E. MAILLET

Sur certains types de fractions continues arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 46 (1918), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

SUR CERTAINS TYPES DE FRACTIONS CONTINUES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. Soit une suite de nombres positifs absolument quelconques donnée *a priori*

$$(1) \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots.$$

Je me propose d'étudier ici la représentation d'un nombre N *positif* quelconque sous la forme d'une fraction continue convergente

$$N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \ldots + 1 : d_n x_n + \ldots,$$
$$(d_1 \geqq 0, \; d_2 > 0, \; \ldots, \; d_n > 0, \; \ldots, \text{ les } d_i \text{ étant entiers}).$$

Pour que tout nombre N positif > 0 admette une représentation de cette forme, il est nécessaire et suffisant que

$$x_n x_{n+1} \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

J'indiquerai en outre quelques propriétés de ces représentations, et je dirai un mot du cas où

$$x_n x_{n+1} > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Une partie des idées essentielles contenues dans la présente Note se trouve déjà dans mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants* (Paris, Gauthier-Villars, 1906, Chap. IV: notamment p. 59-60 et p. 82-89). Elles sont toutefois présentées ici, à certains égards, d'une manière plus générale et plus simple.

II. Pour faciliter les écritures, je définirai x_0 par la condition $x_0 x_1 = 1$, et je supposerai $N \geqq x_1$, ce qu'on peut toujours réaliser en ajoutant x_1 à N, écrivant $N_1 = N + x_1$, et raisonnant sur N_1 dont on efface l'indice.

Soit

$$(2)\qquad \begin{cases} N = \varepsilon_0 \quad = d_1 x_1 + \varepsilon_1^{-1}, \\ \qquad \varepsilon_1 \quad = d_2 x_2 + \varepsilon_2^{-1}, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad \varepsilon_{n-1} = d_n x_n + \varepsilon_n^{-1}, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où les d_i et ε_i sont positifs, avec d_i entier $\geqq 1$ ([1]). Pour que tout nombre N puisse donner lieu à une suite d'opérations de ce genre, nous allons montrer qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$(3)\qquad x_n x_{n+1} \leqq 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En effet, je dis que cette condition est nécessaire. Soit, pour $n \geqq 1$,

$$\varepsilon_n^{-1} = \lambda_n x_n - \eta_n, \qquad \lambda_n \text{ entier} > 0, \qquad 0 < \eta_n \leqq x_n;$$

on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n x_n - \eta_n} \geqq d_{n+1} x_{n+1};$$

on peut toujours choisir N de façon que η_n soit arbitrairement petit, en sorte que

$$\lambda_n d_{n+1} x_n x_{n+1} \leqq 1, \qquad \text{d'où} \qquad x_n x_{n+1} \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Cette dernière condition (3) étant supposée remplie, je dis qu'elle est suffisante. En effet, on prendra systématiquement pour $d_{n+1} = E(\varepsilon_n x_{n+1}^{-1})$ le plus grand entier contenu dans

$$\varepsilon_n x_{n+1}^{-1} \qquad (n \geqq 0),$$

$d_{n+1} x_{n+1}$ étant alors, par définition, le plus grand multiple de x_{n+1} qui ne surpasse pas ε_n. Cela est possible puisque

$$\varepsilon_n^{-1} < x_n, \qquad \varepsilon_n^{-1} x_{n+1} < x_n x_{n+1} \leqq 1, \qquad \varepsilon_n > \frac{1}{x_n}.$$

Dès lors, on aura ainsi sans ambiguïté, pour chaque nombre

([1]) On peut avoir éventuellement $\varepsilon_n^{-1} = 0$; dans ce cas on n'a pas à considérer les égalités (2) qui suivent la $n^{\text{ième}}$, ni les quantités $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots$.

$N \geqq x_1$, sous les conditions

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x_n x_{n+1} \leqq 1, & 0 \leqq \varepsilon_n^{-1} < x_n \leqq \dfrac{1}{x_{n+1}} \\ d_n x_n > \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} > \dfrac{1}{2x_{n-1}} \geqq \dfrac{x_n}{2} & \end{array}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

le développement, qu'on peut appeler *canonique* [en ce qui concerne la suite (1)],

$$N = d_1 x_1 + \frac{1}{d_2 x_2 + \ldots},$$

ou, avec nos notations habituelles,

$$(5)\qquad N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \ldots + 1 : d_n x_n + \ldots;$$

c'est le résultat annoncé au n° I, si l'on vérifie maintenant que cette fraction est convergente; on le fait en se rappelant la condition nécessaire et suffisante de convergence de la fraction continue

$$a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n + \ldots$$

à quotients a_i positifs; cette condition est que la série de terme général a_i soit divergente (¹); il en est bien ainsi, puisque, d'après (4), $d_n x_n > \frac{1}{2x_{n-1}}$; sur deux quotients consécutifs $d_i x_i$, $d_{i+1} x_{i+1}$, l'un est $> \frac{1}{2}$, car $x_i x_{i+1} \leqq 1$ montre que x_i ou x_{i+1} est $\leqq 1$.

III. Considérons maintenant un développement de la forme (5), mais où les d_n sont des entiers donnés *a priori* > 0, sans qu'on se préoccupe des conditions (2) et (4), de façon toutefois que ce développement soit convergent, les inégalités (3) subsistant aussi. On peut montrer que ce développement n'est pas forcément canonique si l'on n'a pas

$$\frac{N}{x_1} = d_1 + 1 : d_2 + \ldots + 1 : d_n + \ldots,$$

$$x_{2i} = \frac{1}{x_1}, \qquad x_{2i+1} = x_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

(¹) Stern (*J. für Math.*, t. XXXVII); Stieltjes (*Ann. Fac. Toul.*, t. VIII, 1894, J., p. 31).

En effet, posons

$$\varepsilon_{n-1} = d_n x_n + \varepsilon_n^{-1} = d_n x_n + 1 : d_{n+1} x_{n+1} + \ldots,$$

ε_{n-1} et ε_n étant définis par ces égalités; si l'on veut que (4) ait lieu, il faut

$$d_n x_n + \frac{1}{d_{n+1} x_{n+1}} \geqq \varepsilon_{n-1} > \frac{1}{x_{n-1}},$$

$$d_n > \frac{1}{x_n x_{n-1}} - \frac{1}{d_{n+1} x_n x_{n+1}};$$

quand on n'a pas $x_n x_{n-1} = 1$, d_n doit être > 1 dès que d_{n+1} dépasse une certaine limite : dans une fraction canonique, d_n et d_{n+1} ne sont pas entièrement indépendants, ni, par suite, arbitraires, lorsque $x_n x_{n-1} < 1$; il y a alors pour $d_n = 1$ ou assez petit, une infinité de valeurs de d_{n+1} donnant lieu à un développement non canonique, d'ailleurs convergent si la suite d_{n+2}, d_{n+3}, ... satisfait à des conditions convenables, par exemple si

$$d_{n+2} x_{n+2} + 1 : d_{n+3} x_{n+3} + \ldots$$

est un développement canonique pour la suite x_{n+2}, x_{n+3}, ...

Il n'y a d'exception à ces conclusions que si l'on a constamment $x_n x_{n-1} = 1$, c'est-à-dire quand on a

$$x_{2i} = \frac{1}{x_1}, \qquad x_{2i+1} = x_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots);$$

alors

$$\frac{N}{x_1} = d_1 + 1 : d_2 + \ldots + 1 : d_n + \ldots$$

est une fraction continue ordinaire; les seules fractions non canoniques sont celles ayant un nombre limité de quotients et dont le dernier d_{n+1} est égal à 1; le développement canonique correspondant s'en déduit en remplaçant $d_n + \frac{1}{d_{n+1}}$ par $d'_n = d_n + 1$.

Il y a là éventuellement une cause de supériorité dans l'emploi des fractions continues ordinaires classiques.

IV. Ceci conduit à se poser diverses questions intéressantes, au sujet de la suite (1) satisfaisant aux conditions (3).

1° Un nombre N donné possède-t-il un nombre fini ou infini de représentations

$$(5\ bis)\qquad N = d_1x_1 + 1 : d_2x_2 + \ldots + 1 : d_nx_n + \ldots$$

(les d_i entiers > 0) ?

2° Y a-t-il des nombres N qui ne possèdent d'autre représentation (5 *bis*) que la représentation canonique ?

Envisageons d'abord la représentation canonique d'un nombre $N > 0$, avec

$$\varepsilon_{n-1} = d_nx_n + \varepsilon_n^{-1}, \qquad \varepsilon_n^{-1} < x_n.$$

Si N a une représentation non canonique, il existera une valeur de $n \geqq 1$ pour laquelle on pourra écrire

$$\varepsilon_{n-1} = \delta_nx_n + \eta_n^{-1}, \qquad 0 < \delta_n < d_n, \qquad \eta_n \geqq x_{n+1},$$

δ_n étant entier; cette condition nécessaire est aussi suffisante, car la représentation canonique de η_n donnera une représentation correspondante non canonique de N.

Il faudra et il suffira dès lors qu'on ait

$$(6)\qquad \eta_n = \frac{1}{(d_n - \delta_n)x_n + \varepsilon_n^{-1}} \geqq x_{n+1}, \qquad d_n > \delta_n > 0,$$

ou

$$(7)\qquad \varepsilon_n[1 - x_nx_{n+1}(d_n - \delta_n)] \geqq x_{n+1}, \qquad d_n > \delta_n > 0.$$

On remarquera d'abord que δ_n satisfait à l'inégalité

$$1 - x_nx_{n+1}(d_n - \delta_n) \geqq 0,$$

qui est possible ici, puisque, d'après (3), $x_nx_{n+1} \leqq 1$. Si $x_nx_{n+1} = 1$, on a

$$d_n - \delta_n = 1, \qquad \varepsilon_n^{-1} = 0, \qquad \eta_n = \frac{1}{x_n} = x_{n+1};$$

mais la représentation obtenue, non canonique, se ramène à vue à la représentation canonique. Quand $x_nx_{n+1} < 1$, il faudra et il suffira, pour qu'il y ait une représentation non canonique (correspondant à $d_n - \delta_n = 1$, et alors évidemment convergente),

$$(8)\qquad \varepsilon_n \geqq \frac{x_{n+1}}{1 - x_nx_{n+1}}, \qquad d_n \geqq 2, \qquad n \geqq 1.$$

Dans les applications, il y aura de plus à tenir compte des conditions nécessaires et suffisantes pour que le développement (5 *bis*) soit canonique,

$$(9)\qquad d_n x_n \leqq \varepsilon_{n-1} = d_n x_n + 1 : d_{n+1} x_{n+1} + \ldots < (d_n + 1) x_n,$$
$$\varepsilon_n{}^1 < x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Cette dernière condition entraîne la condition nécessaire

$$\frac{1}{x_{n-1}} < \varepsilon_{n-1} < (d_n + 1) x_n,$$

et la condition suffisante $d_n x_n > \frac{1}{x_{n-1}}$, qu'on peut grouper ainsi

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{condition nécessaire } d_n + 1 > \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} \\ \text{condition suffisante} \quad d_n > \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} \end{array}\right\} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

On déduit aussi bien de (9) une série de conditions nécessaires ou suffisantes, qui pourront être plus avantageuses, mais seront plus compliquées, par exemple la condition nécessaire

$$\frac{1}{x_{n-1}} < \varepsilon_{n-1} \leqq d_n x_n + \frac{1}{d_{n+1} x_{n+1}}$$

déjà utilisée au n° III.

On voit aussitôt qu'il y a une infinité de nombres N satisfaisant à toutes les conditions (8) et (9) pour chaque suite (1) et chaque valeur de n, lorsque $x_n x_{n+1} < 1$.

Les conditions (8) peuvent d'ailleurs subir une transformation analogue à celle que nous avons opérée sur les formules (9). La représentation (5 *bis*) étant supposée canonique, d'après (8) et (9) on a les conditions

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{nécessaires } d_n \geqq 2, & d_{n+1} + 1 > \dfrac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \\ \qquad\text{ou} & d_{n+1} > \dfrac{x_n x_{n+1}}{1 - x_n x_{n+1}} \\ \text{suffisantes } d_n \geqq 2, & d_{n+1} \geqq \dfrac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \end{array}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pour l'existence de la représentation non canonique précitée.

Voici quelques conséquences :

V. 1° Soit une fraction continue (5 *bis*) satisfaisant à la condition suffisante (10) quel que soit $n \geqq 2$; elle donnera naissance, pour chaque valeur de $n \geqq 1$ satisfaisant aux conditions suffisantes (11), à au moins une autre fraction (5 *bis*) non canonique ayant la même valeur N. Ces diverses fractions différeront soit par la valeur du quotient $d_n x_n$ ou $\delta_n x_n$ correspondant au même indice n, soit par l'indice n auquel s'applique le procédé précité du n° IV.

Exemples. — 1° Soit, pour une valeur de $n \geqq 2$, à la fois

$$(12) \qquad 2x_{n-1}x_n \leqq 1, \qquad 2x_n x_{n+1} \leqq 1;$$

une représentation canonique (5 *bis*) du nombre N satisfait à la condition nécessaire (10), c'est-à-dire à

$$d_n + 1 > \frac{1}{x_n x_{n-1}} \geqq 2, \qquad \text{d'où} \qquad d_n \geqq 2;$$

de plus,

$$\frac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \leqq 2,$$

en sorte que la condition suffisante (11) a lieu. Dès lors, à cette représentation canonique (5 *bis*) correspond, pour cette valeur de n, par le procédé précité, une représentation non canonique de N. En particulier, quand les inégalités (12) ont lieu pour une infinité de valeurs de n, N a une infinité de représentations non canoniques.

Notons encore que, même si (12) n'a pas lieu, la deuxième condition (9), $\varepsilon_n > \frac{1}{x_n}$, entraîne la première condition (8) lorsque

$$\frac{1}{x_n} \geqq \frac{x_{n+1}}{1 - x_n x_{n+1}} \qquad \text{ou} \qquad 2x_n x_{n+1} \leqq 1;$$

alors N a une représentation non canonique correspondante si l'on a $d_n \geqq 2$.

2° Je suppose

$$(13) \quad 1 > \lambda_1^2 \geqq x_n x_{n+1} \geqq \lambda^2, \qquad \lambda, \lambda_1 \text{ donnés} < 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

D'après (10), les conditions

$$(14) \quad \frac{1}{x_n x_{n-1}} \leqq \frac{1}{\lambda^2} \leqq d_n, \qquad \frac{1}{x_n x_{n-1}} < d_n, \qquad d_n \geqq 2 \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

sont suffisantes pour que (5 *bis*) soit canonique : nous les supposerons remplies. D'après (11), on a, puisque $1 > x_n x_{n+1}$, pour l'existence d'une représentation non canonique correspondant à l'indice n, les conditions

$$(15)\qquad \begin{cases} d_{n+1} > \dfrac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \text{ nécessaire,} \\ d_{n+1} \geqq \dfrac{1}{1-\lambda_1^2} \text{ suffisante.} \end{cases}$$

Lorsque, p et p_1 étant entiers ou non,

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \geqq p > 1, \qquad \lambda^2 \geqq \frac{p}{p+1}, \qquad \frac{1}{\lambda^2} \leqq 1 + \frac{1}{p} < 2, \qquad \frac{1}{1-\lambda_1^2} = p_1 + 1, p \leqq p_1,$$

les conditions (14) se réduisent à

$$d_n \geqq 2 \qquad (n = 2, 3, \ldots);$$

les conditions nécessaire ou suffisante (15) exigent respectivement $d_{n+1} > p$ ou $d_{n+1} \geqq p_1 + 1$; il en résulte que, si l'on a $p \geqq 2$, il n'y a pas de représentation non canonique de (5 *bis*) correspondant à l'indice n, sauf dans l'un des cas suivants :

a. $p < d_{n+1} < p_1 + 1$ (peut-être);
b. $d_{n+1} \geqq p_1 + 1$ (sûrement).

D'après cela, par exemple, si p et p_1 sont entiers $\geqq 2$, les fractions continues illimitées (5 *bis*) où les nombres $d_n (n = 2, 3, \ldots)$ n'ont qu'une des valeurs $2, 3, \ldots, p$, possèdent une représentation unique de la forme (5 *bis*), laquelle est forcément canonique; celles où les nombres d_n $(n = 2, 3, \ldots)$ sont tous $\geqq 2$, certains d'entre eux étant $\geqq p_1 + 1$, ont au moins autant de représentations non canoniques distinctes qu'il y a de nombres d_{n+1} dépassant p_1.

VI. On pourrait étudier aussi, au même point de vue, les suites (1) qui ne satisfont pas aux conditions (3). Une représentation canonique est encore convergente, comme on le voit de suite. Nous indiquerons seulement un résultat, en supposant

$$(16)\qquad x_n x_{n+1} > 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

On sait qu'alors il y a des nombres $N > 0$ qui n'ont pas de représentation (5 *bis*); mais, toute représentation (5 *bis*) donnée est forcément canonique, d'après (6) et (7).

Premier exemple. — Si $x_n = 2$ quel que soit n, le nombre

$$N = 2\,d_1 + 1 : 2\,d_2 + \ldots + 1 : 2\,d_n + \ldots$$

est développé en une fraction continue ordinaire dont tous les quotients incomplets sont pairs. On peut les caractériser aussi comme étant les nombres positifs dont les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ ont la propriété suivante : P_n et Q_n étant de parités forcément différentes, les nombres

$$P_0 = a_0 (\text{si } N = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots),\ P_1,\ P_2,\ \ldots$$

sont alternativement pairs ou impairs, le premier étant pair, et, par suite, les nombres $Q_0 = 1$, Q_1, Q_2, ... sont aussi alternativement pairs ou impairs, le premier étant impair.

Deuxième exemple. — Si la suite (1) est formée de nombres entiers et satisfait, pour une infinité de valeurs n_1 de n à la condition

$$x_{n_1} > \varphi(n_1),$$

où $\varphi(n)$ est une fonction de n croissant assez vite avec n, les nombres

$$N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \ldots + 1 : d_n x_n + \ldots$$

à développement illimité sont des nombres transcendants de Liouville.

D'après cela, on voit que la considération de suites (1) satisfaisant à (16) permet, quand on n'envisage que les nombres N représentables sous la forme (5 *bis*), d'isoler dans l'ensemble des nombres positifs un ensemble de nombres qui peut éventuellement jouir de propriétés arithmétiques intéressantes. Ce serait peut-être là une question à étudier d'une manière plus complète.