considérons les 1000 nombres de 3 chiffres compris entre 000 et 999; soit 000, 001, etc. Les 1000 nombres ainsi écrits comprennent 3000 chiffres, parmi lesquels 300 chiffres 7; il y a, sur les 1000 nombres, 243 renfermant 1 chiffre 7; 27 renfermant 2 chiffres 7; 1 renfermant 3 chiffres 7, en tout 271 nombres renfermant au moins 1 chiffre 7 et 729 n'en renfermant aucun. Ceci posé, nous allons étudier le problème suivant : « Un nombre de

3 chiffres est tel qu'*on sait* qu'il renferme au moins 1 chiffre 7; quelle est la probabilité pour qu'il en renferme précisément 1, ou 2, ou 3. » L'énoncé peut être compris de deux manières, auxquelles correspondent deux solutions différentes A et B.

A. Le nombre a été choisi au hasard parmi les 271 nombres qui renferment au moins un 7. Les probabilités demandées sont alors :

$$\frac{243}{271} = 0,89668;$$

$$\frac{27}{271} = 0,09963;$$

$$\frac{1}{271} = 0.00369.$$

L'espérance mathématique du joueur qui toucherait $1^{fr}$ pour chaque chiffre 7 serait

$$\frac{300}{271} = 1,107.$$

B. On a choisi au hasard un des 300 chiffres 7 qui se trouvent parmi les 3000 chiffres des 1000 nombres et le nombre choisi est celui auquel appartient ce chiffre 7. En ce cas les deux chiffres inconnus forment un nombre *quelconque* de deux chiffres compris entre 00 et 99; parmi ces 100 nombres, 81 ne renferment aucun 7, 18 en renferment un, 1 en renferme deux ; les probabilités sont donc

| | | |
|---|---|---|
| 0,81 | au lieu de | 0,89668 ; |
| 0,18 | » | 0,09963; |
| 0,01 | » | 0,00369, |

et l'espérance mathématique du joueur qui reçoit $1^{fr}$ par chiffre 7 est

1,2 au lieu de 1,107.

On voit que la différence essentielle entre A et B est la suivante : dans A, le fait d'avoir un chiffre 7 diminue les chances pour que les autres chiffres soient des 7; dans B ces chances sont intégralement conservées.

La distinction entre ces deux points de vue est parfois assez subtile; mais, faute de la saisir, on est exposé à des erreurs dans les évaluations des probabilités.

Considérons, par exemple, le nombre décimal égal à $\sqrt{2}$; dans l'état actuel de la science, nous ne connaissons aucune loi pour les chiffres décimaux successifs; de sorte que, si un chiffre nous est inconnu, nous devons regarder la probabilité pour qu'il soit un 7 comme égale à 0,1. Considérons les chiffres dont le rang après la virgule sont égaux à 1000001, 1000002, etc., jusqu'à 1000100. Ces 100 chiffres nous sont entièrement inconnus; nous devons donc considérer que, pour chacun d'eux, la probabilité pour qu'il soit un 7 est 0,1; le nombre probable des chiffres 7 parmi ces 100 chiffres est 10.

Si un mathématicien, par une méthode nouvelle et inconnue dont il a gardé le secret, calcule ces 100 chiffres et garde secret le résultat de son calcul, deux joueurs pourront engager des paris sur la valeur de ces chiffres et le prendre comme arbitre; le jeu sera équitable si l'un d'eux verse 1fr en pariant que le 54e de ces chiffres, par exemple, est un 7 et reçoit 10fr dans le cas où il aura deviné juste. Comme les probabilités relatives aux divers chiffres sont indépendantes, le joueur, après avoir gagné ou perdu son pari sur le 54e chiffre, pourra parier dans les mêmes conditions pour le 63e, ou pour le 26e, et ainsi de suite, s'il lui convient, jusqu'à ce qu'il ait épuisé les 100 chiffres. Nons nous trouvons ici dans l'hypothèse B. Voici ce qui correspond à l'hypothèse A. Admettons que le mathématicien qui possède les valeurs des 100 chiffres ait inscrit sur un carnet les numéros d'ordre des chiffres qui sont des 7; par exemple 27e, 35e, 43e, 58e, etc., et qu'un joueur indiscret ayant jeté les yeux sur ce carnet ait ainsi appris que le 43e chiffre est un 7. Il va de soi que s'il parie pour ce 43e chiffre, sa probabilité 0,1 de gagner devient la certitude (probabilité 1); mais s'il parie pour un autre rang, par exemple pour le 42e ou le 53e, sa probabilité de gagner se trouve diminuée et n'est plus que de

$$\frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

au lieu d'être

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}.$$

Cette affirmation peut paraître paradoxale, car au premier abord on ne voit pas bien la différence qu'il y a entre apprendre que le

43e chiffre est un 7 au moyen du carnet indiscrètement consulté, ou de l'apprendre en pariant qu'il en est ainsi et en gagnant son pari; or, dans ce cas nous avons affirmé que le gain d'un pari ne modifiait en rien les probabilités pour les autres paris. La différence est la suivante : lorsque le joueur indiscret a consulté le carnet, il a pu, par hypothèse, connaître le rang de l'un des chiffres 7 qui se trouvent parmi les 100 chiffres considérés; si donc un rang, tel que le 68e, n'a pas été vu par lui, cela diminue la probabilité pour que ce soit le rang d'un chiffre 7. A un autre point de vue, on peut observer que si l'on néglige (1) l'hypothèse très peu probable où il n'y aurait *aucun* chiffre 7, le fait d'apprendre le rang d'un des chiffres 7 qui existent n'augmente pas le nombre total probable de ces chiffres 7 ; si, au contraire, un joueur non prévenu parie que le 43e chiffre est un 7 et gagne son pari, il est en droit de penser que sur les 99 chiffres restants, la proportion des 7 est encore $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire le nombre probable de 7 égal à 9,9, le nombre probable total étant dès lors 10,9 au lieu de 10.

2. *La répartition des points sur un segment de droite.* — Nous dirons que $n$ points sont distribués au hasard sur un segment de longueur $l$ si la probabilité pour chacun d'eux de se trouver sur un élément $dx$ est égale à $\frac{dx}{l}$. Étudier les propriétés d'une telle distribution revient à étudier statistiquement les propriétés des $A^n$ distributions que l'on obtiendrait en divisant $l$ en A parties égales et en plaçant de toutes les manières possibles les $n$ points chacun dans une de ces portions, A étant supposé un nombre suffisamment grand pour que deux positions intérieures à une même portion $\frac{l}{A}$ soient regardées comme indiscernables. Il est souvent plus commode de parler le langage de la probabilité

(1) Comme nous l'avons fait d'ailleurs en évaluant la probabilité $\frac{1}{11}$. Notre raisonnement est, en effet, le suivant : l'espérance mathématique d'un joueur qui mise 1fr sur chacun des 100 rangs et qui reçoit 10fr pour chacun des chiffres 7 est précisément égale à 100. Or, le joueur indiscret payera 10fr sans risques de perte le pari fait sur le 43e chiffre; son espérance mathématique est donc 90fr pour les 99 autres paris; la probabilité est donc bien le quotient de 9 par 99.

que celui de la statistique, mais on ne doit jamais perdre de vue que la statistique est le seul fondement concret du langage des probabilités et que l'on doit y recourir dans tous les cas litigieux (¹).

Au lieu de considérer $n$ points sur un segment $l$, on peut admettre qu'il y a *en moyenne* $n$ points sur le segment $l$. Cela signifie que $h$ étant très grand, il y a $hn$ points sur un segment $hl$ qui comprend le segment considéré; le cas limite $h = \infty$ donne les formules les plus simples. Les probabilités pour que les nombres des points situés sur le segment $l$ soient respectivement égaux à 0, 1, 2, ... sont les termes successifs de la série (²).

$$e^{-n}\left[1+\frac{n}{1}+\frac{n^2}{2!}+\ldots+\frac{n^p}{p!}+\ldots\right],$$

c'est-à-dire que la probabilité pour qu'il y ait précisément $p$ points est

$$P(p) = e^{-n}\frac{n^p}{p!}.$$

Le nombre moyen des points est, par définition,

$$\Sigma p\, P(p) = n.$$

On retrouve $n$, comme cela devait être. Mais le carré moyen du nombre des points n'est pas $n^2$; car on a

$$\Sigma p^2\, P(p) = \Sigma p(p-1)\, P(p) + \Sigma p\, P(p) = n^2 + n.$$

De même, le nombre des segments dont deux points sont des extrémités et situés sur $l$ est égal à $\frac{p(p-1)}{2}$ dans le cas où il y a $p$ points; le nombre moyen est donc

$$\sum \frac{p(p-1)}{2} P(p) = \frac{n^2}{2}.$$

(¹) Nous laissons ici de côté la difficulté suivante, en nous contentant de la signaler : les définitions statistiques que l'on obtient par deux modes de division différents (par exemple en $2^n$ ou en $3^n$ parties égales, $n$ croissant indéfiniment) *sont-elles équivalentes* ? Cette difficulté est particulièrement intéressante à étudier dans un domaine, tel que la surface de la sphère, où il n'est pas possible de considérer des divisions régulières.

(²) *Voir* Émile Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, Note V.

Ce nombre est donc légèrement supérieur à $\frac{n(n-1)}{2}$. On peut obtenir ce résultat par un raisonnement direct : si l'on a $hn$ points sur un segment $hl$, le nombre des segments formés par ces points pris deux à deux est

$$N = \frac{hn(hn-1)}{2}.$$

Pour qu'un de ces N segments soit tout entier sur le segment $l$ considéré, il faut et il suffit que chacune de ses extrémités y soit; la probabilité est $\frac{1}{h}$ pour chacune d'elles et $\frac{1}{h^2}$ pour les deux (ces probabilités sont indépendantes); le nombre probable des segments est donc

$$\frac{N}{h^2} = \frac{1}{2}n\left(n+\frac{1}{h}\right).$$

Dans le cas limite où $h$ est $\infty$, on retrouve bien $\frac{n^2}{2}$.

3. *Les fluctuations de la répartition des points sur un segment de droite.* — Nous avons vu que si un segment $l$ renferme en moyenne $n$ points, ce qui correspond à une densité moyenne $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{n}{l},$$

la probabilité pour qu'il en renferme $p$ est

$$P(p) = e^{-n}\frac{n^p}{p!}.$$

La moyenne de la valeur absolue de l'écart entre le nombre moyen $n$ et le nombre réel $p$ est

$$\sum_{p=0}^{\infty} |n-p|\, P(p).$$

Pour évaluer cette somme, nous la décomposerons. On a d'abord :

$$\sum_{p=0}^{p=n} (n-p)\, P(p) = n\sum_{p=0}^{p=n} P(p) - \sum_{p=0}^{p=n-1} n\, P(p),$$

car

$$p\, P(p) = n\, P(p-1).$$

On a donc

$$\sum_{p=0}^{p=n}(n-p)\,\mathrm{P}(p) = n\,\mathrm{P}(n).$$

On trouverait de même

$$\sum_{p=n+1}^{\infty}(p-n)\,\mathrm{P}(p) = n\,\mathrm{P}(n).$$

La valeur moyenne des valeurs absolues des écarts est donc

$$2n\,\mathrm{P}(n) = 2n\frac{n^n}{n!}e^{-n}.$$

Or la formule de Stirling donne

$$\frac{n^n}{n!}e^{-n} = \frac{1+\varepsilon_n}{\sqrt{2\pi n}},$$

le nombre $\varepsilon_n$ tendant vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment; la valeur moyenne des valeurs absolues des écarts est donc

$$\mathrm{M}(|n-p|) = \frac{2n}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

On trouverait par un calcul analogue que la moyenne des carrés des écarts est $n$

$$\mathrm{M}(n-p)^2 = n.$$

La densité moyenne est $\sigma$; la densité vraie est $\sigma_1$ :

$$\sigma_1 = \frac{p}{l}.$$

La fluctuation moyenne de la densité $\mathrm{M}(|\sigma_1-\sigma|)$ peut se calculer en fonction de $\sigma$ et de $l$

$$\mathrm{M}(|\sigma_1-\sigma|) = \frac{\mathrm{M}(|n-p|)}{l} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2l\sigma}{\pi}} = \sqrt{\frac{2\sigma}{l\pi}}.$$

La valeur de la fluctuation peut se déduire des résultats connus de la théorie des probabilités continues. On sait que sur N épreuves, la probabilité de l'événement favorable étant $p$ et la probabilité de l'événement contraire $q = 1 - p$, l'unité d'écart $\lambda$

est donnée par la formule [1]

$$\lambda = \sqrt{2Npq}$$

et l'écart moyen est

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}.$$

Ici, on doit supposer que N augmentant indéfiniment $p$ tend vers zéro de telle manière que le produit $Np$ soit égal à $n$. On a donc $q = 1$ et

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

4. *Les distances mutuelles des points répartis au hasard sur un segment.* — Si un segment de longueur $l$ renferme $n$ points, le nombre des distances mutuelles de ces points deux à deux est $\frac{n(n-1)}{2}$; si ce même segment renferme *en moyenne* $n$ points, le nombre moyen des distances mutuelles est, comme nous l'avons vu, $\frac{n^2}{2}$.

Parmi ces distances, combien y en a-t-il qui sont inférieures à une longueur donnée $\varepsilon$?

Posons

$$\varepsilon = kl.$$

La probabilité pour que la distance des deux points compris sur le segment $l$ soit inférieure à $kl$ est

$$2k - k^2 = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}.$$

Le nombre probable des distances inférieures à $\varepsilon$ est donc, suivant que l'on suppose qu'il y a précisément $n$ points ou qu'il y a en moyenne $n$ points,

$$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right)$$

$$\frac{n^2}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

(1) *Voir* BOREL, *Éléments de la théorie des probabilités.*

J'omets les formules que l'on obtiendrait en recherchant le nombre des distances comprises entre $\varepsilon$ et $\varepsilon + d\varepsilon$, ou entre $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ et aussi les formules où l'on introduirait au lieu de $n$ la densité $\sigma$ définie par $n = l\sigma$.

On pourrait objecter à la démonstration précédente qu'elle suppose que les distances sont indépendantes, hypothèse non exacte. En réalité, cette objection n'est pas fondée : si nous appelons les $n$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, un joueur peut parier que la distance $A_iA_j$ est inférieure à $\varepsilon$ ; s'il doit payer $2k - k^2$ pour recevoir 1 en cas de gain, il joue un jeu équitable. Si $\frac{n(n-1)}{2}$ joueurs font un pari analogue pour chacune des $\frac{n(n-1)}{2}$ distances, chacun d'eux joue un jeu équitable. Un seul parieur peut se substituer à eux sans que le jeu cesse d'être équitable : la dépendance mutuelle des distances ne joue pas de rôle.

On peut d'ailleurs arriver au même résultat par un raisonnement direct. Plaçons-nous dans le cas où il y a précisément $n$ points et désignons-les par $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Plaçons le point $A_1$ et entourons-le d'un intervalle de dimensions $2\varepsilon$ dont ce point est le milieu. Si la distance du point $A_1$ aux extrémités du segment $l$ est inférieure à $\varepsilon$, ce segment $2\varepsilon$ sera tout entier à l'intérieur de $l$ ; sinon, une portion seulement sera intérieure à $l$ ; cette portion, que nous appellerons *la portion utile*, a pour longueur probable

$$2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}.$$

Ceci veut dire que si l'on considère un grand nombre de segments identiques sur lesquels $A_1$ occupe successivement toutes les positions possibles, telle est la longueur moyenne des portions utiles.

Plaçons maintenant le point $A_2$ : s'il tombe dans la portion utile du segment qui entoure $A_1$, la longueur $A_1A_2$ sera inférieure à $\varepsilon$ ; la probabilité pour qu'il en soit ainsi est

$$\frac{1}{l}\left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}\right) = \frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}.$$

Quoi qu'il en soit, entourons de même $A_2$ d'un segment $2\varepsilon$ dont la portion utile aura la même longueur probable. La somme des deux portions utiles est

$$2\left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}\right).$$

Il peut arriver qu'elles empiètent l'une sur l'autre; mais si l'on place le point $A_3$, l'espérance mathématique du joueur qui recevrait autant d'unités de valeur qu'il y a de segments auxquels appartient $A_3$ est

$$\frac{2}{l}\left(2\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{l}\right) = 2\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

On verrait de même que l'espérance mathématique lorsque l'on place $A_4$ est

$$3\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right)$$

et, lorsque l'on place $A_n$,

$$(n-1)\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

L'espérance mathématique totale, ou le nombre probable des segments $A_iA_j$ inférieurs à $\varepsilon$ est donc

$$\left[1+2+3+\ldots+(n+1)\right]\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right) = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{l} - \frac{\varepsilon^2}{l^2}\right).$$

On retrouve donc le même résultat.

Dans le cas où il y aurait *en moyenne* $n$ points, il suffirait de faire le même calcul pour chaque valeur $p$ et de prendre la moyenne comme au paragraphe 3.

Lorsqu'on donne la densité $\sigma$, sans fixer la longueur $l$ du segment, on peut raisonner d'une manière un peu différente. Cherchons la densité des points A qui sont des extrémités de segments de longueur inférieure à $\varepsilon$. Dans une région donnée, la densité des points A est $\sigma$; c'est le nombre des points A par unité de longueur. Si A est un des points, la densité dans l'intervalle $2\varepsilon$ dont le milieu est A est encore $\sigma$, c'est-à-dire que le nombre moyen [1] des $A'$ est $2\varepsilon\sigma$; la densité des extrémités des

---

[1] On voit ici la différence entre l'hypothèse A et l'hypothèse B du paragraphe 1. Lorsqu'on supposait $n$ points dans le segment $l$ et que l'on fixait l'un d'eux, il n'en restait plus que $n-1$. Ici on part, non d'un segment $2\varepsilon$ fixé indépendamment des A, mais d'un A déterminé; il y a donc $2\varepsilon\sigma$ points A′ et non $2\varepsilon\sigma - 1$.

segments tels que AA' est donc $2\varepsilon\sigma^2$; comme chaque segment a deux extrémités, la densité des segments est $\varepsilon\sigma^2$.

Si l'on prend $\varepsilon = l$, on trouve $l\sigma^2$, comme densité et $l^2\sigma^2$ comme nombre de segments inférieurs à $l$ sur le segment $l$; or $l\sigma = n$, on en trouve donc $n^2$; le nombre moyen des segments intérieurs au segment $l$ est $\frac{n^2}{2}$; les autres segments sont des segments qui chevauchent sur deux segments consécutifs de longueur $l$; ceux qui n'ont qu'une extrémité sur le segment $l$ considéré comptent pour $\frac{1}{2}$.

En d'autres termes, il y a, sur un segment de longueur $l$, $2n^2$ extrémités de segments inférieurs ou égaux à $l$, à savoir $n^2$ extrémités correspondant aux $\frac{n^2}{2}$ segments intérieurs au segment donné et $n^2$ extrémités appartenant à des segments qui chevauchent sur ce segment et l'un des deux segments contigus.

On voit que l'on obtient exactement *la moitié* du nombre des segments inférieurs à $l$ renfermés sur un segment $Ml$, M étant un entier quelconque, en divisant ce segment $Ml$ en M segments $l$ et en partant de cette remarque simple que tous les segments dont les deux extrémités sont intérieures à un même segment $l$ ont une longueur au plus égale à $l$.

Cette remarque nous conduira de la manière la plus simple au calcul des fluctuations que nous allons aborder.

5. *Fluctuations des distances mutuelles de points en nombre fini sur une droite.* — Considérons des points répartis avec une densité $\sigma$ sur une droite; la densité moyenne des segments de longueur inférieure ou égale à $l$ est $\sigma^2 l$; quelles sont les fluctuations de cette densité? Pour nous en rendre compte, divisons la droite en segments fixes de longueur $l$; ils renferment en moyenne $n = \sigma l$ points et en réalité $p$ points avec une probabilité $P(p)$; sur chacun d'eux se trouvent $\frac{p(p-1)}{2}$ segments de longueur inférieure à $l$ au lieu de $\frac{n^2}{2}$, nombre moyen; la fluctuation moyenne est donc

$$\sum_0^\infty P(p)\left|\frac{p(p-1)}{2} - \frac{n^2}{2}\right|.$$

Cette somme se calcule aisément; car on a

$$p(p-1)\,P(p) = n^2\,P(p-2)$$

et par suite

$$\sum_{0}^{n} P(p)\left[\frac{n^2}{2} - \frac{p(p-1)}{2}\right] = \frac{n^2}{2}[P(n) + P(n-1)]$$

De même

$$\sum_{n+1}^{\infty} P(p)\left[\frac{p(p-1)}{2} - \frac{n^2}{2}\right] = \frac{n^2}{2}[P(n) + P(n-1)].$$

Or

$$P(n) = P(n-1) = \frac{n^n}{n!}e^{-n}.$$

La fluctuation moyenne est donc en définitive

$$2n^2\frac{n^n}{n!}e^{-n} = \frac{2n^2}{\sqrt{2\pi n}}(1+\varepsilon_n),$$

ce qui peut s'écrire aussi :

$$\sqrt{2n}\sqrt{\frac{n^2}{\pi}}.$$

D'après le calcul déjà fait pour les fluctuations du nombre des points, si les distances inférieures à $l$ étaient indépendantes les unes des autres et réparties au hasard de telle manière qu'il y en eût en moyenne $N = \frac{n^2}{2}$ sur un segment $l$, les fluctuations moyennes de ce nombre N seraient

$$\sqrt{\frac{2N}{\pi}} = \sqrt{\frac{n^2}{\pi}}.$$

On voit que la fluctuation est multipliée par le facteur $\sqrt{2n}$ *du fait que les distances ne sont plus indépendantes;* s'il y a une accumulation fortuite de points dans une région, les distances inférieures à l'étendue de la région augmentent comme le carré du nombre de points accumulés.

J'omettrai le calcul direct un peu plus compliqué des fluctuations des distances inférieures à $l$ qui chevauchent sur deux segments fixes contigus de dimensions $l$; ce calcul revient à celui de la somme

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} P(p)P(q)|pq-n^2|.$$

On obtient une approximation largement suffisante par notre remarque d'après laquelle la moitié du nombre total des segments inférieurs à $l$ est obtenue en prenant les segments intérieurs aux segments fixes de longueur $l$; dans deux segments fixes distincts, les positions sont indépendantes, et par suite, suivant la règle classique, la fluctuation se multiplie par la racine carrée du nombre des segments.

En résumé, si N est le nombre moyen des segments inférieurs à $l$ dans une étendue quelconque, la fluctuation moyenne de ce nombre N est, non pas

$$\varphi = \sqrt{\frac{2N}{\pi}},$$

comme il résulterait des théories générales dans le cas où ces distances seraient indépendantes, mais

$$\varphi\sqrt{2n},$$

$n$ étant le nombre moyen de points sur le segment $l$; $n = l\sigma$; la fluctuation peut donc s'écrire également

$$\varphi\sqrt{2l\sigma}.$$

6. *Les points dans le plan ou dans l'espace.* — Les détails dans lesquels nous sommes entrés dans le cas linéaire nous permettront d'être très brefs dans le cas des points répartis au hasard dans une région donnée de forme quelconque du plan ou de l'espace. La densité $\sigma$ est ici le nombre moyen des points par unité de surface ou de volume. Dans une surface S ou un volume V, le nombre moyen des points est $n = \sigma S$ ou $\sigma V$ et le nombre réel est $p$ avec la probabilité $P(p)$.

7. *Les distances mutuelles des points dans le plan ou dans l'espace.* — Le calcul du nombre moyen des distances mutuelles inférieures à un nombre donné $l$ est tout à fait analogue au calcul fait dans le plan.

Dans une aire (un volume) égale à l'unité il y a $\sigma$ points; chacun d'eux peut être regardé comme le centre d'un cercle (d'une sphère) de rayon $l$, la surface totale (le volume total) de ces cercles (sphères) est $\sigma\pi l^2$ $\left(\frac{4}{3}\sigma\pi l^3\right)$ et le nombre moyen des points intérieurs est $\sigma^2\pi l^2$ $\left(\frac{4}{3}\sigma^2\pi l^3\right)$; telle est la densité des *extrémités* de segments de dimensions $\leqq l$; chaque segment ayant deux extrémités, la densité moyenne des segments eux-mêmes est, dans le plan,

$$\frac{\sigma^2\pi l^2}{2}$$

et, dans l'espace,

$$\frac{2}{3}\sigma^2\pi l^3.$$

Dans un cercle (une sphère) de *diamètre* $l$, le nombre moyen des *extrémités* des segments s'obtient en multipliant la densité par la surface (le volume), c'est-à-dire par

$$\frac{\pi l^2}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi l^3}{6},$$

ce qui donne

$$\frac{\sigma^2\pi^2 l^4}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{2\sigma^2\pi^2 l^6}{9}.$$

Or le nombre $n$ des points intérieurs au cercle (à la sphère) de diamètre $l$ est, en moyenne,

$$n = \sigma\frac{\pi l^2}{4}, \qquad n = \sigma\frac{\pi l^3}{6},$$

et le nombre moyen des segments obtenus en joignant ces $n$ points deux à deux est $\frac{n^2}{2}$, le nombre des extrémités étant $n^2$, c'est-à-dire

$$\sigma^2\frac{\pi^2 l^4}{16} \quad \text{et} \quad \sigma^2\frac{\pi^2 l^6}{36}.$$

On voit que les nombres ainsi obtenus sont dans le plan le quart et dans l'espace le huitième du nombre moyen total des extrémités; le procédé qui donnait la moitié du nombre des segments inférieurs à $l$ sur la droite en donne $\frac{1}{4}$ dans le plan et $\frac{1}{8}$ dans l'espace. Le calcul des fluctuations se ferait d'une manière analogue.

Pour une aire (un volume) de forme quelconque, le calcul du nombre moyen des segments intérieurs de dimensions inférieures à $l$ est un problème de calcul intégral qui peut être assez compliqué; je me contenterai de reproduire ici les résultats qui m'ont paru les plus simples et les plus intéressants parmi ceux que j'ai calculés.

Probabilité pour que la distance de deux points intérieurs à un cercle de rayon R soit $\leqq a$ :

$$\frac{\pi a^2 + \alpha(R^2 - a^2) - \sin\alpha\left(R^2 + \frac{a^2}{2}\right)}{\pi R^2}$$

en posant

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}.$$

Pour une *sphère* de rayon R, l'expression est plus simple :

$$\left(\frac{a}{R}\right)^3 - \left(\frac{3}{4}\frac{a^2}{R^2}\right)^2 + \frac{1}{32}\frac{a^6}{R^6}.$$

Étant donné un polygone convexe tel qu'un segment de longueur $a$ rencontre au plus deux côtés (y compris les prolongements), si l'on désigne par S la surface, par P le périmètre, par A, B, C, ... les angles, le nombre des segments de longueur inférieure à $a$ entièrement intérieurs est proportionnel à

$$R a^2 S - \frac{2a^3}{3}P + \frac{a^4}{8}\sum \cot A(\pi - A + \operatorname{tang} A).$$

Pour un carré de côté $l$, cette formule devient

$$\pi a^2 l^2 - \frac{8a^3 l}{3} + \frac{a^4}{2}.$$

On pourrait calculer les fluctuations en décomposant en carrés ou cubes au lieu de considérer des cercles ou sphères.

8. *La répartition de droites ou plans.* — Je me contenterai d'indiquer les principes d'après lesquels des problèmes analogues peuvent être traités pour des droites dans le plan ou dans l'espace ou pour des plans dans l'espace.

Dans le plan, étant donnés une aire S et un angle $\alpha$, considérons les droites données dont les parallèles sont intérieures à l'angle $\alpha$ et qui coupent S; la somme des segments intérieurs à S étant L le rapport

$$\frac{L\pi}{S\alpha} = \sigma$$

est la densité moyenne des droites données dans S et $\alpha$; cette densité a les dimensions de l'inverse d'une longueur.

Dans l'espace on considérera un angle solide $\alpha$ et un volume V et l'on prendra le rapport

$$\frac{2\pi L}{\alpha V}$$

dont les dimensions sont celles de l'inverse d'une surface.

Pour les plans distribués dans l'espace, on considérera ceux dont les normales sont intérieures à un angle solide $\alpha$ et qui coupent un volume V; la somme des surfaces découpées sur ces plans étant S, la densité moyenne $\sigma$ est

$$\sigma = \frac{2S\pi}{\alpha V}.$$

On traiterait de la même manière que pour les points les problèmes concernant les probabilités et les fluctuations des plus courtes distances de droites distribuées dans une région de l'espace avec densité moyenne $\sigma$ ou des distances de points de densité $\sigma$ à des plans de densité $\sigma'$.