

BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PETROVITCH

Propriétés arithmétiques d'une classe de nombres rationnels

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 27-32

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__27_1

© Bulletin de la S. M. F., 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES D'UNE CLASSE DE NOMBRES
RATIONNELS ;**

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

Désignons par 9_k l'entier qu'on obtient en écrivant le chiffre 9 k fois consécutivement, par exemple

$$9_1 = 9, \quad 9_2 = 99, \quad 9_3 = 999, \quad \text{etc.}$$

L'Arithmétique élémentaire enseigne des propriétés curieuses de nombres ainsi composés et de leurs combinaisons. J'y ajouterai quelques propriétés que je crois nouvelles.

I. Soient

$$(1) \quad a, b, c, \dots, g,$$

$$(2) \quad m, n, p, \dots, s$$

deux suites données d'entiers positifs, les entiers (1) étant premiers entre eux, et soit h un entier positif variable. L'expression

$$(3) \quad N = \frac{9(m+1)ah}{9ak} \times \frac{9(n+1)bh}{9bk} \dots \frac{9(s+1)gh}{9gh}$$

représente un entier à λh chiffres, où

$$(4) \quad \lambda = ma + nb + \dots + sg$$

jouissant de la propriété suivante :

Désignons par $P(k)$ l'entier positif indiquant de combien de

approchée du nombre $P(k)$ pour un système donné (k, a, b, c, \dots, g) et pour tous les systèmes possibles (x, y, \dots, t) , avec l'erreur commise ayant une limite supérieure *indépendante de k* .

Dans le cas, par exemple, de l'équation à deux inconnues

$$k = ax + by,$$

la formule de Laguerre fournit

$$P(k) = \frac{k}{ab} + \delta,$$

où la valeur absolue de δ est plus petite que 1; pour l'équation à trois inconnues

$$k = ax + by + cz,$$

elle fournit

$$P(k) = \frac{k^2}{2abc} + \frac{k(a+b+c)}{2abc} + \delta,$$

le terme complémentaire δ étant en valeur absolue plus petit qu'une certaine quantité fixe pour tous les k .

Ces formules permettent d'assigner à h l'une des valeurs que suppose la proposition précédente.

Remarquons que

$$(12) \quad \frac{9^{(\mu+1)2h}}{9^{2h}}$$

est l'entier à $\mu x h$ chiffres ayant pour valeur

$$(13) \quad \underbrace{100\dots01}_{\alpha h - 1 \text{ zéros}} \underbrace{00\dots01}_{\alpha h - 1 \text{ zéros}} \underbrace{00\dots01}_{\alpha h - 1 \text{ zéros}} 010\dots,$$

où le groupe de chiffres $00\dots01$ se répète μ fois. Ceci permet de calculer le nombre N en additionnant les unités convenablement distribuées et d'imaginer même un appareil simple effectuant rapidement ce calcul.

Pour l'équation, par exemple

$$3x + 2y = k, \\ 0 \leq x \leq 10, \quad 0 \leq y \leq 9,$$

comme le nombre

$$\log \left(1 + \frac{\lambda}{ab} \right) = \log \left(1 + \frac{48}{6} \right) = \log 9$$

est plus petit que 1, on peut prendre $h = 1$, ce qui fournit

$$N = 101111212222323333434334334334\dots$$

et le nombre $P(k)$ coïncide avec le $(k + 1)^{\text{ième}}$ chiffre de N . Ainsi, l'équation

$$3x + 2y = 19$$

a exactement trois solutions en $x \leq 10$ et $y \leq 9$: ce nombre est bien indiqué par le vingtième chiffre de N .

II. Considérons le nombre rationnel

$$(14) \quad S_{m,h} = M_{m,h} Q_h,$$

où

$$(15) \quad M_{m,h} = \frac{1}{9^h} + \frac{1}{9^{2h}} + \dots + \frac{1}{9^{mh}},$$

$$(16) \quad Q_h = 10^{-h} \frac{9^h}{9 \cdot 9^h}$$

et où m et h sont deux entiers positifs arbitraires. Convertis en fractions décimales, $M_{m,h}$ est une fraction périodique *simple* ayant une période de mh chiffres, et Q_h est une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique et la période ont chacune h chiffres. Le nombre $S_{m,h}$ lui-même, converti en fraction décimale, sera donc une fraction périodique *mixte* dont la partie non périodique a h chiffres et la période mh chiffres.

Partageons la suite S de décimales de $S_{m,h}$ formant l'ensemble de sa partie non périodique et la première période, en tranches successives T_1, T_2, \dots, T_{m+1} à h chiffres, de sorte que la tranche T_k ($k = 1, 2, \dots, m + 1$) commence par le $[(k - 1)h + 1]^{\text{ième}}$ et se termine par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de $S_{m,h}$, et considérons les tranches T_1, T_2, \dots, T_m .

Dès que h surpasse une certaine valeur, l'entier formé du groupe de chiffres significatifs de la tranche T_k coïncide avec le nombre de diviseurs de k autres que 1 et k , et cela pour toute valeur de $k \leq m$.

Pour le faire voir, je remarque que $S_{m,h}$ représente la valeur numérique que prend pour $x = 10^{-h}$ la fraction rationnelle

$$(15) \quad F(x) = f(x) - (x)\varphi,$$

où $f(x)$ est la série de Lambert limitée

$$(16) \quad f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \dots + \frac{x^m}{1-x^m}$$

et

$$(17) \quad \varphi(x) = \frac{x(x+1)}{1-x} = x + 2(x^2 + x^3 + x^4 + \dots).$$

D'après la propriété bien connue de la série de Lambert, le coefficient $N(k)$ du développement

$$(18) \quad F(x) = N(1)x + N(2)x^2 + N(3)x^3 + \dots$$

coïncidera avec le nombre de diviseurs de k autres que 1 et k .

Prenons pour h un entier quelconque tel que 10^h ne soit inférieur au nombre de diviseurs d'aucun entier $k < m$. Le produit $10^{-hk}N(k)$ sera alors le nombre $0,00\dots0N(k)$ où la partie significative $N(k)$, composée de l_k chiffres, est précédée d'un nombre de zéros égal à $h - l_k$ et toujours positifs pour $k = 1, 2, \dots, m$. Il s'ensuit que

$$(19) \quad F(10^{-h}) = \underbrace{0,00\dots0}_{h-l_1 \text{ zéros}} N(1) \underbrace{00\dots0}_{h-l_2 \text{ zéros}} N(2) \underbrace{00\dots0}_{h-l_3 \text{ zéros}} N(3) 0\dots,$$

ce qui démontre le résultat énoncé.

En désignant comme *lacune* toute tranche T_k formée exclusivement de zéros, on en tire le corollaire suivant :

Le nombre de lacunes que présente l'ensemble de k premières tranches T_1, T_2, \dots, T_k de la période de $S_{m,a}$ est égal au nombre des nombres premiers inférieurs à k , et cela pour toute valeur de k plus petite ou égale à m .

Si l'on remarque que

$$\frac{1}{9k^h} = 0, \underbrace{0\dots01}_{kh-1} \underbrace{0\dots01}_{kh-1} \underbrace{0\dots01}_{kh-1},$$

$$10^{-h} \frac{92^h}{9 \times 9^h} = 0, \underbrace{0\dots01}_{h-1} \underbrace{0\dots02}_{h-1} \underbrace{0\dots02}_{h-1} \underbrace{0\dots02}_{h-1} \dots,$$

on voit que la suite S se calculerait, pour tout m et h donnés, par la seule addition d'unités, par exemple à l'aide d'un appareil simple à imaginer.

Le nombre h remplissant les conditions précédentes peut être déterminé de diverses manières. Comme l'on a

$$N(k) < k < m,$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à m .

On peut aussi le choisir de la manière suivante : en prenant pour m une factorielle

$$m = 1.2.3 \dots \lambda,$$

on s'assure par des considérations arithmétiques élémentaires que le nombre de diviseurs (autres que 1 et k) d'un entier $k \leq m$ ne surpasse jamais $2^{\lambda-1}$, et comme

$$2^{\lambda-1} < 10^{\frac{\lambda-1}{3}},$$

on peut prendre pour h un entier quelconque supérieur ou égal à $\frac{\lambda-1}{3}$.

Je rappelle aussi l'inégalité de M. Wigert :

$$N(k) < 2^{(1+\varepsilon) \frac{\log k}{\log \log k}},$$

valable pour $\varepsilon > 0$ et arbitraire, pourvu que k soit assez grand.

On trouve, par exemple, pour $m = 100$ (ce qui fournit $h \leq 2$) :

$$S_{100,2} = 0,00000001000200020102000400020203000400040002000601 \dots$$

Les 20 premières tranches à deux chiffres contiennent 9 lacunes, les 100 premières tranches en contiennent 26, indiquant qu'il y a 9 nombres premiers inférieurs à 20, qu'il y en a 26 inférieurs à 100, etc.

Le même procédé, appliqué à diverses fonctions rationnelles analogues aux précédentes, conduit à d'autres nombres entiers ou rationnels, composé de chiffre 9 et jouissant des propriétés arithmétiques intéressantes.

