P. FATOU

Sur les équations fonctionnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 33-94
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__33_0>

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES;

PAR M. P. FATOU.

(DEUXIÈME MÉMOIRE.)

CHAPITRE IV.

26. Nous exposerons dans ce Chapitre les théorèmes généraux auxquels on parvient quand on applique aux fonctions itérées d'une fonction rationnelle les principes concernant les suites de fonctions analytiques. Nous ferons un usage constant de la notion de familles normales de fonctions holomorphes ou méromorphes qui est due à Montel, et nous supposerons connus les résultats exposés dans les Mémoires de cet éminent géomètre (¹). Nous rappelons qu'une famille de fonctions méromorphes dans le domaine D est normale si, de toute suite infinie formée avec les fonctions de la famille, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans le domaine ouvert D vers une fonction limite. Cette fonction limite est une fonction méromorphe qui peut, dans certains cas, être une constante finie ou infinie.

Il résulte, des développements des Chapitres précédents, que les itérées d'une fonction rationnelle peuvent former une famille normale dans certains domaines. C'est ce qui a lieu notamment si la substitution correspondante possède un point double ou un cycle de multiplicateur plus petit que 1 en module, ou égal à 1 en module avec un argument commensurable à 2π. Dans ce cas, il y a des domaines dans lesquels les fonctions itérées $R_n(z)$ convergent

(¹) *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales de l'École Normale*, 1907).
Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine (*Annales de l'École Normale*, 1912).
Sur les familles normales de fonctions analytiques (*Annales de l'École Normale*, 1916).
Sur la représentation conforme (*Journ. de Math.*, 7ᵉ série, t. III, 1917).

périodiquement vers les p constantes qui correspondent aux points du cycle, la suite des R_n étant ainsi divisée en p suites partielles pour lesquelles les indices n ont même reste (mod p) et qui convergent au sens ordinaire du mot vers une constante.

Nous dirons avec Montel qu'une famille de fonctions méromorphes dans un domaine D est normale en un point P intérieur à D, si elle est normale dans un cercle de centre P. Une famille normale dans D est normale en chaque point P intérieur à D et, réciproquement, une famille normale en chaque point P intérieur à D est normale à l'intérieur de D. Si les fonctions $R_n(z)$ forment une famille normale en un point ξ, il en sera de même en tous les points conséquents ou antécédents de ξ. Car si la suite de fonctions

$$R_{\alpha_1}(z),\quad R_{\alpha_2}(z),\quad \ldots,\quad R_{\alpha_n}(z),\quad \ldots$$

converge uniformément dans un cercle c de centre ξ, la suite

$$R_{\alpha_1-1}(z),\quad R_{\alpha_2-1}(z),\quad \ldots,\quad R_{\alpha_n-1}(z),\quad \ldots$$

converge uniformément dans le domaine c_1 qui est décrit par le point $z_1 = R(z)$, quand z décrit c, et ce domaine c_1 contient à son intérieur le point $\xi_1 = R(\xi)$; les deux fonctions limites ont les mêmes valeurs en deux points correspondants des domaines c et c_1. Dire que les R_n forment une famille normale en ξ revient à dire que, de toute suite $R_{\lambda_1}(z)\ldots R_{\lambda_n}(z)\ldots$, on peut en extraire une autre, $R_{\alpha_1}(z) R_{\alpha_2}(z)\ldots R_{\alpha_n}(z)\ldots$, qui converge uniformément dans c; donc, de toute suite $R_{\lambda_1-1}(z)\ldots R_{\lambda_n-1}(z)\ldots$, on peut en déduire une autre : $R_{\alpha_1-1}(z)\ldots R_{\alpha_n-1}(z)\ldots$, qui converge uniformément dans c_1, et par suite dans un cercle de centre ξ_1.

Réciproquement, supposons que la suite

$$R_{\alpha_1}(z),\quad R_{\alpha_2}(z),\quad \ldots,\quad R_{\alpha_n}(z),\quad \ldots$$

converge uniformément dans un cercle de centre ξ, et soit ξ_{-1} un point racine de l'équation $R(z) = \xi$; si l'on désigne par c_{-1} le domaine contenant ξ_{-1} à son intérieur et qui correspond à un élément de la surface de Riemann à plusieurs feuillets attachée à l'équation algébrique $R(y) = z$ et projeté suivant le cercle c, la suite

$$R_{\alpha_1+1}(z),\quad R_{\alpha_2+1}(z),\quad \ldots,\quad R_{\alpha_n+1}(z),\quad \ldots$$

est uniformément convergente quand z décrit c_{-1}, et par suite quand z est intérieur à un cercle de centre ξ_{-1}.

27. L'ensemble des points pour lesquels les $R_n(z)$ forment une famille normale est donc un ensemble *complètement invariant*, pouvant former un nombre fini ou une infinité dénombrable de domaines.

Il en est de même, par conséquent, de l'ensemble des points en lesquels la suite des $R_n(z)$ n'est pas normale. Ce dernier ensemble, d'après ce qu'on a vu au Chapitre I, renferme toujours au moins une infinité dénombrable de points; par exemple, les points doubles pour lesquels on a soit $|s| > 1$, soit $s = +1$, et leurs antécédents. Cet ensemble est évidemment fermé. Nous le désignerons par la lettre $\mathfrak{F}$ et nous allons étudier les principales de ses propriétés (¹).

I. $\mathfrak{F}$ ne change pas si l'on remplace $R(z)$ par $R_h(z)$, quel que soit l'entier h. En effet, de toute suite infinie des $R_n(z)$, on peut en extraire une autre dans laquelle les n ont tous le même reste $(\bmod h)$; soient $R_{\lambda h+p}(z)$ les fonctions de cette nouvelle suite. Si les $R_{np}(z)$ forment une famille normale dans un domaine, on peut extraire de la suite des $R_{\lambda h}(z)$ une autre suite qui converge uniformément dans ce domaine. Soient $R_{\lambda' h}(z)$ les fonctions de cette nouvelle suite qui convergent vers $\Phi(z)$. La suite des fonctions $R_{\lambda' h+p}(z)$ converge à son tour uniformément vers $R_p[\Phi(z)]$, puisque $R_{\lambda' h+p}(z) = R_p[R_{\lambda' h}(z)]$.

L'ensemble des points où les $R_n(z)$ forment une famille normale ne changeant pas si l'on remplace R par R_h, il en est de même du complémentaire $\mathfrak{F}$ de cet ensemble.

On en déduit en particulier que tous les points des cycles de multiplicateur > 1 en module ou de la forme $e^{2i\pi\frac{p}{q}}$ appartiennent à $\mathfrak{F}$. En ces points, aucune suite extraite des $R_n(z)$ ne converge uniformément (*cf.* § 13, 14, 15). Il en est de même pour tous les antécédents de ces points.

II. Tout point de $\mathfrak{F}$ est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf au plus de deux points exceptionnels.

En un point ξ de $\mathfrak{F}$, les $R_n(z)$ ne forment pas une famille nor-

(¹) Certaines propositions qui suivent, de caractère géométrique et tout à fait intuitif, exigent pour la précision des discours parfois assez longs et d'aspect rébarbatif, le lecteur les saisira de suite en s'aidant par des figures schématiques.

male. Ces fonctions prennent donc dans leur ensemble, même en négligeant un nombre fini d'entre elles, toutes les valeurs, sauf deux au plus, dans un cercle de centre ξ et de rayon ε arbitrairement petit. Cela revient à dire qu'étant donné un point z_0 du plan, distinct au besoin de un ou deux points exceptionnels, il existe un antécédent de z_0 et de rang supérieur à tout nombre donné n', qui est à une distance de ξ inférieure á ε.

En faisant tendre ε vers zéro, on voit que ξ est limite d'antécédents de z_0, ces antécédents pouvant d'ailleurs être tous confondus avec ξ lui-même. Nous devons dire en toute rigueur que ξ est un antécédent ou un point limite d'antécédents de tout point du plan, abstraction faite d'un ou de deux points exceptionnels.

Je dis que ces points exceptionnels sont indépendants de ξ.

En effet, soit a l'un de ces points. Je suppose donc que les équations

$$R_n(z) = a,$$

où $n > n'$, n'ont pas de solutions dans un cercle de centre ξ et de rayon ε; a possède au plus deux antécédents distincts, y compris a lui-même; car soit a_{-p} un antécédent de rang p de a; l'équation

$$R_n(z) = a_{-p}$$

n'a pas de solutions dans le cercle considéré, car on déduirait

$$R_{n+p}(z) = a,$$

qui par hypothèse n'a pas de solutions puisque $n+p > n'$. S'il existait trois antécédents distincts, il y aurait trois équations exceptionnelles; les $R_n(z)$ formeraient une suite normale; a possède donc au plus deux antécédents distincts. Quels sont les points qui satisfont à cette condition? La réponse a déjà été donnée au Chapitre I, mais nous allons la donner de nouveau. Supposons que le point a soit le point à l'infini, l'autre point antécédent distinct de a, s'il existe, étant à l'origine; on peut toujours faire cette supposition moyennant une transformation homographique préalable effectuée sur z et $Z = R(z)$ simultanément. Si le point à l'infini n'a pas d'autre antécédent que lui-même, la substitution est polynomiale. Si le point à l'infini n'a d'autres antécédents que lui-même et l'origine, la substitution doit être de la forme

$$Z = \frac{\text{polynome en } z}{z^q}.$$

Mais le point $z = o$ à son tour ne devant pas avoir d'autres antécédents que lui-même et l'infini, le polynome du numérateur doit être une constante. On a donc $Z = \frac{A}{z^q}$. Dans ce dernier cas, il y a deux valeurs exceptionnelles, o et ∞, formant un cycle d'ordre 2 et de multiplicateur nul. On voit directement ou comme conséquence de la théorie actuelle que tous les autres points ont une infinité d'antécédents distincts. Dans le premier cas où l'on a $Z =$ polynome en z, peut-on avoir une valeur exceptionnelle autre que $z = \infty$? Soit $z = o$ une telle valeur. Si dans la relation

$$Z = P(z) = Az^q + Bz^{q-1} + \ldots,$$

on remplace Z par $\frac{1}{Z}$ et z par $\frac{1}{z}$, on obtient

$$Z = \frac{z^q}{A + Bz + \ldots},$$

qui doit être encore de la forme $Z =$ polynome en z. Donc tous les coefficients sauf A sont nuls, et l'on a $P(z) = Az^q$, qui admet les deux valeurs exceptionnelles $z = o$, $z = \infty$ et celles-là seulement. On voit par là que les points exceptionnels n'appartiennent pas à $\mathfrak{F}$ et que les équations exceptionnelles telles que $R_n(z) = a$ qui leur correspondent sont telles pour tous les points ξ de $\mathfrak{F}$. Cela explique qu'il ne puisse y en avoir plus de deux, puisqu'il y a toujours des points de $\mathfrak{F}$.

Il résulte également de ces considérations que tout point n'ayant qu'un nombre fini d'antécédents distincts ne peut en avoir plus de deux et coïncide avec l'un des points exceptionnels que nous venons de considérer, car si a est un tel point, comme il y a une infinité de points de $\mathfrak{F}$, il y en a un ξ qui est distinct de a et de ses antécédents. Pour ce point ξ, les équations $R_n(z) = a$, $R_n(z) = a_{-1}$, ... sont des équations exceptionnelles et il ne peut y en avoir plus de deux. On comparera ce qui précède avec l'exposé du paragraphe 5 (Chap. I).

Je dis maintenant que l'ensemble $\mathfrak{F}$ est parfait. Soit ξ un point de $\mathcal{F}$. Les équations $R_n(z) = z'$, $R_n(z) = z''$ ont des solutions dans un cercle de centre ξ et de rayon ε, si z' et z'' ne sont pas des points exceptionnels, par exemple s'ils appartiennent à $\mathcal{F}$. Nous avous vu (Chap. I, § 4) qu'il existe des points doubles ou périodiques qui appartiennent à $\mathcal{F}$ en vertu de la nature de leurs multiplicateurs et qui n'ont jamais les mêmes conséquents. Si z' et z'' sont deux tels points, pour l'une au moins des deux équations précédentes on n'aura jamais la solution $z = \xi$, quelle que soit la valeur de n. Supposons que ce soit le cas pour l'équation $R_n(z) = z'$. ξ est alors certainement limite d'antécédents de z' qui appartiennent à $\mathcal{F}$ comme z' lui-même. $\mathcal{F}$ qui est fermé est donc parfait.

De plus, tout point ξ de $\mathcal{F}$ est bien limite d'antécédents d'un point quelconque du plan z_0 distinct des points exceptionnels, car ξ est limite de points qui sont des antécédents de z_0 ou qui sont eux-même limites d'antécédents de z_0.

III. Soit $\overline{P}$ le plan (ou la sphère de Riemann) d'où l'on a enlevé un ou deux cercles de rayons arbitrairement petits contenant les points exceptionnels, s'ils existent, et soit ξ un point de $\mathcal{F}$. Le $n^{\text{ième}}$ conséquent d'un domaine quelconque contenant ξ à son intérieur couvre $\overline{P}$ pour n suffisamment grand.

Pour l'établir, démontrons d'abord le lemme suivant : Soit D un domaine tel que les équations $R_n(z) = z'$ possèdent des racines intérieures à D, lorsque z' appartient au domaine fermé $\overline{P}$; supposons, en outre, qu'en appelant D_1 le conséquent immédiat du domaine D, D soit intérieur au sens large à D_1; je dis que le domaine ouvert D_n, $n^{\text{ième}}$ conséquent de D, couvrira $\overline{P}$ pour une valeur finie de n.

On a, en effet, les inégalités topologiques

$$D < D_1 \leqq D_2 \leqq \ldots \leqq D_n \leqq \ldots$$

Si le lemme n'était pas exact il existerait dans le domaine fermé P des points $\xi^{(\alpha_1)}, \xi^{(\alpha_2)}, \ldots, \xi^{(\alpha_n)}, \ldots$ respectivement extérieurs aux domaines $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}, \ldots, D_{\alpha_n}, \ldots$ ou sur la frontière de ces domaines. Ces points ont au moins un point limite ξ qui appartient à $\overline{P}$. ξ n'est intérieur à aucun domaine D_p; sinon D_p contiendrait un cercle de centre ξ et de rayon ε qui renferme lui-même des points $\xi^{(\alpha_i)}$ dont l'indice α_i est supérieur à p; $\xi^{(\alpha_i)}$, intérieur à D_p, est *a fortiori* intérieur à D_{α_i}, ce qui est contraire à l'hypothèse. Or, dire que ξ n'est intérieur à aucun domaine D_n revient à dire que les équations $R_n(z) = \xi$ n'ont aucun point racine intérieur à D, ce qui est encore contraire à l'hypothèse. Le lemme est donc démontré.

Considérons maintenant un point double répulsif α; si $\mathcal{D}$ désigne l'intérieur d'un cercle de rayon suffisamment petit et de centre α et $\mathcal{D}_1$ le conséquent immédiat de $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} < \mathcal{D}_1$; comme les fonctions $R_n(z)$ prennent toutes les valeurs à l'intérieur de $\mathcal{D}$, sauf les valeurs exceptionnelles, le lemme précédent s'applique et $\mathcal{D}_n$ recouvre $\overline{P}$ à partir d'une certaine valeur de n.

Si α est un point double de multiplicateur égal à $+1$, la propriété subsiste comme nous allons le voir. Soit autour de α, le développement de $R(z)$

$$R(z) = z + a(z-\alpha)^{q+1} + \dots$$

Considérons l'*étoile* relative au point α et particulièrement les domaines D' assemblés autour de α et d'angle au sommet $\frac{2\pi}{q}$ dans lesquels les antécédents de z, obtenus au moyen de la branche de fonction inverse $R_{-1}(z)$ égale à α pour $z = \alpha$, convergent vers α; chacun de ces q domaines a un antécédent qui lui est intérieur sauf en O; inversement, les conséquents de ces domaines les comprennent à leur intérieur au sens large. Ces domaines D' sont tous intérieurs à un cercle c de centre α et de rayon ρ aussi petit qu'on le veut. Si maintenant on décrit un cercle c' de rayon $\rho' < \rho$, on peut prendre ρ' assez petit pour que les régions de c', qui n'appartiennent pas aux D' et qui forment q domaines d'angle au sommet nul assemblés autour de α, fassent partie des secteurs de convergence des $R_n(z)$ vers α, c'est-à-dire soient intérieures aux domaines que nous avons désignés par Δ (§ **10**, **11**).

Ceci posé, soit β un point double ou périodique faisant partie de $\mathcal{F}$ et distinct de α (§ **4**). Il y a dans c' des antécédents de β, en vertu de l'alinéa précédent, et qui sont nécessairement distincts de α; ces antécédents se trouvent nécessairement dans l'intérieur d'un des secteurs tels que D' puisque, dans les autres parties de c', $R_n(z)$ tend vers α pour n infini; il y a donc un conséquent de ce domaine D', soit D'_h, qui contient β à son intérieur. Or, on a

$$D' \leqq D'_1 \leqq D'_2 \leqq \ldots \leqq D'_h \leqq D'_{h+1} \leqq \ldots,$$

et comme D'_h contient un point de $\mathfrak{F}$, on peut encore appliquer le lemme précédent. Si l'on pose $D'_h = E$, le $n^{\text{ième}}$ conséquent de E, soit E_n, couvrira $\overline{P}$ à partir d'une certaine valeur de n; comme D' est contenu dans le cercle c, on voit que c_{n+h} couvrira $\overline{P}$

Si maintenant ξ est un point quelconque de $\mathfrak{F}$, un cercle c de centre ξ et de rayon ε contient un antécédent de rang h de tout point double α de multiplicateur > 1 en module ou égal à $+1$; et il y a au moins un point α remplissant l'une ou l'autre de ces conditions; le domaine conséquent c_h contient alors un cercle de centre α auquel s'applique ce que nous venons de démontrer; les conséquents de ce cercle et par suite les conséquents de c recouvriront donc $\overline{P}$ à partir d'un certain rang.

Il s'ensuit que non seulement en ξ les $R_n(z)$ ne forment pas une suite normale, mais qu'aucune suite extraite des $R_n(z)$ ne peut converger uniformément ou non vers une fonction limite méromorphe en ξ. Car un cercle de centre ξ et de rayon ε arbitrairement petit renferme des antécédents de même rang de tous les points de $\overline{P}$, par exemple d'un point double α et d'un point β faisant partie d'un cycle d'ordre q; soient z' et z'' ces deux antécédents; $R_n(z')$ est constamment égal à α dès que n est assez grand et $R_n(z)$, dans les mêmes conditions, ne prend que les valeurs $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{q-1})$ distinctes de α; il n'y a donc pas de fonctions limites continues au point ξ.

III. L'ensemble $\mathfrak{F}$ a même structure dans toutes ses parties.

En effet, le conséquent de rang h d'un domaine quelconque qui renferme un point ξ de $\mathfrak{F}$ est un domaine qui comprend tous les points de $\mathfrak{F}$ pour une valeur convenable de l'entier h, puisque aucun point de $\mathfrak{F}$ n'est un point exceptionnel. Or la fonction $R_h(z)$ réalise une correspondance continue entre la sphère simple de Riemann et la sphère à d^h feuillets qui est attachée à l'équation algébrique $R_h(y) = z$.

Il s'ensuit aisément que si la partie f de $\mathfrak{F}$ contenue dans D est continue, $\mathfrak{F}$ est continu; si f, en particulier, est formé d'un seul arc régulier de courbe analytique et si de plus $\mathfrak{F}$ ne renferme pas de points critiques de $R_{-1}(z)$, $\mathfrak{F}$ sera constitué par une courbe fermée analytique sans points singuliers. Si f est discontinu en chaque point il en sera de même de $\mathfrak{F}$; car chaque point m de f peut alors être entouré d'une courbe formée d'arcs analytiques et dont tous les points sont infiniment voisins de m et cette propriété sera conservée par la substitution $[Z \mid R_h(z)]$.

Si $\mathfrak{F}$ renferme des points intérieurs, c'est-à-dire si $\mathfrak{F}$ renferme tous les points d'un cercle, il comprend tout le plan. En effet dans ce cas il n'y a pas de points exceptionnels, car les points exceptionnels n'appartiennent jamais à $\mathfrak{F}$, mais bien à des régions où les $R_n(z)$ convergent régulièrement ou périodiquement, et si l'on prend les antécédents d'un point d'une telle région, il y en a qui sont infiniment voisins de tout point de $\mathfrak{F}$ qui par suite n'est dense nulle part. Si donc $\mathfrak{F}$ comprend un domaine circulaire c, le $n^{\text{ième}}$ conséquent de c couvre tout le plan pour une valeur convenable de n; donc tous les points du plan appartiennent à $\mathfrak{F}$. Cette circonstance peut se produire et c'est ce que prouve l'exemple suivant dû à S. Lattès. On considère la fonction elliptique de Weierstrass pu et la fonction rationnelle qui permet d'exprimer $p2u$ en fonction de pu

$$p2u = R[pu].$$

Si l'on pose $z = pu$, à une valeur z_0 de z correspondront plusieurs valeurs de u dans le parallélogramme des périodes; soit u_0 l'une d'elles. A un petit cercle c entourant z_0 correspond un petit domaine δ entourant u_0; le domaine $2^n\delta$ couvre tout un parallélogramme de périodes pour n suffisamment grand, et comme on a $R_n(z) = p(2^n u)$, $R_n(z)$ prend toutes les valeurs dans c, c'est-à-dire que c_n couvre tout le plan. Il s'ensuit évidemment que tout point z_0 du plan appartient à $\mathfrak{F}$. C'est là un cas fort curieux, mais l'itération d'une telle fraction rationnelle ne présente que peu d'intérêt au point de vue de la théorie des fonctions. La recherche de l'ensemble dérivé des conséquents d'un point est alors un problème arithmétique sur lequel on trouvera quelques indications dans la Note de M. Lattès.

Si nous laissons de côté ce cas singulier, $\mathfrak{F}$ est alors un ensemble parfait sans point intérieurs qui peut être partout discontinu, ou au contraire formé d'un continu unique; dans ce dernier cas, il peut être constitué par une courbe de Jordan fermée ou par une courbe non fermée telle qu'un segment de droite. Nous avons étudié dans le Chapitre précédent des exemples de ces différentes sortes, les lignes ou ensembles frontières considérées dans ce Chapitre coïncidant évidemment avec l'ensemble désigné ici par $\mathcal{F}$.

Relativement au cas où $\mathcal{F}$ est partout discontinu, on peut démontrer le théorème suivant : *Si, en appelant comme toujours d le degré de* $R(z)$, *on a* $|R'(z)| > d$ *en tous les points de* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ *est un ensemble parfait discontinu de longueur nulle.*

Je dis d'abord que $\mathcal{F}$ est borné, car si $\mathcal{F}$ contenait le point à l'infini, ce point n'étant pas un point double attractif, on aurait pour de grandes valeurs de z

$$R(z) = kz + h + \frac{l}{z} + \ldots,$$
$$|R'(\infty)| = |k| \leqq 1 < d.$$

$\mathcal{F}$ ne contient d'ailleurs aucun point critique de $R_{-1}(z)$ et l'on a en tout point de $\mathcal{F}$ et pour toutes les branches de $R_{-1}(z)$

$$|R'_{-1}(z)| < \frac{1}{d}.$$

De chaque point de $\mathcal{F}$ comme centre décrivons un cercle de rayon z; on peut prendre z assez petit pour que l'on ait à l'intérieur de tous ces cercles

$$|R'_{-1}(z)| < c < \frac{1}{d}.$$

Il existe alors, en vertu du lemme de Borel-Lebesgue, un nombre fini de cercles de cette famille, jouissant de cette propriété que tout point de $\mathcal{F}$ est intérieur à l'un au moins d'entre eux. Ces cercles en nombre fini forment un ou un nombre fini de domaines simplement ou multiplement connexes, limités chacun par des courbes formées d'un nombre fini d'arcs de cercle et qu'on peut supposer sans points doubles; ces domaines renferment tous des points de $\mathcal{F}$ et tout point de l'un d'eux est à une distance de $\mathcal{F}$ au plus égale à r.

Transformons cette figure par la substitution algébrique $[z|R_{-1}(z)]$ qui appliquée aux points de $\mathcal{F}$ donne de nouveau tous les points de $\mathcal{F}$. Considérons l'une des courbes γ qui limitent un de nos domaines; quand z décrit γ dans le sens direct, les valeurs de $R_{-1}(z)$ se répartissent en un certain nombre de cycles, les valeurs d'un même cycle se permutant circulairement entre elles. A un cycle d'ordre ν correspond ainsi une courbe γ_{-1} qui se ferme quand z a décrit ν fois γ; en vertu de la relation qui lie les différentielles de deux arcs correspondants et de l'hypothèse faite sur $R'(z)$, on aura, en appelant l et l_{-1} les longueurs des deux courbes γ et γ_{-1},

$$l_{-1} < \nu c l,$$

et pour l'ensemble des courbes γ_{-1} qui correspondent à une même courbe

$$\Sigma l_{-1} < c l \Sigma \nu = d c l.$$

Comme $dc = K < 1$, on a

$$\Sigma l_{-1} < K l.$$

En appelant L la somme des longueurs de toutes les courbes γ et L_{-1} la somme des longueurs de toutes les courbes γ_{-1}, on a également

$$L_{-1} < KL.$$

Les domaines initiaux sont ainsi remplacés par d'autres également bornés et limités par des courbes formées d'arcs algébriques, sans points doubles et sans points communs deux à deux, dont la somme des longueurs vérifie la relation précédente. Les points de ces nouveaux domaines sont encore à une distance de $\mathfrak{F}$ moindre que r, car à un chemin de longueur $\leqq r$ intérieur à un domaine initial et aboutissant en un point de $\mathfrak{F}$, correspondra un chemin de longueur inférieure à r et même à $\frac{r}{d}$ aboutissant en un point de $\mathfrak{F}$. Les inégalités

$$|R'_{-1}(z)| < c < \frac{1}{d}$$

seront donc encore vérifiées dans les nouveaux domaines.

En leur appliquant de nouveau la même transformation, on arrivera à la $n^{\text{ième}}$ opération à enfermer les points de $\mathfrak{F}$ dans des domaines bornés limités par des courbes dont la somme des longueurs sera inférieure à $K^n L$; on pourra, bien entendu, ne conserver que celles de ces courbes qui n'en renferment pas d'autres à leur intérieur. Comme $K^n L$ peut être rendu aussi petit qu'on le veut, $\mathfrak{F}$, qui est parfait, est partout discontinu et même de longueur nulle. On voit que le théorème a été établi sans faire *a priori* aucune hypothèse sur les points doubles de la substitution. Mais on démontre facilement, en s'appuyant sur ce qui sera démontré à la fin de ce Chapitre, qu'il y a alors un point double attractif unique dont le domaine a pour frontière $\mathfrak{F}$.

Remarquons qu'il n'est guère possible de remplacer les hypothèses faites par d'autres de même nature qui soient moins restrictives; en effet, pour $R(z) = z^d$, l'ensemble $\mathfrak{F}$ est la circonférence $|z| = 1$, donc un continu, et l'on a en tout point de $\mathfrak{F}$

$$|R'(z)| = d\ (^1).$$

Il peut également arriver et nous en verrons plus tard des exemples que $\mathfrak{F}$ ne soit ni continu, ni partout discontinu. Dans ce cas $\mathfrak{F}$ renferme au moins une infinité dénombrable de continus distincts. J'esquisse seulement la démonstration, car nous en trouverons d'analogues à propos des domaines des points doubles. Soit C un ensemble continu faisant partie de $\mathfrak{F}$ et tel que tout ensemble contenant C et contenu dans $\mathfrak{F}$ soit discontinu; nous dirons que C est continu maximum. En transformant C par $R_{-1}(z)$ on obtient un ou plusieurs continus distincts qui sont des continus maxima, antécédents immédiats de C, d'où l'on déduira les antécédents successifs de C. Si C renferme un antécédent ξ_{-h} de l'un ξ de ses points, C est invariant par la substitution $[z \mid R_h(z)]$. Dans ce cas on peut supposer $h = 1$, en remplaçant $R(z)$ par $R_h(z)$, ce qui ne change pas $\mathfrak{F}$. Ceci posé, $\mathfrak{F}$ n'étant pas continu, il existe un antécédent C_{-1} de C distinct de C, sinon les antécédents successifs d'un point ξ de C seraient toujours de C; or il existe au moins un point a de $\mathfrak{F}$ extérieur à C qui est limite d'antécédents de ξ. Si C ne renferme jamais les antécédents de ses points on formera une

---

(1) J'ai toutefois obtenu la proposition suivante qui s'obtient en appliquant aux fonctions $R'_n(z)$ un théorème de M. Koebe (*voir* Chap. VI) :

« Si en tout point de $\mathfrak{F}$ on a $|R'(z)| \geqq d$, les points de $\mathfrak{F}$ peuvent être enfermés à l'intérieur d'un nombre fini de courbes dont la somme des longueurs reste bornée et dont tous les points sont à une distance de $\mathfrak{F}$ inférieure à un nombre positif arbitraire ε. »

$\mathfrak{F}$, continu ou discontinu, est alors de longueur finie.

suite de continus $C_{-1}, C_{-2}, \ldots, C_{-n}, \ldots$ qui seront tous sans points communs deux à deux. Dans le cas contraire, on peut supposer C invariant par $[z | R(z)]$; mais comme il y a un C_{-1} entièrement distinct de C, on pourra encore former une chaîne de continus antécédents de C sans points communs deux à deux. (Le raisonnement est analogue à celui employé au Chapitre I au sujet des antécédents d'un point.)

Nous pouvons, en outre, remarquer que tout point de $\mathcal{F}$ est limite de points appartenant chacun à un continu contenu dans $\mathcal{F}$.

IV. Tout point de $\mathcal{F}$ est limite de points périodiques.

Soit ξ un point de $\mathcal{F}$ que pour plus de commodité nous supposerons distinct des pôles et des points critiques de la fonction $R_{-2}(z)$ et du point à l'infini, pour le cas où certains de ces points appartiendraient à $\mathcal{F}$. Les points, laissés de côté pour la démonstration, sont en nombre fini. Dans un cercle de centre ξ et de rayon r les d^2 branches de la fonction $R_{-2}(z)(d^2 \geqq 4)$ sont donc holomorphes et bornées et jamais égales entre elles deux à deux. Prenons trois de ces fonctions, A, B, C, et considérons un cercle c de centre ξ et de rayon quelconque $\rho < r$.

Supposons qu'il existe une suite infinie de valeurs entières de n telles qu'aucune des trois équations

$$R_n(z) = A, \qquad R_n(z) = B, \qquad R_n(z) = C$$

n'ait de zéros dans c, et considérons la fonction

$$\psi_n(z) = \frac{R_n(z) - A}{R_n(z) - B} \frac{C - B}{C - A}.$$

Le quotient $D = \dfrac{C - B}{C - A}$ représente une fonction holomorphe dans c, qui ne prend ni la valeur zéro, ni la valeur 1 et dont le module reste compris entre deux nombres positifs. $\psi_n(z)$, pour les valeurs de n considérées, est uniforme dans c et même holomorphe, ne pouvant devenir infinie que si $R_n(z) = B$, ce qui n'a pas lieu dans c; elle n'est jamais nulle, car cela exigerait $R_n(z) = A$; jamais égale à 1, car il faudrait pour cela qu'on eût $R_n(z) = C$. De toute suite de fonctions holomorphes dans un cercle où elles ne prennent jamais les valeurs 0 et 1, on peut en extraire une autre qui converge uniformément vers une fonction holomorphe dans ce cercle ou vers l'infini (Montel). Soit $\psi(z)$ cette fonction limite; on aurait alors pour cette suite de valeurs de n

$$\lim \frac{R_n(z) - A}{R_n(z) - B} = \frac{\psi(z)}{D(z)}$$

uniformément, ou si $\psi(z) = \infty$

$$\lim \frac{R_n(z) - A}{R_n(z) - B} = \infty.$$

Dans ce second cas, on aurait aussi

$$\lim \frac{B - A}{R_n(z) - B} = \infty,$$

et comme $|B - A|$ est compris entre deux constantes finies positives :

$$\lim R_n|z| = B.$$

Si $\psi(z)$ est une fonction holomorphe, il en est de même de $\frac{\psi(z)}{D}$. On devrait alors avoir

$$\lim \frac{B - A}{R_n(z) - B} = \frac{\psi(z)}{D} - 1$$

et $R_n(z)$ convergerait uniformément vers la fonction méromorphe :

$$B + \frac{B - A}{\frac{\psi(z)}{D} - 1}.$$

Or, aucune suite extraite des $R_n(z)$ ne converge uniformément dans c. Il faut donc que pour au moins une valeur de n et même pour une infinité appartenant à une suite d'entiers donnée à l'avance, l'une au moins des trois équations

$$R_n(z) = A, \qquad R_n(z) = B, \qquad R_n(z) = C$$

ait une racine dans c; ce qui revient à dire que l'équation

$$R_{n+2}(z) = z$$

a une racine dans c. Ceci ayant lieu, quel que soit le rayon ρ de c, on voit que tout point de $\mathcal{F}$ est un point périodique ou un point limite de points périodiques, la seconde alternative étant d'ailleurs toujours exacte, puisque $\mathcal{F}$ est parfait; pour la même raison, le résultat est aussi valable pour les points, en nombre limité, qui ont été laissés de côté dans la démonstration. De plus, les points périodiques qui tendent vers ξ ont pour ordres les diviseurs d'une suite infinie d'entiers quelconques, par exemple les nombres premiers.

V. En un point de $\mathcal{F}$, aucune suite extraite des fonctions dérivées $R'_n(z)$ ne converge uniformément.

Je dis d'abord que dans un cercle ayant pour centre un point de $\mathcal{F}$, aucune suite de fonctions $R'_{\lambda_1}(z)$, $R'_{\lambda_2}(z)$, ..., $R'_{\lambda_n}(z)$ n'est uniformément bornée. Un tel cercle renferme, en effet, des points périodiques. Il y a toujours un tel point z' faisant partie d'un cycle dont tous les points sont à distance finie, en sorte que les $R_{\lambda_n}(z')$ ne peuvent prendre que p valeurs finies distinctes; si A est la plus grande en valeur absolue et si z désigne le rayon de c, on aura dans c

$$R_{\lambda_n}(z) = R_{\lambda_n}(z') + \int_{z'}^{z} R'_{\lambda_n}(z)\,dz.$$

L'inégalité $|R'_{\lambda_n}(z)| < K$ entraînerait alors

$$|R_{\lambda_n}(z)| < A + 2Kr$$

et les $R_{\lambda_n}(z)$ seraient bornées dans leur ensemble dans c, ce qui est impossible. Je vais montrer que, si les $R_n(z)$ n'ont pas de valeurs exceptionnelles, les $R'_{\lambda_n}(z)$ prennent la valeur zéro dans c. Pour éviter les difficultés relatives au point à l'infini qui joue ici un rôle particulier [les $R'_n(z)$ n'étant pas invariantes par une substitution homographique], nous emploierons l'artifice suivant. Soit α un point distinct des points critiques de $R_{-1}(z)$ et de leurs antécédents et posons

$$t = \frac{1}{z-\alpha}, \qquad T = \frac{1}{Z-\alpha}.$$

La relation $Z = R(z)$ devient $T = \Phi(t)$, et l'on a

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{R_n(z)-\alpha}.$$

Les points critiques de $\Phi_{-1}(t)$, qui sont au moins au nombre de deux, sont les points γ qui s'obtiennent en posant $\gamma = \Phi(\theta)$, θ étant une racine *finie* de $\Phi'(\theta) = 0$; les antécédents de ces points ne coïncident jamais avec le point à l'infini. Ceci posé, on a

$$\Phi'_n(t) = \Phi'(t)\Phi'[\Phi(t)]\Phi'[\Phi_2(t)]\ldots\Phi'[\Phi_{n-1}(t)].$$

Soit G l'ensemble déduit de $\mathcal{J}$ par $t = \frac{1}{z-\alpha}$. Dans tout domaine contenant un point de G, l'équation

$$\Phi_{n-1}(t) = \theta$$

a des racines pour n suffisamment grand. Soit t' l'une d'elles : on a

$$\Phi'_n(t') = \Phi'(t')\Phi'(t'_1)\ldots\Phi'(t'_{n-1})$$

et le dernier facteur est égal à $\Phi'(\theta)$, c'est-à-dire à zéro. Je dis que les $n-1$ premiers facteurs ne sont pas infinis, car si $\Phi'(t'_{n-k-1})$ était infini, t'_{n-k-1} serait un pôle de $\Phi'(t)$ ou de $\Phi(t)$, t'_{n-k} serait donc infini. Or :

$$t'_{n-1} = \theta,$$
$$t'_n = \Phi(\theta) = \gamma,$$
$$\Phi_k(t'_{n-k}) = \gamma.$$

L'infini serait donc un antécédent du point critique γ, ce qui n'a pas lieu. On a donc bien $\Phi'_n(t') = 0$. Or, de

$$R_n(z) = \alpha + \frac{1}{\Phi_n(t)},$$

on déduit

$$R'_n(z) = \frac{t^2\Phi'_n(t)}{Q_n^2(t)}.$$

Pour $t = t'$, $z = z' = \frac{1}{\alpha} + t'$, il vient

$$R'_n(z') = \frac{t'^2\Phi'_n(t')}{\gamma^2}.$$

On aura $R'_t(z') = 0$, si $\gamma \neq 0$, ce qu'on peut supposer, puisque $\Phi_{-1}(t)$ a au moins deux points critiques distincts. Ainsi les fonctions $R'_{\lambda_n}(z)$ s'annulent toutes dans c pour λ_n suffisamment grand.

Supposons maintenant que les $R_n(z)$ aient une valeur exceptionnelle. Si cette valeur exceptionnelle est infinie, $R(z)$ est un polynome; appelons-le $P(z)$. Comme on a

$$P'_n(z) = P'(z)P'(z_1)\ldots P'(z_{n-1})$$

et que l'équation $P'(z) = 0$ a au moins une racine β, si β n'est pas également une valeur exceptionnelle, on aura

$$z_{n-1} = P_{n-1}(z) = \beta$$

en certains points z intérieurs à un domaine quelconque renfermant un point de $\mathfrak{J}$, pourvu que n soit assez grand; en un tel point on a aussi $P'_n(z) = 0$, puisque les $P'(z_i)$ sont finis.

Effectuons maintenant le changement de variables :

$$z = \frac{1}{t-\alpha}, \qquad Z = \frac{1}{T-\alpha}.$$

La substitution $Z = P(z)$ devient $T = R(t)$ qui est la substitution la plus générale admettant la valeur exceptionnelle α, $P(z)$ étant un polynome arbitraire. On a comme précédemment

$$R_n(t) = \alpha + \frac{1}{P_n(z)},$$

$$R'_n(t) = \frac{P'_n(z)}{P_n^2(z)} z^2.$$

Soit toujours

$$P_{n-1}(z') = \beta, \qquad P'(\beta) = 0, \qquad P_n(z) = P(\beta) = \gamma.$$

Il vient pour le point t' correspondant à z'

$$R'_n(t') = \frac{z^2}{\gamma^2} P'_n(z') = 0, \qquad \text{si} \qquad \gamma \neq 0.$$

Si pour toutes les racines β de $P'(z)$ on a $\gamma = P(\beta) = 0$, $P(z)$ est divisible par $P'(z)$, puisque l'ordre de multiplicité des racines communes à ces deux polynomes qui sont les racines multiples de $P(z)$ est plus grand d'une unité pour P que pour P'; ceci n'a lieu que pour $P(z) = A(z-\beta)^m$; il y a alors une deuxième valeur exceptionnelle.

Il résulte de cette discussion que toute suite des fonctions $R'_{\lambda_n}(z)$ prend au voisinage de tout point de $\mathfrak{J}$ des valeurs infiniment grandes et des valeurs nulles, et ne peut, par conséquent, former une suite normale; ce résultat est démontré dans le cas où les

$R_n(z)$ ont une valeur exceptionnelle au plus. Il subsiste, on le verra facilement, dans le cas simple où il y a deux valeurs exceptionnelles pour les $R_n(z)$.

Sur l'ensemble $\mathcal{J}$ lui-même, on verra par les exemples du Chapitre précédent que $R'_n(z)$ peut tendre uniformément vers l'infini, ou avoir des limites d'indétermination formant un continu. Ce point sera précisé ultérieurement.

VI. Le nombre des régions distinctes dans lesquelles $\mathcal{J}$ divise le plan ne peut être que 1 ou 2, s'il n'est pas infini.

Les régions considérées sont les domaines ouverts et d'un seul tenant dans lesquels les $R_n(z)$ forment une suite normale et dont tous les points frontières appartiennent à $\mathcal{J}$, ou, si l'on veut, les domaines connexes dans lesquels les $R_n(z)$ se divisent en suites parallèles uniformément convergentes et qui ne sont contenus dans aucun autre domaine jouissant de la même propriété. Ces domaines $\mathcal{C}$ sont donc contigus à $\mathcal{J}$. Si une suite partielle extraite des $R_n(z)$ converge uniformément dans un domaine fermé D intérieur à $\mathcal{C}$ vers une fonction limite $\Phi(z)$ méromorphe dans D, elle converge uniformément dans tout autre domaine fermé D' intérieur à $\mathcal{C}$ vers une fonction limite égale à $\Phi(z)$ ou à son prolongement analytique, obtenu par des chaînes de cercles intérieurs à $\mathcal{C}$, $\Phi(z)$ étant uniforme et méromorphe dans $\mathcal{C}$.

Les domaines conséquents et antécédents de $\mathcal{C}$ sont des domaines de même nature; cela découle immédiatement du paragraphe **26**. Considérons la suite des conséquents $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_n, \ldots$ de $\mathcal{C}$; si tous ces domaines sont distincts, il y a une infinité de régions déterminées par $\mathcal{J}$. Si deux de ces domaines coïncident à $\mathcal{C}_p = \mathcal{C}_{p+h}$, on peut supposer que $\mathcal{C}_p$ est un domaine invariant en remplaçant $R(z)$ par $T(z) = R_h(z)$.

Soit donc un domaine contigu à $\mathcal{J}$ et de plus invariant $\mathcal{C}'$. Si $\mathcal{C}'$ n'est pas *complètement invariant*, il y a une infinité d'antécédents de $\mathcal{C}'$ qui sont distincts; en effet, il y a au moins un antécédent immédiat z'_{-1} d'un point z' de $\mathcal{C}'$ qui n'appartient pas à $\mathcal{C}'$. Formons alors la chaîne d'antécédents

$$z', \quad z'_{-1}, \quad z'_{-2}, \quad \ldots, \quad z'_{-n}, \quad \ldots,$$

telle que

$$z'_{-(n-1)} = T(z'_{-n}).$$

Si deux points z'_{-n} et $z'_{-(n+q)}$ pouvaient être joints par une ligne l sans point commun avec F, leurs conséquents de rang $n+q-1$; z'_1 et z'_{q-1} jouiraient de la même propriété, la ligne l_{n+q-1} ne rencontrant pas $\mathfrak{F}$. Or z'_{q-1} conséquent d'un point de $\mathcal{C}'$ appartient à $\mathcal{C}'$ qui est invariant, et z'_{-1} n'appartient pas à $\mathcal{C}'$. Donc s'il n'y a qu'un nombre limité de régions, $\mathcal{C}'$ est complètement invariant, c'est-à-dire contient les conséquents et antécédents de tous ses points. Soit alors $\mathcal{C}''$ une région contiguë distincte de $\mathcal{C}'$. On raisonnera sur $\mathcal{C}''$ comme sur $\mathcal{C}$; si le nombre des régions est fini, il y a un domaine conséquent de $\mathcal{C}''$ qui est complètement invariant par $T_k(z) = U(z)$. Nous aurons donc deux domaines distincts $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}'''$ complètement invariants par cette dernière substitution; s'il existe un domaine contigu à $\mathfrak{F}$ distinct de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}'''$, on continuera l'application du même raisonnement. En général, s'il y a exactement N régions distinctes contiguës à $\mathfrak{F}$, N étant fini, ces N régions sont complètement invariantes relativement à une certaine puissance de la substitution donnée que nous appelons $H(z)$. On a alors $N \leqq 2$. En effet si $N \geqq 2$, les régions considérées sont simplement connexes; car si l'une d'elles, $\mathcal{C}$, ne l'était pas, on pourrait décrire dans $\mathcal{C}$ une ligne fermée γ partageant le plan (ou la sphère) en deux régions et telle qu'il y ait des points frontières de $\mathcal{C}$, donc des points de $\mathfrak{F}$, de part et d'autre de γ; soient a et b deux points de $\mathfrak{F}$ séparés par γ; a est limite d'antécédents de points d'une autre région contiguë $\mathcal{C}'$, donc limite de points de $\mathcal{C}'$, puisque $\mathcal{C}'$ est complètement invariante; de même pour b. Il y a donc des points de $\mathcal{C}'$ séparés par γ, et comme γ appartient à $\mathcal{C}$ et non à $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}'$ ne serait pas d'un seul tenant. Les régions $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, ... sont donc simplement connexes et contiennent alors chacune $d-1$ points critiques de la fonction $H_{-1}(z)$, $H(z)$ étant de degré d. Le nombre total de ces points critiques étant $2(d-1)$, on a $N \leqq 2$ (§ 6). On voit ainsi que s'il y a un cycle de p domaines, complètement invariant, on a nécessairement $p = 2$.

Telles sont les propriétés générales les plus caractéristiques de l'ensemble $\mathfrak{F}$, au sujet duquel se posent encore bien des questions dont la solution générale ne paraît pas facile, par exemple la suivante : les régions contiguës à $\mathfrak{F}$ peuvent-elles avoir des points frontières inaccessibles? En particulier, s'il y a plus de deux régions contiguës distinctes (et par suite une infinité), deux régions contiguës peuvent-elles avoir la même frontière, sans être identiques? Quels sont les cas où $\mathcal{F}$ est formé de lignes simples, par exemple de lignes analytiques, en nombre fini ou en infinité dénombrable? Nous verrons par la suite qu'on peut répondre à ces questions dans des cas assez étendus, mais qu'il subsiste toujours des cas douteux.

28. Nous avons étudié dans ce qui précède les propriétés de $\mathcal{F}$, sans nous préoccuper de la nature des fonctions limites des $R_{\alpha}(z)$ dans les régions contiguës. Nous allons maintenant étudier ces fonctions limites et rechercher par conséquent quel est l'ensemble dérivé des conséquents d'un point n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ et jusqu'à quel point cet ensemble dérivé dépend de la position du point initial. Dans tous les exemples rencontrés jusqu'ici, en laissant de côté toutefois certaines substitutions du premier degré, les fonctions limites sont des constantes en nombre fini. Il est clair d'ailleurs que ces fonctions limites ne peuvent être que des constantes si elles sont en nombre fini, car si la suite des fonctions $R_{\alpha_n}(z)$ tend vers $f(z)$ dans un domaine contigu à $\mathcal{F}$, la suite $R_{h+\alpha_n}(z)$ tend vers $R_h[f(z)]$ et en faisant $h = 1, 2, \ldots$ on doit n'obtenir qu'un nombre limité de fonctions distinctes. On a donc

$$R_h[f(z)] = R_{h+k}[f(z)],$$

pour une valeur de k non nulle; $f(z)$ est donc une racine d'une équation telle que $R_h(\lambda) = R_{h+k}(\lambda)$, qui n'est jamais une identité pour $k \not\equiv 0$; $f(z)$ étant une fonction analytique est donc une constante.

Faisons *a priori* l'hypothèse que la suite des $R_{\alpha_n}(z)$ converge vers une constante, la convergence étant uniforme, comme on le sait, quand z est dans un domaine fermé D intérieur à une région contiguë à $\mathcal{F}$; la suite des domaines conséquents $D_{\alpha_1}, D_{\alpha_2}, \ldots, D_{\alpha_n}, \ldots$ tend vers le point a. Si deux domaines D_{α_p} et $D_{\alpha_{p+q}}$ appartiennent à la même région contiguë à $\mathcal{F}$, a est un point périodique. En effet posons $\alpha_{p+q} - \alpha_p = h$, $\beta_n = \alpha_n - \alpha_{p+q}$. Dans le domaine D_{α_p} les fonctions $R_{h+\beta_n}(z)$ tendent vers a; dans le domaine $D_{\alpha_{p+q}}$ les fonctions $R_{\beta_n}(z)$ tendent vers a; comme ces deux domaines sont intérieurs à une même région contiguë à $\mathcal{F}$, il en résulte que $R_{h+\beta_n}(z)$ tend vers a également dans le domaine $D_{\alpha_{p+q}}$; en vertu de l'identité

$$R_{h+\beta_n}(z) = R_h[R_{\beta_n}(z)],$$

on a en passant à la limite

$$a = R_h(a).$$

La région contiguë $\mathcal{C}$ qui contient D_{α_p} et $D_{\alpha_{p+q}}$ est invariante par la substitution $[z | R_h(z)]$, le point a est invariant par cette même substitution. Relativement à la substitution $[z | R_h(z)]$, les régions $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, ..., $\mathcal{C}_{h-1}$ forment un cycle dont l'ordre peut être supposé rigoureusement égal à h, de sorte que $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n'}$ si $n \equiv n'$ (mod h) et seulement dans ce cas; les conséquents du point a forment également un cycle dont l'ordre est un diviseur de h, mais peut être plus petit que h; soit $h' = \frac{h}{\delta}$ l'ordre de ce cycle. On voit alors qu'il existe une suite d'entiers $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ tels que si z est un point de $\mathcal{C}$ par exemple, les points, $z_{h\gamma_n+r}$ restent à l'intérieur de $\mathcal{C}_r$ et tendent vers le point limite a_r $(r < h)$; à deux valeurs z et z' distinctes correspondra le même point limite si $r \equiv r'$ (mod h'), ce qui se présentera pour $h' < h$; le point a_r est alors nécessairement un point frontière commun des δ régions distinctes :

$$\mathcal{C}_r, \quad \mathcal{C}_{h'+r}, \quad \ldots, \quad \mathcal{C}_{(\delta-1)h'+r}.$$

Si $h' = h$, les points $a, a_1, \ldots, a_{h-1}$ peuvent être soit des points intérieurs, soit des points frontières des régions correspondantes. Pour que la première circonstance se présente, il faut et il suffit que a n'appartienne pas à $\mathcal{F}$, a est alors un point périodique attractif. En effet, un point périodique de multiplicateur plus grand que 1 en module ou égal à une racine de l'unité appartient à $\mathcal{F}$. Quant aux points périodiques dont le multiplicateur est de la forme $e^{i\theta}$, θ incommensurable à 2π, s'ils n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$, aucune fonction limite n'est une constante dans un domaine contenant un tel point. Car si ce point a est à distance finie, on a, autour de a,

$$R_h(z) = a + S(z-a) + (z-a)^2 + \ldots \quad (S = e^{i\theta})$$

$$R_{nh}(z) = a + S^n(z-a) + \ldots,$$

et par suite

$$R_{nh}(a) = a, \qquad |R'_{nh}(a)| = |S^n| = 1.$$

Si une suite quelconque des fonctions $R_{nh}(z)$ tendait vers une fonction limite constante dans un cercle de a, cette constante serait égale à a, donc finie, et l'on aurait $\lim R'_{nh}(z) = 0$, ce qui est incompatible avec $|R'_{nh}(a)| = 1$. Aucune suite extraite des fonctions $R_n(z)$ n'a pour limite une constante, car d'une telle suite on pourrait en extraire une autre où les entiers n seraient congrus entre eux (mod. h), c'est-à-dire de forme $\lambda h - k$, et de l'égalité

$$\lim R_{\lambda h - k}(z) = C,$$

on déduirait

$$\lim R_{\lambda h}(z) = R_k(C) = \text{const.}$$

Ainsi donc, si une suite infinie telle que $R_{\alpha_1}(z)$, $R_{\alpha_2}(z)$, ..., $R_{\alpha_n}(z)$, ..., z étant dans une région contiguë à $\mathcal{F}$, tend vers une fonction limite constante a, et si a n'appartient pas à $\mathcal{F}$, c'est un point périodique attractif. Si a appartient à un cycle d'ordre $h(a, a_1, a_2, \ldots, a_{h-1})$, les h points du cycle sont respectivement intérieurs aux régions contiguës à $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{h-1})$ qui forment elles-mêmes un cycle de domaines d'ordre h et qu'on peut appeler les *domaines immédiats* des points a, $a_1, \ldots, a_{h-1}$ respectivement. Si ce cycle de domaines n'est pas complètement invariant, ce qui est toujours le cas pour $h > 2$, il y a alors une infinité dénombrable de domaines antécédents des C_i dont l'ensemble constitue le *domaine total d'attraction*, cette fois non connexe, du cycle $(a, a_1, \ldots, a_{h-1})$, ou les domaines totaux d'attraction des points a, a_1, a_2, ... respectivement, suivant qu'on a en vue la substitution $[z \,|\, R(z)]$, ou la substitution $[z \,|\, R_h(z)]$. Dans l'un quelconque de ces domaines, toutes les fonctions $R_n(z)$ convergent périodiquement vers $(a, a_1, \ldots)$ et il n'y a pas d'autres fonctions limites que ces h constantes.

Le cas où a est à la fois point de $\mathcal{F}$ et point limite de conséquents de certains domaines du plan se présente, comme nous le savons, quand a est un point périodique dont le multiplicateur est une racine $r^{\text{ième}}$ de l'unité. Je ne possède pas d'exemple où la même circonstance se présente, sans que a soit un point périodique de cette nature; mais il est infiniment probable qu'il en existe. Il est parfaitement admissible, entre autres circonstances, qu'un point double répulsif a soit limite de conséquents de certains domaines, en sorte qu'on ait $\lim R_{\alpha_n}(z) = a$, pour une certaine suite d'entiers α_n et pour z intérieur à un domaine D; mais alors les $R_n(z)$ ont d'autres fonctions limites que la constante a et même une infinité (§ 15).

Supposons maintenant que les $R_n(z)$ aient une fonction limite non constante; soit $R_{\alpha_1}(z)$, $R_{\alpha_2}(z)$, ..., $R_{\alpha_n}(z)$, ... une suite de fonctions itérées qui, dans une région contiguë à $\mathfrak{J}$, convergent vers la fonction méromorphe non constante $f(z)$, uniformément dans tout domaine fermé complètement intérieur à $\mathfrak{C}$; soit : $f(z_0) = \xi$, z_0 intérieur à $\mathfrak{C}$; il s'ensuit, qu'à partir d'un certain rang, les fonctions $R_{\alpha_n}(z)$ prennent toutes la valeur ξ dans le voisinage de z_0, c'est-à-dire à l'intérieur de $\mathfrak{C}$ (1). Donc ξ n'appartient pas à $\mathfrak{J}$. Si z décrit un domaine fermé D complètement intérieur à $\mathfrak{C}$, $y = f(z)$ décrit D' complètement intérieur à une région contiguë $\mathfrak{C}'$. Les fonctions $R_n(y)$ et en particulier les fonctions $R_{\alpha_{n+1}-\alpha_n}(y)$ forment une famille normale dans $\mathfrak{C}'$. De toute suite infinie de ces dernières fonctions, on peut en extraire une autre qui converge uniformément vers la fonction limite $\psi(y)$. Il est d'ailleurs permis de supposer, pour supprimer toute discussion relative au point à l'infini, que ce point fait partie de $\mathfrak{J}$. Les domaines D et D' sont alors bornés; les $R_n(z)$ sont holomorphes dans D ainsi que $f(z)$; les $R_n(y)$ et $\psi(y)$ sont holomorphes dans D'.

Posons

$$R_{\alpha_{n+1}-\alpha_n}(y) = \psi_{\alpha_n}(y),$$

on aura

$$\lim \psi_{\beta_n}(y) = \psi(y),$$

uniformément dans D', les β_n étant pris parmi les α_n.

D'autre part, si l'on pose : $y = f(z)$, $R_{\beta_n}(z) = z_{\beta_n}$ (y intérieur à D', z intérieur à D), on a identiquement

$$\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n}) = z_{\beta_{n+1}}.$$

Mais z_{β_n} étant à partir d'un certain rang intérieur à D', on a,

(1) Montel, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 490.

on a, pour $n > n'$,

$$|\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n}) - \psi(z_{\beta_n})| < \varepsilon,$$

ε nombre positif arbitraire, cela à cause de l'uniformité de la convergence de $\psi_{\beta_n}(y)$ vers $\psi(y)$ dans le domaine D'. D'autre part, z_{β_n} tendant vers $f(z) = y$ et la fonction $\psi(y)$ étant continue, on a

$$|\psi(z_{\beta_n}) - \psi(y)| < \varepsilon$$

pour $n > n''$. Il s'ensuit que

$$|\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n}) - \psi(y)| < 2\varepsilon$$

pour $n > n'$ et n'', c'est-à-dire que $\psi_{\beta_n}(z_{\beta_n})$ tend vers $\psi(y)$. Mais $z_{\beta_{n+1}}$ tend vers y. L'identité écrite plus haut conduit alors à

$$\psi(y) = y.$$

Ainsi les fonctions $R_{\alpha_{n+1}-\alpha_n}(y)$ qui forment une famille normale dans D' (et même dans $\mathfrak{C}'$) ont toutes leurs fonctions limites égales à y. Il s'ensuit aisément qu'elles convergent uniformément vers y dans tout domaine intérieur à $\mathfrak{C}'$; mais l'essentiel est qu'elles ont au moins une fonction limite égale à y.

Il suit de là que si dans une région C contiguë à $\mathfrak{F}$, les $R_n(z)$ ont au moins une fonction limite non constante, il existe une région $\mathfrak{C}'$, conséquente de $\mathfrak{C}$, dans laquelle les $R_n(z)$ ont une fonction limite égale à z. On en conclut que les régions conséquentes de $\mathfrak{C}$ ne sont pas toutes distinctes, car si D' est un domaine complètement intérieur à $\mathfrak{C}'$, le domaine D'_n tendant vers D' pour certaines valeurs de n, il existe un entier h que je choisirai le plus petit possible, pour lequel $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'_h$ ont des points communs et sont par suite confondues. $\mathfrak{C}$ est donc invariante par la substitution $(z) R_h(z)$. Posons $R_h(z) = T(z)$. Je dis que tout point z de $\mathfrak{C}'$ n'a pas plus d'un antécédent immédiat $T_{-1}(z)$, dans C'. En effet les fonctions $T_{\lambda_n}(z)$ ayant pour limite z dans $\mathfrak{C}'$, on peut choisir les λ_n de manière que les fonctions $T_{\lambda_n - 1}(z)$ qui forment une famille normale dans $\mathfrak{C}'$, convergent vers $f(z)$ qui est naturellement uniforme. S'il y avait dans $\mathfrak{C}'$ deux antécédents distincts z_{-1} et z'_{-1} du point z correspondant à deux branches de la fonction $T_{-1}(z)$, en vertu des égalités évidentes

$$T\lambda_n(z_{-1}) = T\lambda_{n-1}[T(z_{-1})] = T\lambda_{n-1}(z),$$
$$T\lambda_n(z'_{-1}) = T\lambda_{n-1}(z)$$

on aurait en passant à la limite

$$z_{-1} = f(z),$$
$$z'_{-1} = f(z),$$

ce qui est impossible puisque $f(z)$ n'a qu'une valeur en chaque point de $\mathfrak{C}'$. Les fonctions $T_{-n}(z)$ restreintes au domaine $\mathfrak{C}'$(§ 6) sont donc uniformes. Comme d'autre part $T_{-1}(z)$ a plus d'une valeur dans tout le plan, le domaine $\mathfrak{C}'$ n'est pas complètement invariant et possède une infinité d'antécédents distincts. *Il est donc établi que si le nombre des régions contiguës à $\mathfrak{F}$ est fini, c'est-à-dire égal à* 1 *ou à* 2, *il n'y a que des fonctions limites constantes.*

On voit maintenant quels sont les points qui peuvent être limites de conséquents d'un point n'appartenant pas à $\mathfrak{F}$. Si a est limite de conséquents du point $\xi(\xi_{\alpha_1}, \xi_{\alpha_2}, \ldots, \xi_{\alpha_n}, \ldots)$, on peut extraire de la suite des entiers α_i une nouvelle suite : $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$, telle que dans un domaine contenant ξ les fonctions $R_{\beta_n}(z)$ convergent uniformément vers $\varphi(z)$, qui prend au point ξ la valeur a. Si ξ appartient à un domaine où il n'y a que des fonctions limites constantes, le point a est limite de conséquents de ξ tant que ξ reste à l'intérieur d'une région $\mathfrak{C}$ contiguë à $\mathfrak{F}$, ou d'une région conséquente ou antécédente de $\mathfrak{C}$. Si a lui-même n'appartient pas à $\mathfrak{F}$, il fait partie d'un cycle attractif $(a, a_1, a_2, \ldots, a_{h-1})$ et l'ensemble dérivé des conséquents d'un point quelconque $\mathfrak{C}$ se compose de ces h points. Si a appartient à $\mathfrak{F}$, tous les points analogues limites de conséquents d'un point de $\mathfrak{C}$ appartiennent à $\mathfrak{F}$ et forment un ensemble fermé invariant qui peut encore être constitué par un nombre fini de points formant un cycle, mais qui peut aussi hypothétiquement comprendre une infinité de points.

Si ξ appartient à une région contiguë où il y a des fonctions limites non constantes, le point a, qui peut dépendre de la position du point initial ξ, appartient à une région contiguë invariante par une puissance de la substitution donnée, ou à la frontière de cette région; mais il existe toujours des régions antécédentes de cette dernière qui ne renferment aucun point limite de conséquents de ξ. C'est là un cas hypothétique qui, d'après les recherches récentes de M. G. Julia, ne peut pas se présenter quand $R(z)$ est rationnelle ([1]). Dans tous les cas nous trouverons un peu plus loin une condition suffisante, toujours réalisée dans les exemples que l'on sait effectivement étudier, pour que de tels domaines (que nous appellerons domaines *singuliers*) n'existent pas.

Une conséquence immédiate de ce qui précède est que si $\mathcal{F}$ ne couvre pas tout le plan, il y a toujours des domaines dont aucun point n'est limite de conséquents d'un point du plan.

29. Nous allons considérer maintenant les antécédents d'un point du plan et chercher quels sont les points limites de ces antécédents. Nous savons déjà que tout point de $\mathcal{F}$ est limite d'antécédents d'un point quelconque du plan, sauf peut-être de un ou deux points exceptionnels qui n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$.

Supposons qu'un point ξ n'appartenant pas à $\mathcal{F}$ soit limite d'antécédents d'un point a qui naturellement n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Je dis que réciproquement a est limite de conséquents de ξ. Car les fonctions $R_{\alpha_n}(z) - a$ forment une suite normale dans un cercle de centre ξ et de rayon r et prennent la valeur zéro en des points $a_{-\alpha_1}$, $a_{-\alpha_2}$, ... qui tendent vers ξ; il s'ensuit que les suites uniformément convergentes $R_{\beta_n}(z) - a$ qu'on en peut extraire convergent vers zéro pour $z = \xi$, c'est-à-dire que a est limite de conséquents de ξ. Si dans la région contiguë à $\mathcal{F}$ à laquelle appartient ξ, les fonctions limites sont toutes des constantes, ces constantes n'appartiennent pas à $\mathcal{F}$, sinon il en serait de même de ξ. On doit donc supposer que a fait partie d'un cycle attractif $(a, a_1, \ldots, a_{h-1})$. Si parmi les antécédents de a qui tendent vers ξ il y en a une infinité qui sont distincts, ξ appartient à $\mathcal{F}$; en effet soient z une racine de l'équation $R_n(z) = a$, infiniment voisine de ξ, et n' le plus petit entier tel que $R_{n'}(z)$ soit égal à l'un des nombres $(a, a_1, \ldots, a_{h-1})$; n' n'est pas borné, sinon les antécédents de a considérés ici seraient en nombre fini; on aura donc pour des valeurs de n' infiniment grandes et des points z infiniment voisins de ξ : $R_{n'-1}(z) = a'$, a' étant un antécédent de a distinct de $(a, a_1, \ldots, a_{h-1})$; a' n'est

(1) M. Julia a énoncé ce fait sans démonstration (*Comptes rendus*, t. 168, p. 147).

donc pas un point périodique et ξ, limite d'antécédents de a', appartient à $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que les points limites d'antécédents de a appartiennent à $\mathcal{F}$, en négligeant a lui-même et ses antécédents qui peuvent être considérés comme points limites d'antécédents de a lorsque l'on convient de classer dans l'ensemble dérivé d'un ensemble dénombrable les points où sont confondus une infinité de points de ce dernier ensemble. Il va sans dire que si a est un point exceptionnel, l'ensemble dérivé des antécédents de a se réduit à a lui-même ou à un couple de deux points dont l'un est a.

Si ξ appartient à un domaine singulier et si a est limite de conséquents de ξ et n'appartient à $\mathcal{F}$, réciproquement ξ est limite d'antécédents de a. En effet, il existe alors une suite de fonctions $R_{\alpha_n}(z)$ qui dans un domaine contenant ξ convergent uniformément vers la fonction $f(z)$ non constante qui prend la valeur a pour $z = \xi$; les fonctions $R_{\alpha_n}(z)$ prennent toutes la valeur a pour α_n suffisamment grand dans un cercle de centre ξ et de rayon arbitraire ε, c'est-à-dire que ξ est limite d'antécédents de a; a appartient comme on sait à un domaine singulier invariant par une puissance de la substitution donnée.

Donnons-nous *a priori* un point a dans ce dernier domaine; nous avons vu au paragraphe précédent que a est limite de ses propres antécédents, c'est-à-dire qu'il existe une suite de fonctions $R_{-n}(z)$, uniformes, comme nous le savons, dans le domaine considéré et ayant une fonction limite égale à z.

En résumé, l'ensemble dérivé des antécédents d'un point coïncide avec l'ensemble $\mathcal{F}$ sauf dans le cas où a est un point périodique attractif, ou un point appartenant à un domaine singulier invariant par une puissance de la substitution donnée.

30. De même que la recherche de l'ensemble dérivé des conséquents d'un point est liée à celle des fonctions limites des fonctions itérées $R_n(z)$, la recherche des points limites des antécédents d'un point est liée à celle des fonctions limites des inverses $R_{-n}(z)$ de ces itérées; ces dernières fonctions sont algébriques et multiformes; mais il peut y avoir des domaines où certaines branches de ces fonctions sont uniformes et, en leur appliquant les théorèmes qui concernent les suites des fonctions holomorphes ou méromorphes dans un domaine, on parvient à des résultats nouveaux et importants.

Nous allons montrer tout d'abord qu'une suite infinie quelconque de branches des fonctions inverses des $R_n(z)$ forme une suite normale dans tout domaine où ces branches de fonctions sont uniformes. Soient D le domaine et $R_{-\lambda_p}(z)$ les fonctions considérées. Il existe au moins un point double α non exceptionnel, ayant par conséquent des antécédents α_{-1} et α_{-2} de rang 1 et 2, distincts entre eux et distincts de α. Soit α_{-i} l'un de ces trois points; on a $R_n(\alpha_{-i}) = \alpha$ pour $n > 2$. Donc si D ne contient pas α, les $R_{-\lambda_p}(z)$ ne prennent aucune des valeurs α, α_{-1}, α_{-2}, car, si l'on avait $R_{-\lambda_p}(z) = \alpha_i$, on aurait pour $\lambda_p > 2$: $R_{\lambda_p}(\alpha_{-i}) = z = \alpha$, ce qui est impossible.

Si D contient α, il existe soit un point double autre que α et non exceptionnel, soit un point périodique d'ordre 2 non exceptionnel. Dans le premier cas, si D ne contient pas le point double α', on raisonne comme plus haut. Dans le second cas, on considère le couple périodique (α, α_1) et un antécédent α_{-1} de α autre que α et α_1. On verra de même que $R_{-\lambda_p}(z)$ ne prend pas les valeurs $(\alpha, \alpha_1, \alpha_{-1})$ au moins dès que $\lambda_p > 3$ dans tout domaine qui ne contient ni α ni α_1.

Donc si l'on marque les points doubles et périodiques d'ordre 2 autres que les points exceptionnels, et si l'on divise D en un nombre fini de régions empiétant les unes sur les autres et ne contenant chacune qu'un de ces points, dans chacune de ces régions il y a au moins trois valeurs fixes que les $R_{-\lambda_p}(z)$ ne prennent jamais. Les $R_{-\lambda_p}(z)$ forment donc une suite normale dans chacun des domaines partiels et aussi dans le domaine total.

En particulier, si D est simplement connexe et ne renferme aucun point critique ni aucun conséquent de points critiques de $R_{-1}(z)$, toutes les fonctions $R_{-n}(z)$ forment une famille normale dans D.

Appelons E_c l'ensemble des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$, E'_c l'ensemble dérivé de E_c dans lequel on comprend les points de E_c où se trouvent confondus une infinité de conséquents de points critiques, c'est-à-dire les points doubles ou périodiques dont l'un des antécédents est un point critique. Nous allons montrer que tout point a qui est limite de conséquents d'un domaine du plan appartient à E'_c. a est donc une fonction limite constante des fonctions $R_{\lambda_p}(z)$ quand z est dans le domaine D. Supposons d'abord que a n'appartienne ni à E_c ni à E'_c; les fonctions $R_{-n}(z)$ sont toutes uniformes dans un cercle γ de centre a et de rayon r qui contient les domaines conséquents D_{λ_p} à partir d'un certain rang. Considérons en particulier la fonction $R_{-\lambda_p}(z)$ inverse de $R_{\lambda_p}(z)$ et prenant la valeur ξ (ξ intérieur à D) au point ξ_{λ_p} (intérieur à γ, au moins pour $p > p_0$). Si ξ' est intérieur à D et distinct de ξ, z décrivant le chemin $\xi\xi'$ intérieur à D, $R_{\lambda_p}(z)$ décrit le chemin $\xi_{\lambda_p}\xi'_{\lambda_p}$ intérieur à γ; réciproquement, si z décrit ce dernier chemin dans γ, $R_{-\lambda_p}(z)$ décrit dans D le chemin $\xi\xi'$. Les fonctions $R_{-\lambda_p}(z)$ ainsi définies forment une famille normale dans γ; on en peut donc extraire une nouvelle suite qui converge uniformément dans γ vers une fonction limite méromorphe en ξ; soit $\Phi(z)$ cette fonction limite des $R_{-\mu_p}(z)$. Les $R_{-\mu_p}(z)$ prenant la valeur ξ en des points ξ_{μ_p} qui tendent vers a, on a par un raisonnement bien connu

$$\Phi(a) = \xi.$$

Mais on a de même $\Phi(a) = \xi' \neq \xi$. On conclut de cette incompatibilité que a appartient à E_c ou à E'_c. Si a appartient à E_c sans appartenir à E'_c, tous les antécédents de a à partir d'un certain rang h n'appartiennent à aucun de ces deux ensembles. Les domaines D_{λ_p} ayant pour point limite a, les domaines $D_{\lambda_p - h}$ seront tous pour $p > p_0$ intérieurs à l'un des cercles en nombre fini ayant pour centres les points a_{-h} et pour rayon ε arbitrairement petit. L'un au moins des points a_{-h}, soit a', est donc limite de domaines conséquents de D. On est ramené au premier cas.

En particulier, si a est un point périodique attractif, ce point est limite de conséquents de points critiques; on en conclut qu'il y a au moins un point critique de $R_{-1}(z)$ dans le domaine total d'attraction des points du cycle auquel appartient a. On peut même préciser davantage. Considérons d'abord un point double attractif de la substitution $[z|R(z)]$ et les branches des fonctions inverses des $R_n(z)$ prenant la valeur a pour $z = a$; ce sont les fonctions ainsi définies que nous désignerons par $R_{-n}(z)$. Les fonctions $R_{-n}(z)$ étant supposées uniformes dans un cercle γ de centre a ne peuvent pas y former une suite uniformément convergente; cela résulte du raisonnement de l'alinéa précédent ou encore de ce que ces fonctions prennent toutes la valeur a pour $z = a$, tandis que leurs dérivées premières ont pour valeurs en ce point les quantités $\frac{1}{s^n}$ ($|s| = |R'(a)| > 1$) qui tendent vers l'infini. Elles ont donc des points critiques dans γ à partir d'un certain rang. Mais les points critiques de $R_{-n}(z)$ dans γ sont les conséquents des point critiques de $R_{-1}(z)$ situés dans le domaine *immédiat* du point a. Cela résulte de ce qui a été dit au paragraphe 6; en raison de l'importance de ce fait, expliquons-le de nouveau d'une manière un peu différente. Supposons que $R_{-(n-1)}(z)$ n'ait pas de point critique dans γ, mais que $R_{-n}(z)$ en ait au moins un : soit c_{n-1}. z décrivant le segment ac_{n-1}, $R_{-n}(z)$ décrit le chemin $\alpha\xi$ intérieur à D, domaine immédiat de a; on peut supposer que D ne contient pas le point à l'infini (on peut faire en sorte par une transformation homographique préalable que le point à l'infini appartienne à $\mathcal{F}$). c_{n-1} étant point critique de la fonction, inverse de $R_n(z)$, et qui prend en c_{n-1} la valeur ξ, ξ est racine multiple de l'équation $R_n(z) = c_{n-1}$, et comme ξ a une valeur finie on a $R'_n(\xi) = 0 = R'_{n-1}[R(\xi)]R'(\xi)$. On a donc $R'(\xi) = 0$, ou $R'_{n-1}(\xi_1) = 0$ puisque aucun de ces deux nombres n'est infini.

Supposons que le second facteur soit nul. Comme

$$R_{n-1}(\xi_1) = R_n(\xi) = c_{n-1},$$

cela veut dire que l'équation $R_{n-1}(z) = c_{n-1}$ admet ξ_1 comme racine multiple; en outre le chemin $a\xi_1$, intérieur à D et conséquent immédiat du chemin $a\xi$, a lui-même comme conséquent de rang $n-1$ le segment ac_{n-1}. Donc ξ_1 est la valeur que prend en c_{n-1} la fonction $R_{-(n-1)}(z)$, et comme $R'_{n-1}(\xi_1)$ est nul, c_{n-1} est un point critique de $R_{-(n-1)}(z)$. Comme nous avons admis que $R_{-n}(z)$ est la première de ces fonctions inverses ayant un point critique dans γ, c'est donc le facteur $R'(\xi)$ qui est nul; le point $c = R(\xi)$ est donc un point critique de $R_{-1}(z)$; ce point est intérieur à D et $c_{n-1} = R_{n-1}(c)$ est son conséquent de rang $n-1$.

Supposons maintenant que a soit un point périodique d'ordre h, donc un point double de la substitution $[z|R_h(z)]$. Dans le domaine immédiat du point a on a un point racine ξ de $R'_h(z) = 0$. Par suite,

$$R'_h(\xi) = R'(\xi)R'(\xi_1)\ldots R'(\xi_{h-1}) = 0.$$

L'un des facteurs du produit est nul puisque aucun n'est infini. Les points $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{h-1}$ appartenant respectivement aux domaines immédiats de $a, a_1, \ldots, a_{h-1}$, l'un de ces domaines D_{i-1}, renferme un point racine de $R'(z) = 0$ et par suite D_i renferme un point critique de la branche de $R_{-1}(z)$ qui prend en a_i la valeur a_{i-1}.

On voit par là que le nombre des cycles de multiplicateur plus petit que 1 *en module est essentiellement limité et au plus égal au nombre des points critiques de la fonction* $R_{-1}(z)$.

Nous allons démontrer que la même limitation s'étend aux points périodiques de multiplicateur égal à une racine de l'unité. Considérons d'abord un point double a de multiplicateur égal à $+1$. Si

$$R(z) = z - k(z-a)^{q+1} + \ldots,$$

nous avons établi l'existence dans un cercle de centre a d'un certain nombre de domaines élémentaires de convergence constituant une sorte d'étoile à q branches. Ces domaines élémentaires contiennent les conséquents (à partir d'un certain rang) de tous les points du plan autour desquels les $R_n(z)$ forment une suite convergente ayant a pour limite unique. Les points appartenant à deux domaines élémentaires distincts n'ont jamais les mêmes conséquents ni les mêmes antécédents. Un domaine élémentaire étant choisi, l'ensemble des antécédents de ses points forme des domaines en général en nombre infini dont l'un contient le domaine élémentaire initial et constitue l'un des domaines *immédiats* du point a. Il y a q domaines immédiats entièrement distincts qui, avec leurs antécédents, constituent le domaine total de convergence vers a. Tout se passe comme si l'on avait q points doubles réunis en a; ces points sont confondus en un seul, mais les domaines correspondants sont distincts.

Ceci posé, je vais démontrer que chacun des q domaines immédiats contient au moins un point critique de la branche de fonction $R_{-1}(z)$ qui prend la valeur a pour $z = a$, et prolongée suivant des chemins intérieurs à ce domaine. Rappelons-nous ce qui a été dit au sujet des domaines de convergence élémentaires; les domaines relatifs aux conséquents d'un point ont des parties communes avec les domaines de convergence uniforme relatifs aux antécédents. Il est possible de trouver un secteur abc de sommet a

et d'angle au sommet θ compris entre $\frac{\pi}{q}$ et $\frac{2\pi}{q}$ tel que les $R_n(z)$ convergent uniformément vers a dans tout domaine fermé intérieur à ce secteur, pourvu que a ne soit pas sur la frontière de ce domaine; en outre, sur les côtes ab, ac, les $R_{-n}(z)$ tendent uniformément vers a (extrémités comprises). Enfin, il existe des domaines intérieurs à abc où $R_{-n}(z)$ tend uniformément vers a. Appelons S ce secteur abc; les conséquents de tout point de S tendent vers a et sont distribués sur une courbe tangente à la bissectrice de l'angle au sommet. Ceci rappelé, les fonctions $R_{-n}(z)$, ou plus exactement les branches de ces fonctions qui prennent la valeur a au point a, ne peuvent pas converger uniformément vers a dans le domaine fermé S, si elles y sont uniformes; car on peut trouver, quel que soit n, un point z intérieur à S et voisin de a qui est le conséquent de rang n d'un point arbitraire ξ de S, en sorte qu'on ait $R_{-n}(z) = \xi$; la branche de fonction $R_{-n}(z)$ qui figure ici étant bien celle qui prend la valeur a au point a, prolongée sans sortir de S au moins si ξ est convenablement choisi; car il y a des parties de S ayant un sommet en a qui comprennent les conséquents de tous leurs points.

Supposons que les $R_{-n}(z)$ n'aient pas de points critiques dans S; de toute suite des $R_{-n}(z)$ on en peut déduire une autre qui converge uniformément dans tout domaine fermé S′ intérieur à S et n'ayant pas le point a sur sa frontière; en effet, les $R_{-n}(z)$ forment une suite normale dans le domaine simplement connexe S où elles sont uniformes, et l'on peut toujours remplacer S par un domaine de même nature qui lui soit intérieur, sauf en a, qui reste toujours point frontière, en sorte que la convergence uniforme a lieu sur le contour de S d'où l'on a enlevé un arc σ contenant a. Mais S′ peut contenir des régions où les $R_{-n}(z)$ convergent uniformément vers a, car il y a de telles régions dans S. Donc les $R_{-n}(z)$ convergent uniformément vers a dans tout domaine tel que S′. Mais les $R_{-n}(z)$ convergent aussi uniformément vers a sur l'arc σ (§ 10, 11). Il s'ensuit que les $R_{-n}(z)$ convergent uniformément dans tout le domaine fermé S vers la constante a, car les fonctions $R_{-n}(z) - a$ peuvent être supposées holomorphes dans S : il suffit, pour qu'elles n'y possèdent pas de pôles, que le point à l'infini fasse partie de $\mathfrak{F}$, hypothèse sans importance; elles atteignent alors leurs valeurs de module maximum sur le contour de S, et ces maxima tendent vers zéro aussi bien sur l'arc σ, comme nous venons de le rappeler, que sur l'arc complémentaire qui est frontière d'un domaine S'. Nous arrivons donc à une contradiction puisque nous avons démontré que les $R_{-n}(z)$ ne convergent pas uniformément vers a dans le domaine fermé S. Les $R_{-n}(z)$ ont donc des points critiques dans S. Il s'ensuit, tout comme dans le cas d'un point double attractif, que la fonction $R_{-1}(z)$ égale à a pour $z = a$ et prolongée sans sortir du domaine immédiat D qui contient S y possède au moins un point critique. Les conséquents de ces points critiques sont ceux des fonctions $R_{-n}(z)$, restreintes au domaine immédiat D; ils tendent vers le point a et sont distribués sur des courbes invariantes tangentes en a à la bissectrice du secteur S.

Supposons maintenant que le multiplicateur s du point double a soit une racine primitive de l'équation $s^h = 1$, h entier > 1. Pour la substitution $[z \mid R_h(z)]$, le point a est un point double de multiplicateur égal à $+1$ et le nombre q de tout à l'heure est un multiple de h : $q = lh$, donnant lieu à lh domaines immédiats ayant a pour point frontière commun, et formant l cycles de h domaines, les domaines d'un même cycle étant permutés circulairement par les puissances de la substitution $[z \mid R(z)]$. Dans chacun des domaines appartenant à un même cycle se trouvent des points critiques de la fonction $R_{-h}(z)$, restreinte à ce domaine; ces points sont les conséquents des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ dans les divers domaines de ce cycle; donc, dans l'un au moins de ces domaines D_i, il existe au moins un point critique de la fonction $R_{-1}(z)$ égale à a pour $z = a$ et prolongée à l'intérieur du domaine D_i de manière que ses valeurs appartiennent à D_{i-1}. Chacun des l cycles analogues donne lieu ainsi à au moins un point critique de $R_{-1}(z)$ situé dans l'un des domaines qui le composent. Il y a donc toujours au moins un point critique dans l'ensemble des domaines immédiats assemblés autour de a et dans lesquels $R_n(z)$ tend vers a.

Si a est un point périodique dont le multiplicateur est toujours de la même forme, il y a une double périodicité ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe 14; l'ensemble des domaines immédiats assemblés autour des divers points du cycle et se répartissant eux-mêmes en cycles contient toujours au moins un point critique de la fonction $R_{-1}(z)$, la définition exacte de cette dernière fonction pouvant être facilement précisée.

Comme conséquence importante de ce qui précède, on peut remarquer que le nombre total des cycles de points périodiques, ou même plus précisément le nombre des cycles de domaines attachés aux divers cycles de points dont les multiplicateurs sont inférieurs en module à l'unité, ou égaux à l'unité avec un argument commensurable à 2π, est au plus égal au nombre des points critiques de $R_{-1}(z)$, et par conséquent au plus égal à $2(d-1)$, si $R(z)$ est de degré d.

Il est probable que la même limitation subsiste quand on considère les points périodiques dont le multiplicateur est au plus égal à 1 en module, le cas de $s = e^{i\pi\theta}$ (θ réel, incommensurable) n'étant pas exclu. Je pense qu'on doit y parvenir par la méthode de variation des coefficients de $R(z)$ déjà utilisée. Mais jusqu'ici je suis seulement parvenu à démontrer, ce qui est d'ailleurs le point essentiel, que le nombre des cycles de cette dernière catégorie est lui-même fini.

Démontrons d'abord le lemme suivant : « Soient N fonctions d'une variable complexe t, holomorphes pour $t = t_0$, et dont les points représentatifs pour cette valeur de la variable sont situés sur une courbe analytique sans point singulier et fermée; on peut donner à t une valeur voisine de t_0 telle que la moitié au moins des points représentatifs de ces fonctions deviennent intérieurs à la courbe. »

On suppose qu'aucune des fonctions données n'est une constante; on a alors

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)}(t) - \varphi^{(1)}(t_0) &= K_1(t-t_0)^{p_1} + \ldots,\\
\varphi^{(2)}(t) - \varphi^{(2)}(t_0) &= K_2(t-t_0)^{p_2} + \ldots,\\
\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi^{(N)}(t) - \varphi^{(N)}(t_0) &= K_N(t-t_0)^{p_N} + \ldots.
\end{aligned}$$

Les K_i étant différents de zéro, les termes écrits aux seconds membres représentent les valeurs principales des déplacements des points représentatifs quand on passe de la valeur t_0 à la valeur infiniment voisine $t = t_0 + \Delta t$. Soit 2^q la plus haute puissance de 2 qui divise l'un des entiers p_i et groupons ensemble les fonctions pour lesquelles l'entier p_i correspondant est divisible par 2^q, puis celles pour lesquelles cet entier est divisible par 2^{q-1}, ainsi de suite, et enfin celles pour lesquelles p_i est un nombre impair. Donnant à Δt une valeur infiniment petite arbitraire, j'obtiens des déplacements, les uns intérieurs, les autres extérieurs à la courbe, aucun d'eux n'étant tangent à la courbe si l'on évite de donner à l'argument de Δt certaines valeurs en nombre fini. Si ces déplacements ne satisfont pas à la condition exigée, multiplions Δt par $e^{i\varphi}$, en prenant

$$\varphi = \pi\left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_q}{2^q}\right),$$

les a_q étant égaux à o ou à 1.

Pour les fonctions de la première catégorie, l'argument du déplacement se trouve augmenté de $2^q \mathrm{I}\varphi$, I étant impair, et ce nombre est congru à o ou à π (mod 2π), suivant que a_q est égal à o ou à 1. On peut donc choisir a_q de manière que la moitié au moins des déplacements soient dirigés vers l'intérieur.

a_q étant ainsi choisi, considérons les fonctions de la seconde catégorie, s'il y en a, c'est-à-dire celles pour lesquelles l'entier p est divisible par 2^{q-1}. Pour celles-là, l'argument du déplacement est augmenté de

$$2^{q-1}\mathrm{I}\varphi \equiv a_{q-1}\pi + \frac{a_q \mathrm{I}\pi}{2} \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi),$$

I étant toujours un entier impair. En donnant à a_{q-1} l'une des valeurs o ou 1, on a donc deux déplacements de sens opposé. On choisira a_{q-1} de manière que la moitié au moins des déplacements soient intérieurs à la courbe. On continuera ainsi de proche en proche et l'on déterminera par conséquent les entiers a_i de manière que l'accroissement $e^{i\varphi}\Delta t$ de la variable donne des accroissements des fonctions φ qui satisfont à la condition demandée. Si l'on obtenait des déplacements tangentiels pour certains points, il suffirait de modifier infiniment peu l'argument de Δt pour que la circonstance ne se présente plus.

Ce lemme étant établi, considérons un point périodique α d'ordre h, dont le multiplicateur soit égal à 1 en module, avec un argument incommensurable à 2π, ou même simplement différent de zéro. Ce point α est une racine de l'équation $\mathrm{R}_h(z) = z$, et l'on a

$$s = R'_h(\alpha), \quad |s| = 1.$$

On suppose tous les points tels que α à distance finie, comme il est permis. Introduisons dans $R(z)$ un paramètre variable complexe t tel que

$$R(z, t_0) = R(z),$$

$R(z, t)$ étant rationnelle en z et t et toujours de degré d par rapport à z. Considérons la racine de l'équation algébrique

$$F(z, t) = R_h(z, t) - z = 0,$$

qui prend la valeur α pour $t = t_0$ et qui est holomorphe puisque

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{t=t_0} = s - 1 \neq 0.$$

A cette racine $\alpha(t)$ correspond un cycle d'ordre h

$$\alpha(t), \quad R[\alpha(t), t] \ldots R_{h-1}[\alpha(t), t]$$

dont le multiplicateur s'obtient en remplaçant z par $\alpha(t)$ dans l'expression $\frac{\partial R_h(z, t)}{\partial z}$. Ce multiplicateur $s(t)$ est donc lui-même une fonction holomorphe pour $t = t_0$ et prenant en ce point la valeur s située sur la circonférence de centre o et de rayon 1. Si l'on a N cycles analogues pour la substitution $[z|R(z)]$, on obtient ainsi, après l'introduction du paramètre t, N cycles dont les multiplicateurs sont des fonctions holomorphes de t pour $t = t_0$, et qui restent distincts tant que t varie suffisamment peu. Les valeurs initiales des N fonctions $s(t)$ étant situées sur la circonférence $|s| = 1$, on peut donner à l'accroissement $t - t_0$ une valeur telle que $\frac{N}{2}$ au moins de ces fonctions prennent des valeurs intérieures à la circonférence, c'est-à-dire inférieures en module à l'unité ([1]).

([1]) Pour que la conclusion soit exacte, il faut qu'aucune de ces fonctions $s(t)$ ne soit une constante. Or, on peut supposer que les coefficients de $R(z, t)$ sont des fonctions linéaires de t qui, pour $t = 0$, sont ceux de $R(z)$, et, pour $t = 1$, ceux par exemple d'une substitution à cercle fondamental de première espèce, qui n'a pas de points périodiques tels que $|s| = 1$. Les $s(t)$ considérées ne restent donc pas constantes.

La substitution $[z \mid R(z, t)]$ a donc $\frac{N}{2}$ cycles attractifs, ce qui n'est possible que si $\frac{N}{2} \leqq 2(d-1)$, $N \leqq 4(d-1)$. Le nombre des cycles en question est donc limité.

Il s'ensuit que tous les cycles de points à partir d'un certain ordre sont répulsifs et appartiennent par conséquent à l'ensemble $\mathfrak{F}$ sur lequel nous savons qu'ils sont partout denses. $\mathfrak{F}$ peut donc être défini comme l'ensemble dérivé des points périodiques de multiplicateur > 1 en module. On en déduit diverses conséquences relatives aux valeurs des fonctions $R'(z)$, $R'_n(z)$ sur $\mathfrak{F}$, notamment que si φ désigne l'ensemble des points de $\mathfrak{F}$ intérieurs à un cercle ayant pour centre un point quelconque de $\mathfrak{F}$, aucune suite infinie extraite des $R'_n(z)$ n'est bornée sur φ.

31. Nous avons vu que les fonctions $R_{-n}(z)$ forment une famille normale dans tout domaine où elles sont holomorphes. Nous allons rechercher quelles sont les fonctions limites des suites convergentes formées avec ces fonctions.

Démontrons d'abord ceci : si E est un ensemble fermé dont aucun point n'est limite de conséquents d'un point extérieur à $\mathfrak{F}$, les antécédents de rang n d'un point de E tendent uniformément vers $\mathfrak{F}$ pour n infini. S'il en était autrement, il existerait une suite d'entiers $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ indéfiniment croissants, une suite de points $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}, \ldots$ de E, et une suite de points $z^{(1)}$, $z^{(2)}, \ldots, z^{(n)}, \ldots$ dont la distance à $\mathfrak{F}$ serait supérieure à r, tels que

$$R_{\lambda_n}(z^{(n)}) = \xi^{(n)}.$$

Les points $z^{(n)}$ ont au moins un point limite $z^{(0)}$ extérieur à $\mathfrak{F}$. On peut supposer qu'on n'a conservé, dans les égalités précédentes, que celles pour lesquelles $z^{(n)}$ tend régulièrement vers $z^{(0)}$. Les $R_{\lambda_n}(z)$ formant une suite normale dans un cercle de centre $z^{(0)}$ et de rayon r, on en peut extraire une suite qui converge uniformément dans ce cercle vers une fonction limite $\Phi(z)$ méromorphe en $z^{(0)}$. On peut conserver les mêmes notations pour cette nouvelle suite. On voit alors aisément que les $\xi^{(n)} = R_{\lambda_n}(z^{(n)})$ tendent vers $\Phi(z^{(0)}) = \xi^{(0)}$ et que $\xi^{(0)}$ est limite des $R_{\lambda_n}(z^0)$, c'est-à-dire limite de conséquents d'un point extérieur à $\mathfrak{F}$; $\xi^{(0)}$ appartenant à E, ceci est contraire à l'hypothèse.

J'ajoute que cette condition suffisante est également nécessaire pour que les antécédents des points de E tendent uniformément vers $\mathcal{J}$.

Considérons alors une suite quelconque de fonctions $R_{-\lambda_n}(z)$ uniforme dans un domaine D et formant, par conséquent, une suite normale dans D. Supposons, en outre, que $\mathcal{J}$ ne comprenne pas tout le plan ; cet ensemble est alors sans points intérieurs. Les points limites de conséquents d'un point sont alors de trois sortes : 1° les points périodiques attractifs, qui sont en nombre fini ; 2° certains points de $\mathcal{J}$; 3° les points intérieurs à certains domaines hypothétiques que nous avons appelés *singuliers* et, de plus, invariants par une puissance de la substitution donnée. Si D n'est pas intérieur à un domaine de cette nature, il contient donc d'autres domaines pour lesquels les antécédents de rang n d'un point quelconque tendent vers $\mathcal{J}$ pour n infini. Dans ces derniers domaines, les valeurs des fonctions limites des $R_{-\lambda_n}(z)$ tendent uniformément vers un ensemble sans points intérieurs : ces fonctions limites sont donc des constantes (points de $\mathcal{J}$). Il en est évidemment de même dans tout le domaine D.

Il est facile de déduire de là une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de domaines singuliers : il suffit que l'ensemble E'_e dérivé des conséquents des points critiques ne morcelle pas le plan.

Soient $\mathcal{C}$ un domaine singulier invariant par une puissance de la substitution donnée, z' un point intérieur à $\mathcal{C}$; il y a également dans le plan des domaines qui ne renferment aucun point limite de conséquents, notamment parmi les domaines antécédents de $\mathcal{C}$; soit z'' un point intérieur à un tel domaine ; si E'_e ne morcelle pas le plan, on peut joindre $z'z''$ par une ligne polygonale ne contenant aucun point de E'_c ni de E_c. Cette ligne est elle-même intérieure à un domaine où toutes les fonctions $R_{-n}(z)$ sont uniformes et forment une famille normale. Or, autour de z', certaines suites infinies de fonctions $R_{-n}(z)$ ont des fonctions limites non constantes, par exemple égales à z, tandis qu'autour de z'' toutes les fonctions limites sont constantes. Il est donc impossible d'admettre l'existence de domaines tels que C.

La fonction $R(z)$ étant donnée, pour trouver les constantes limites et obtenir des précisions sur la division correspondante du plan en régions, on devra d'abord chercher les points limites des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$. Si ces points sont en nombre fini, ce sont des points périodiques, parmi lesquels il peut se trouver des points attractifs, des points indifférents et des points répulsifs. Ces derniers ne peuvent pas être limites de conséquents de domaines, sinon il y aurait (§ 15) une infinité de points limites de cette espèce et, par conséquent, aussi une infinité de points de E'_c. S'il y a des points périodiques indifférents parmi les points de E'_c, il y a deux cas à distinguer, suivant que le multiplicateur d'un de ces points a un argument commensurable ou incommensurable à 2π. Dans le premier cas, ce point est limite de conséquents de domaines; dans le second cas, la chose est douteuse. Enfin, les points attractifs sont toujours limites de conséquents de domaines. Ainsi, si E'_c ne contient qu'un nombre fini de points, il n'y a pas d'autres fonctions limites que des constantes en nombre fini ayant pour affixes des points doubles ou périodiques attractifs ou indifférents.

Pour étudier la configuration des domaines correspondants, on considérera d'abord les domaines élémentaires de convergence relatifs à ces points, que nous avons étudiés au Chapitre II. On formera ensuite les domaines antécédents de ces domaines élémentaires et les domaines limites de ces domaines antécédents. On obtiendra ainsi des configurations dont la complexité, du point de vue de l'*analysis situs*, dépendra, comme on a pu s'en rendre compte dans les exemples traités au Chapitre III, de la position des points critiques de $R_{-1}(z)$. Nous verrons dans le Chapitre suivant qu'on peut obtenir ainsi, relativement à la division du plan en régions de convergence correspondant aux divers points limites, quelques propositions générales, mais qu'on devra la plupart du temps, pour préciser quelque peu la structure des domaines étudiés, examiner chaque cas particulier, en tenant compte de toutes les circonstances qui permettent de mettre en évidence quelque propriété des domaines de convergence concernant la connexion, la nature des courbes ou ensembles frontières, les symétries qui peuvent se présenter, etc. On doit d'ailleurs remarquer que le problème qui consiste à trouver l'ensemble des points limites des conséquents des points critiques n'est pas susceptible d'une solution générale. Si même on sait d'avance que ces points sont en nombre fini et qu'on se propose alors simplement de trouver les points attractifs (ou indifférents), on ne peut pas fixer une limite supérieure du nombre d'équations algébriques qu'on aura à résoudre pour y parvenir puisque, si le nombre des cycles attractifs est limité en fonction du degré de $R(z)$, en revanche l'ordre de ces cycles peut être aussi grand qu'on le veut pour un degré donné. Enfin, s'il y a une infinité de points de E'_c, ou s'il y a des points indifférents dont le multiplicateur n'est pas commensurable à 2π, l'étude des domaines de convergence est à peu près complètement à faire et présente vraisemblablement de très grandes difficultés.

Remarquons enfin que si, en tous les points de l'ensemble $\mathcal{F}$ (qui est alors borné), on a $|R'(z)| > K > 1$, aucun point de $\mathcal{F}$ n'appartient à E_c ni à E'_c et que les fonctions limites sont des constantes qui correspondent toutes à des points périodiques attractifs. En effet, on aura, pour toutes les branches de $R_{-1}(z)$ (qui n'a pas de points critiques sur $\mathcal{F}$) :

$$R'_{-1}(z) < \frac{1}{K} < 1$$

en tout point de $\mathcal{F}$, et par suite aussi

$$R'_{-1}(z) < K' < 1$$

dans tous les cercles de rayon $r \neq 0$ ayant pour centre un point de $\mathcal{F}$, K' étant compris entre 1 et $\frac{1}{K}$. Donc les points dont la distance à $\mathcal{F}$ est au plus égale à r ont pour antécédents immédiats des points dont la distance à $\mathcal{F}$ est au plus égale à $K'r$, et pour antécédents de rang n des points dont la distance à $\mathcal{F}$ est au plus égale à $K'^n r$, quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On en conclut que les antécédents de rang n des points d'un cercle de rayon r ayant son centre sur $\mathcal{F}$ tendent uniformément vers $\mathcal{F}$; par suite, aucun point de $\mathcal{F}$ n'est limite de conséquents d'un point extérieur à $\mathcal{F}$, et d'autre part il n'y a pas de domaines singuliers. Les points limites de conséquents des points extérieurs à $\mathcal{F}$ sont tous des points doubles ou périodiques attractifs.

Réciproquement, si aucun point de $\mathcal{F}$ n'appartient à E_c ni à E'_c, les fonctions $R_{-n}(z)$ sont toutes uniformes dans les cercles qui ont pour centre un point de $\mathcal{F}$ et pour rayon r la plus courte distance de $\mathcal{F}$ à $E_c + E'_c$. $\mathcal{F}$ étant supposé borné est couvert par un nombre fini N de ces cercles où les $R_{-n}(z)$ forment une famille normale, dont toutes les fonctions limites sont des constantes appartenant à l'ensemble borné $\mathcal{J}$; il s'ensnit aisément que dans ces N cercles toutes les fonctions $R'_{-n}(z)$ tendent uniformément vers zéro. On aura donc pour $n \geqq h$:

$$R'_{-n}(z) < K' < 1$$

dans tous ces cercles et par suite en tout point de $\mathcal{J}$. On en conclut que

$$R'_n(z) > K > 1$$

en tout point de $\mathcal{J}$, pour $n \geqq h$. Ainsi donc si $\mathcal{J}$ est borné et ne contient aucun point limite de conséquents de points critiques de $R_{-1}(z)$, la condition $R'(z) > K > 1$ n'est pas nécessairement remplie en tout point de $\mathcal{J}$, mais elle le sera si l'on remplace R par R_h, h étant un entier convenablement choisi. On démontre facilement que les substitutions rationnelles qui possèdent ce caractère le conservent quand on fait varier suffisamment peu les coefficients de $R(z)$. Il est probable, mais je n'ai pas approfondi la question, que cette propriété appartient à toutes les substitutions générales, c'est-à-dire à celles dont les coefficients ne vérifient aucune relation particulière. Je signale, dans ce même ordre d'idées, l'intérêt qu'il y aurait à rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble $\mathcal{J}$ varie d'une manière continue, tant au point de vue de la position de ses points qu'au point de vue de la connexion des domaines dans lesquels il divise le plan, lorsqu'on fait varier les coefficients de $R(z)$. Il paraît bien et l'on peut le constater sur des exemples que la discontinuité a lieu pour les valeurs des coefficients, telles que $\mathcal{J}$ contienne des points de $E_c + E'_c$.

CHAPITRE V.

32. Nous étudierons dans ce Chapitre la structure des domaines de convergence correspondant aux points doubles (ou périodiques) attractifs ou indifférents, et nous montrerons sur des exemples quelles sont, relativement à la connexion de ces domaines, les principales circonstances qui peuvent se présenter.

Soit α un point double attractif; il existe un cercle c de centre α

et de rayon r en tout point duquel on a

$$|R(z)-\alpha|\leqq K|z-\alpha| \quad (0<K<1).$$

c renferme donc ses conséquents à son intérieur. Inversement si l'on désigne par c_{-n} l'ensemble des domaines fermés antécédents de rang n de c, c'est-à-dire le lieu des points tels que $|R_n(z)-\alpha|\leqq r$, on a les inégalités topologiques

$$c<c_{-1}<c_{-1}\ldots<c_{-n}<\ldots.$$

Désignons par $e^{(n)}$ le domaine faisant partie de c_{-n} qui est d'un seul tenant avec α; on a également :

$$c=e<e^{(1)}<e^{(2)}<\ldots<e^{(n)}<\ldots.$$

Je dis que D, domaine immédiat du point α, est l'ensemble limite de $e^{(n)}$, c'est-à-dire la somme des domaines $e^{(n)}$. En effet, il est évident que tout point de $e^{(n)}$ appartient à D. Réciproquement tout point de D appartient à $e^{(n)}$ pour une valeur de n suffisamment grande. Car si ξ appartient à D, on peut joindre $\alpha\xi$ par une ligne polygonale l dont tous les points appartiennent à D; sur l, $R_n(z)$ tend uniformément vers α; il existe donc un entier p pour lequel on a sur l

$$|R_p(z)-\alpha|<r,$$

c'est-à-dire que l_p, $p^{\text{ième}}$ conséquente de l qui joint $\alpha\xi_p$ est complètement intérieure à c; donc l est complètement intérieure à c_p et par suite à $e^{(p)}$ puisqu'elle a une extrémité en α.

Je vais montrer que si D n'est pas simplement connexe, il est d'ordre de connexion infini. Supposons que le domaine $e^{(h)}$ ne soit pas simplement connexe; il est donc limité par plusieurs courbes antécédentes de rang h de la circonférence $|z-\alpha|=r$. Ces courbes sont sans points singuliers et sans points communs deux à deux pourvu que la circonférence γ de c ne contienne pas de conséquents de points critiques de $R_{-1}(z)$, ce qu'on peut supposer. On peut aussi admettre, si l'on fait la figure sur le plan, que $e^{(k)}$ renferme le point à l'infini; comme ce domaine est d'un seul tenant, les courbes simples qui le limitent sont deux à deux extérieures l'une à l'autre et de plus extérieures à la circonférence γ. Si l'on pose $R_h(z)=T(z)$, ce domaine $e^{(k)}$ devient le domaine $e^{(1)}$

relatif à la substitution $[z|T(z)]$. Nous pouvons appeler γ_{-1}^{0}, γ_{-1}^{1}, ..., γ_{-1}^{q-1}, les q courbes qui forment sa frontière et qui sont des transformées de γ par $T_{-1}(z)$; soient toujours D le domaine immédiat de α, f sa frontière qui est un ensemble parfait invariant contenu dans $\mathfrak{F}$. Chacune des q courbes γ_{-1} renferme à son intérieur des points de $\mathfrak{F}$ et par suite aussi de f. Car si ζ est un point de l'une de ces courbes, $\zeta_1 = T(\zeta)$ est sur γ. Faisons décrire à z un chemin simple partant de ζ_1, restant à l'extérieur de c et aboutissant en un point de $\mathfrak{F}$; le point $T_{-1}(z)$ qui coïncide avec ζ quand z est en ζ_1 décrira un chemin qui sera tout d'abord extérieur à $e^{(1)}$ et par suite intérieur à la courbe γ_{-1}; si ce chemin traversait γ_{-1}', le chemin décrit par z traverserait γ, ce qui n'a pas lieu. Donc $T_{-1}(z)$ reste dans ces conditions extérieur à γ_{-1}, et comme z aboutit en un point de $\mathfrak{F}$ il en est de même de $T_{-1}(z)$; il y a donc des points de $\mathfrak{F}$ (et de f) à l'intérieur des q courbes γ_{-1}, ce qui prouve que D est d'ordre de connexion au moins égal à q. Je dis que $e^{(n)}$ sera de même limité par au moins q^n courbes extérieures les unes aux autres et contenant chacune des points de f. Il suffit de montrer que si le fait est exact pour $e^{(n)}$ il l'est pour $e^{(n+1)}$. Soit γ_{-n} l'une des courbes qui limitent $e^{(n)}$; tout point de γ_{-n} a son conséquent de rang n sur γ; inversement, à un point de γ correspond une branche de la fonction $T_{-n}(z)$ qui prend en ce point une valeur située sur γ_{-n}, de manière que z recevant un déplacement infiniment petit intérieur ou extérieur à γ, $T_{-n}(z)$ éprouve un déplacement extérieur ou intérieur à γ_{-n}. Faisons décrire à z un chemin partant d'un point m de γ et aboutissant en un point p de la courbe γ_{-1}^{0} en restant à l'extérieur du cercle et à l'intérieur du domaine $e^{(1)}$, sauf en son extrémité p; $T_{-n}(z)$ décrit un chemin intérieur à γ_{-n}; z décrivant ensuite la courbe $\gamma_{-1}^{(0)}$ dans le sens direct par exemple, $T_{-n}(z)$ décrit une courbe qui se ferme quand z a décrit un nombre entier de fois la courbe γ_{-1}^{0}. On obtient ainsi une courbe intérieure à γ_{-n}; c'est une courbe frontière du domaine $e^{(n+1)}$, car d'une part sa conséquente de rang $n+1$ coïncide avec γ, d'autre part elle est reliée à γ_{-n}, laquelle est intérieure à $e^{(n+1)}$ (en vertu de $e^{(n)} < e^{(n+1)}$) par une ligne continue qui appartient à $c_{-(n+1)}$; on peut donc relier cette ligne $\gamma_{-(n+1)}$ au point α par un continu qui appartient à $c_{-(n+1)}$. Le même procédé appliqué aux q courbes $\gamma_{-1}^{0}, \gamma_{-1}^{1}, \ldots, \gamma_{-1}^{q-1}$ donne ainsi q courbes $\gamma_{-(n+1)}$ intérieures à la même courbe γ_{-n}; ces q courbes sont sans points communs et extérieures les unes aux autres; en effet, chacune d'elles est reliée à γ_{-n} par une ligne qui ne peut pas traverser les autres puisque son point de départ seul appartient à la frontière de $e^{(n+1)}$.

Enfin la courbe γ_{-1}^{i} renfermant des points de $\mathfrak{F}$ à son intérieur, on peut tracer une ligne partant d'un point de cette courbe, restant à son intérieur et aboutissant en un point de $\mathfrak{F}$; z décrivant cette ligne, le point antécédent $T_{-n}(z)$, qui part d'un point d'une courbe $\gamma_{-(n+1)}$ ainsi qu'il vient d'être expliqué, reste intérieur à cette dernière courbe et aboutit aussi en un point de $\mathfrak{F}$. Il y a donc des points de $\mathfrak{F}$ à l'intérieur de ces q courbes $\gamma_{-(n+1)}$. Comme d'autre part le nombre des courbes γ_{-n}, qui limitent $e^{(n)}$ est au moins q^n, on obtient ainsi au moins q^{n+1} courbes limitant $e^{(n+1)}$ et possédant les propriétés annoncées.

Il résulte de là que si $e^{(n)}$ n'est pas, quel que soit n, simplement connexe, le domaine immédiat D a un ordre de connexion au moins égal à 2^n; il a donc un ordre de connexion infini, n étant aussi grand qu'on le veut. Si au contraire $e^{(n)}$ est toujours simplement connexe. il en est de même de D, puisque toute courbe fermée intérieure à D est intérieure à un certain $e^{(n)}$ et peut ainsi se réduire à un point par une déformation continue sans sortir de D.

Cherchons à préciser les conditions pour que D soit simplement connexe. Désignons par $\bar{R}_{-1}(z)$ la fonction inverse de $R(z)$ *restreinte à* D (§ 6). On peut toujours tracer une courbe fermée sans point double Γ dans D, séparant le plan en deux régions dont l'une est intérieure à D et contient le point α et les points critiques de $\bar{R}_{-1}(z)$ intérieurs à D. Si D est simplement connexe, toutes les valeurs de $\bar{R}_{-1}(z)$ se permutent circulairement sur Γ. La réciproque est vraie. En effet, considérons les courbes fermées simples sur lesquelles deux valeurs de $R_{-1}(z)$ au moins se permutent; ces courbes sont en nombre fini, en regardant comme identiques deux courbes qui se ramènent l'une à l'autre par déformation continue sans traverser les points critiques. Considérons celles de ces courbes qui peuvent être tracées dans D; à partir d'une certaine valeur de n, elles sont toutes intérieures au domaine $e^{(n)}$, défini précédemment. Toutes les branches de $\bar{R}_{-1}(z)$

se permutent alors entre elles dans $e^{(n)}$, et comme $e^{(n)}$ doit rester simplement connexe quel que soit n, les branches de fonction considérées se permutent circulairement sur le contour de $e^{(n)}$. Cela équivaut à la condition énoncée.

En particulier, si D renferme un seul point critique β de $R_{-1}(z)$, D est simplement connexe. En effet, partons du cercle c et soient toujours $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ..., $e^{(n)}$, ... les parties des domaines antécédents de c qui sont d'un seul tenant avec α; soit $e^{(h)}$ le premier de ces domaines qui renferme un point critique de $\overline{R}_{-1}(z)$: $e^{(h)}$ existe d'après ce qu'on a vu au Chapitre IV; $e^{(h)}$ renferme donc β qui est critique non seulement pour $R_{-1}(z)$, mais plus particulièrement pour $\overline{R}_{-1}(z)$; $e^{(h)}$ est d'ailleurs simplement connexe puisque jusqu'au rang h inclus les domaines e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ... se déduisent chacun du précédent par une substitution uniforme. Traçons un lacet constitué par les deux bords d'une coupure qui joint β à un point du contour de $e^{(h)}$ en restant dans ce domaine, et par une circonférence infiniment petite décrite autour de β. On transforme ainsi $e^{(h)}$ en un domaine où la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ qui prend la valeur α en α est uniforme. Autour de β, $\overline{R}_{-1}(z)$ est développable suivant les puissances entières de $(z-\beta)^{\frac{1}{r}}$:

$$R_{-1}(z) = \beta_{-1} + a(z-\beta)^{\frac{1}{r}} + b(z-\beta)^{\frac{2}{r}} + \ldots \qquad (a \neq 0).$$

Aux r déterminations de $(z-\beta)^{\frac{1}{r}}$ ce développement fait correspondre r branches de la fonction $R_{-1}(z)$ qui se permutent autour de β où elles prennent la même valeur β_{-1}. Chacune d'elles donne du domaine *coupé* $e^{(h)}$ une image qui est un domaine simplement connexe; on a ainsi r domaines partiels simplement connexes assemblés autour de β_{-1} et juxtaposés suivant r lignes, images de la coupure, qui font entre elles des angles égaux à $\frac{2\pi}{r}$; cet assemblage constitue un domaine unique, simplement connexe, ayant pour frontière la courbe fermée unique décrite par $\overline{R}_{-1}(z)$ quand z décrit r fois de suite le contour de $e^{(h)}$. On en conclut que $e^{(h+1)}$ est simplement connexe; il en est de même pour $e^{(h+2)}$, $e^{(h+3)}$, ..., le même raisonnement s'appliquant de proche en proche.

Si en particulier toutes les déterminations de $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement sur le contour de $e^{(h)}$, le domaine total d'attraction du point α est à la fois d'un seul tenant et simplement connexe, le domaine immédiat n'ayant pas d'autre antécédent que lui-même.

Il résulte de ce qui a été dit au Chapitre IV que si le domaine du point double α n'est pas d'un seul tenant, il se compose d'une infinité de domaines distincts. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'un point du domaine immédiat D, par exemple le point α lui-même, ait des antécédents extérieurs à D. Remarquons que si α n'est pas point critique de $\overline{R}_{-1}(z)$, il a toujours des antécédents distincts de lui-même dans D, puisque la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$, restreinte à D, y possède des déterminations multiples. Si $R(z)$ est un polynome, le domaine du point à l'infini est toujours d'un seul tenant. Si

$$R(z) = \frac{z}{P(z)},$$

$P(z)$ étant un polynome avec $|P(0)| > 1$, le point double attractif $z = 0$ a un domaine d'un seul tenant, car le point $z = 0$ n'a pour antécédents de rang 1 que lui-même et le point à l'infini; comme $z = 0$ est racine simple de $R(z) = 0$, il faut que le point à l'infini fasse partie du domaine immédiat D. On en conclut que tous les antécédents du point $z = 0$ font partie du domaine immédiat qui se confond par conséquent avec le domaine total du point $z = 0$.

S'il y a plusieurs points doubles, et si le domaine immédiat D de l'un d'entre eux α n'est pas simplement connexe, les domaines des autres points β, γ, ... ne sont pas d'un seul tenant, car si la courbe fermée simple C tracée dans D sépare deux points m et m' de la frontière de D, il y a des antécédents de β (ou d'un point infiniment voisin) aussi près qu'on le veut de chacun des points m et m qui appartiennent à $\mathcal{F}$; il y a donc des points appartenant au domaine total du point β qui sont séparés C par; cette courbe n'appartenant pas au domaine de β, ce dernier domaine n'est pas d'un seul tenant, et se compose donc d'une infinité de parties distinctes.

Inversement, si le domaine du point double α est d'un seul tenant, les domaines des autres points attractifs qui peuvent exister sont formés de parties simplement connexes.

Remarquons enfin que, s'il y a plus de deux points attractifs, l'un au plus de ces points possède un domaine d'un seul tenant; nous avons démontré en effet qu'il ne peut pas y avoir plus de deux domaines complètement invariants et simplement connexes.

Toutes ces propositions générales subsistent, si, au lieu d'un point double attractif, on considère un point double pour lequel $s = +1$. Nous savons en effet que dans ce cas il existe des domaines de convergence élémentaires assemblés autour du point double ; ces domaines limités par exemple par des courbes algébriques ont un point anguleux au point double; ils sont simplement connexes et contiennent leurs conséquents. Les raisonnements faits à propos des points doubles attractifs subsistent; les domaines élémentaires qui remplacent ici le cercle c ont un point frontière commun avec leurs conséquents à savoir le point double lui-même, mais on se rend compte aisément que cette circonstance ne modifie en rien les conclusions.

Enfin, ce qui a été dit au sujet des points doubles s'applique aux points périodiques qui sont des points doubles d'une puissance de la substitution donnée.

Résumons ces conclusions :

1° *Le domaine immédiat d'un point double (ou périodique) attractif est simplement connexe ou d'ordre de connexion infini.*

2° *Si le domaine d'un point double attractif est d'un seul tenant, les domaines des autres points attractifs qui peuvent exister sont formés de parties simplement connexes. Inversement si le domaine immédiat ou l'un des domaines partiels qui constituent le domaine total d'un point double n'est pas simplement connexe, les domaines des autres points attractifs sont formés d'une infinité de parties distinctes.*

3° *S'il y a plus de deux points doubles ou périodiques attractifs, l'un au plus de ces points peut avoir un domaine d'un seul tenant, les autres étant formés d'une infinité de domaines partiels distincts.*

4° *Dans les énoncés précédents, on peut comprendre parmi les points doubles attractifs ceux dont le multiplicateur est une racine de l'unité. Si l'étoile relative à ce point est une étoile à q branches, il équivaut à q points doubles distincts.*

33. Nous allons considérer maintenant la frontière f du domaine immédiat D d'un point double attractif α. f est un ensemble fermé et même parfait, car si f avait un point isolé, il en serait de même de $\mathcal{F}$ et nous savons que $\mathcal{F}$ est parfait. Je vais montrer que f est le dérivé de l'ensemble des antécédents d'un point quelconque de D obtenus au moyen des branches de fonctions $R_{-n}(z)$ restreintes à D. Il est clair que l'ensemble dérivé en question est contenu dans f, car les points limites d'antécédents d'un point a de D appartiennent à $\mathcal{F}$, si a est distinct du point double α; comme les antécédents considérés ici appartiennent tous à D, leurs points limites appartiennent à D ou à sa frontière f, cette seconde hypothèse étant seule admissible puisque ces points limites sont contenus dans $\mathcal{F}$.

Je vais montrer que réciproquement tout point de f appartient à l'ensemble dérivé que nous venons de définir. Cela va résulter aisément de la considération des suites normales formées par les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ restreintes à D. Considérons en effet un cercle c de centre α dont la circonférence ne renferme aucun point conséquent des points critiques de $\overline{R}_{-1}(z)$, et les parties $e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)}, \ldots$ des domaines antécédents de c qui sont d'un seul tenant avec α. On voit aisément que tout point de f est limite de points appartenant aux courbes (ovales de Cassini) qui forment la frontière des domaines $e^{(n)}$. Or il existe une couronne circulaire (c, c') entourant le cercle c dans laquelle les diverses branches des fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ forment une famille normale, pourvu que ce domaine coronal ait été transformé en un domaine simplement connexe au moyen d'une coupure radiale joignant les circonférences de c et de c', et de toute suite des fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$, on en peut extraire une autre qui converge uniformément dans ce domaine, contour compris, vers une fonction limite qui est, comme nous l'avons vu, une constante. Il s'ensuit que tout point de f étant limite de points tels que

$$\overline{R}_{-\alpha_1}(\xi'),\quad \overline{R}_{-\alpha_2}(\xi''),\quad \ldots,\quad \overline{R}_{-\alpha_n}(\xi^{(n)}),\quad \ldots,$$

où $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n)}, \ldots$ désignent des points de la circonférence de c, sera également limite de points tels que

$$\overline{R}_{-\beta_1}(\xi),\quad \overline{R}_{-\beta_2}(\xi),\quad \ldots,\quad \overline{R}_{-\beta_n}(\xi),\quad \ldots,$$

ξ étant un point fixe quelconque de la couronne (c, c'). On peut même supposer que ξ est un point quelconque de D, autre que α.

Voici d'autres propriétés de l'ensemble f :

1° Nous rappelons que f est invariant par la substitution $[z \mid R(z)]$.

2° f contient toujours au moins un point double de la substitution. En effet soient ξ un point de D distinct de α et des conséquents des points critiques de $R_{-1}(z)$ et ξ_{-1} un antécédent immédiat de ξ situé dans D, c'est-à-dire une valeur de $\overline{R}_{-1}(\xi)$. Il existe un domaine simplement connexe contenu dans D et contenant ξ et ξ_{-1}; soit δ ce domaine dans lequel on a tracé une ligne simple polygonale l joignant ξ à ξ_{-1}. A la ligne l, la branche de fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ qui prend en ξ la valeur ξ_{-1} fait correspondre la ligne l_{-1} allant de ξ_{-1} à ξ_{-2}, et au domaine δ le domaine simplement connexe δ_{-1} qui empiète sur δ puisque tous deux contiennent ξ_{-1} ; à δ_{-1}, la fonction $R_{-1}(z)$ (prolongée par cheminement continu sur $l+l_{-1}$) fait correspondre δ_{-2} qui empiète sur δ_{-1} et contient la ligne l_{-2} joignant ξ_{-2} à ξ_{-3} et ainsi de suite. Les domaines δ, $\delta_{-1}, \ldots, \delta_{-n}, \ldots$ empiètent chacun sur le précédent et le suivant; ils tendent d'ailleurs vers certains points de f comme il résulte de l'alinéa précédent, les fonctions $\overline{R}_{-n}(z)$ formant dans S une famille normale à fonctions limites constantes. Si λ est un tel point, limite du domaine $\delta_{-\beta_p}$, le domaine $\delta_{-(\beta_p+1)}$, tend aussi vers λ puisque ces deux domaines empiètent l'un sur l'autre et ont des dimensions infiniment petite avec $\frac{1}{p}$; comme le second de ces domaines est un antécédent immédiat du premier, il s'ensuit que $R(\lambda)=\lambda$; λ est donc un point double. Les domaines δ_{-n} ont tous pour limite ce point λ, car si $\delta_{-\beta_p}$ tendant vers λ et $\delta_{-(\beta_p+\gamma_p)}$ vers λ' dictinct de λ, le domaine

$$\delta_{-\beta_p} + \delta_{-(\beta_p+1)} + \ldots + \delta_{-(\beta_p+\gamma_p)}$$

qui est d'un seul tenant, aurait une infinité continue de points limites, ce qui est impossible puisque les racines λ de $R(z)=z$ sont en nombre fini. Il y a donc un chemin

$$l + l_{-1} + l_{-2} + \ldots$$

dans D qui part de ξ et aboutit au seul point frontière λ; λ, qui est un point double de la substitution, est en même temps un point accessible de D. λ est en général un point double répulsif; il peut se faire que λ soit un point double indifférent. S'il existe un seul point double répulsif, les autres points doubles étant tous attractifs, les domaines immédiats de ces derniers ont alors un point frontière commun.

3° On a toujours en certains points de f, quand le domaine D est borné, l'inégalité

$$|R'(z)| > \sqrt{\nu},$$

ν étant le nombre de branches de $\overline{R}_{-1}(z)$ qui se permutent dans D ($\nu \geqq 2$). En effet, soit A un petit domaine simplement connexe intérieur à D et dans lequel les fonctions $\overline{R}_{-n}^{(z)}$ n'ont pas de points critiques ; A peut être regardé comme la différence de deux domaines B et B' intérieurs à D et contenant le point double α; la somme des domaines antécédents de rang n du domaine B, qui sont intérieurs à D, tend vers le domaine D; le domaine B jouit de la même propriété; les deux sommes d'aires correspondantes ont donc même limite qui est l'aire de D; par suite, l'aire totale des domaines antécédents de rang n de A qui sont intérieurs à D tend vers zéro pour n infini. Si l'on avait $|R'(z)| \leqq \sqrt{\nu}$ sur f et par suite dans D, on en déduirait

$$|R'^2(z)| \leqq \nu, \qquad \frac{1}{R'^2(z)} \geqq \frac{1}{\nu};$$

le rapport d'un élément d'aire de D et de son conséquent étant ainsi supérieur à $\frac{1}{\nu}$; les ν éléments d'aire déduits de l'élément $d\omega$ par les ν branches de la fonction $\overline{R}_{-1}(z)$ auraient une somme supérieure à $\nu\frac{d\omega}{\nu} = d\omega$; donc les sommes des aires antécédentes de rang n de A et intérieures à D seraient non décroissantes avec $\frac{1}{n}$ et ne sauraient tendre vers zéro. Il y a contradiction. Le domaine D renferme donc des points où $|R'(z)| > \sqrt{\nu}$; il en est de même de sa frontière.

Nous trouverons par la suite d'autres propriétés de cet ensemble f, dont l'étude paraît plus difficile dans le cas général que celle de l'ensemble $\mathfrak{F}$.

34. Nous allons maintenant faire des hypothèses particulières qui nous permettront de préciser davantage la nature de cette frontière. Supposons que $\mathcal{F}$ ne renferme aucun point de l'ensemble $E_e + E'_e$ ou, ce qui revient au même, que l'on ait sur $\mathcal{F}$

$$|R'_h(z)| > K > 1;$$

supposons en outre D simplement connexe. Nous allons voir que f est alors en général une courbe de Jordan sans point double. En effet, nous savons que f est l'ensemble limite d'une suite de courbes $C, C_{-1}, C_{-2}, \ldots$ d'un seul tenant et sans points doubles, s'enveloppant mutuellement et dont chacune se déduit de la suivante par la substitution $[z|R(z)]$; sur ces courbes les ν valeurs de $\overline{R}_{-1}(z)$ se permutent circulairement, les points critiques de $\overline{R}_{-1}(z)$ et leurs conséquents pouvant d'ailleurs être supposés intérieurs à C. Supposons qu'on puisse ensuite, en dilatant la courbe C, obtenir une autre courbe C' complètement extérieure à D et telle que dans la couronne (C, C') ne se trouve aucun point de l'ensemble $E_e + E'_e$, en sorte que, sur C, les ν valeurs de $\overline{R}_{-1}(z)$ se permutent encore circulairement ; pour tout point z de la couronne (C, C'), les valeurs de $\overline{R}_{-n}(z)$ tendent uniformément vers la frontière f de D, intérieure à cette couronne ; la courbe C'_{-n} déduite de C' par $[z|\overline{R}_{-n}(z)]$, sera donc, à partir d'une certaine valeur de n, intérieure à C.

On peut supposer qu'il en est ainsi à partir de $n = 1$. Nous pouvons donc considérer f comme limite commune de deux suites de courbes C_{-n} et C'_{-n}, telles que C'_{-p} soit extérieure à C_{-q}, $C_{-(n+1)}$ extérieure à C_{-n} et $C'_{-(n+1)}$ intérieure à C'_{-n}, l'écart [1] de C_{-n} et C'_{-n} tendant vers zéro, et les couronnes (C_{-n}, C'_{-n}) contenant au moins un point double répulsif de la substitution donnée. Les considérations du paragraphe 24 (Chap. III) sont donc ici applicables, à cela près qu'au lieu de la totalité des branches de la fonction $R_{-1}(z)$, on ne considère ici que les ν branches de la fonction $R_{-1}(z)$ égale à α pour $z = \alpha$, et se permutant circulairement sur

---

[1] L'écart de deux courbes C et C' est défini comme il suit : soit de la plus courte distance d'un point m de C à la courbe C; lorsque m décrit C, d possède un maximum qu'on peut désigner par (C, C') ; le plus grand des deux nombres (C, C') et (C', C) est l'écart des deux courbes.

les courbes C_{-n} et C'_{-n}. L'ensemble limite f de ces courbes est donc encore ici une courbe de Jordan sans points doubles, susceptible du mode de représentation obtenue dans ce paragraphe. Tous les points de f sont alors des points accessibles; ils sont tous limites des points périodiques, ces points étant denses sur f.

Si la condition que $\mathfrak{F}$ ne renferme aucun point de $E_c + E'_c$ est toujours vérifiée, D n'étant plus simplement connexe, l'ensemble f, s'il n'est pas partout discontinu, renferme une infinité de continus distincts.

Si l'on ne fait plus aucune hypothèse particulière, la question de reconnaître si la frontière du domaine immédiat d'un point double attractif peut avoir des points inaccessibles présente des difficultés que je ne suis pas parvenu à surmonter.

35. Nous allons maintenant revenir brièvement sur le cas où l'ensemble $\mathfrak{F}$ est partout discontinu. Supposons qu'il y ait un point double attractif; son domaine est alors d'un seul tenant et se confond avec le domaine immédiat D; ce dernier est complémentaire de l'ensemble $\mathfrak{F}$ (qui se confond ici avec f). Les points critiques de $R_{-1}(z)$ appartiennent tous à $\mathfrak{F}$ ou à D. L'existence de points critiques de $R_{-1}(z)$ appartenant à $\mathfrak{F}$ ne paraît pas compatible avec la discontinuité totale de $\mathfrak{F}$, mais nous n'avons pu le démontrer d'une manière rigoureuse. En revanche, on démontre facilement que si tous les points critiques de $R_{-1}(z)$ sont intérieurs au domaine immédiat D du point double attractif α, l'ensemble $\mathfrak{F}$ est partout discontinu. En effet, l'ensemble E'_c, dérivé des conséquents des points critiques se réduisant au point α intérieur à D, on peut tracer dans D une courbe simple séparant le plan en deux régions dont l'une contient tous les points de l'ensemble $E_c + E'_c$; soient A l'aire simplement connexe ainsi définie, A_1, A_2, ... ses conséquentes; A_n tendant vers le point α sera à partir d'une certaine valeur h de n intérieure à A.

Si l'on pose $R_k(z) = T(z)$, les fonctions inverses de $T(z)$ sont holomorphes dans l'aire B complémentaire de A et y forment une famille normale à fonctions limites constantes, de sorte que les aires antécédentes de B de rang infiniment grand ont des dimensions infiniment petites; les considérations du paragraphe **23** sont donc ici applicables et $\mathcal{J}$ est partout discontinu.

Examinons, en particulier, le cas où $R(z)$ est un polynome; le domaine du point à l'infini est alors d'un seul tenant et se confond avec le domaine immédiat D. Les valeurs de $R_{-1}(z)$ se permutent toutes circulairement sur une circonférence de rayon infiniment grand, le point à l'infini étant un point critique qui compte pour $d-1$ points critiques simples; il y a, en outre, $d-1$ points critiques à distance finie. Cherchons alors la condition pour que D soit simplement connexe. S'il en est ainsi, le long d'une courbe simple située dans D et laissant à son extérieur tous les points critiques de $R_{-1}(z)$ qui appartiennent à D, toutes les valeurs de $R_{-1}(z)$ se permutent circulairement entre elles; il y a alors (Chap. I, § 5) $d-1$ points critiques intérieurs à cette courbe, extérieurs par conséquent à D. Donc aucun point critique à distance finie n'appartient à D, et réciproquement. S'il en est ainsi, D est simplement connexe. Si, au contraire, il y a un point critique à distance finie, ou si l'on veut un point racine de $R'(z)=0$ dont les conséquents successifs tendent vers l'infini, D est d'ordre de connexion infini. Si, en particulier, tous les points racines de $R'(z)=0$ appartiennent au domaine du point à l'infini, ce domaine a pour frontière un ensemble parfait partout discontinu.

36. Les considérations qui précèdent permettent de traiter un grand nombre d'exemples numériques et de se rendre compte avec une certaine précision de la structure de l'ensemble $\mathcal{J}$ ainsi que de la division correspondante du plan en régions. Voici quelques-uns de ces exemples :

I. $$R(z)=az+z^3,$$

a constante réelle comprise entre 1 et 2.

Il y a trois points doubles attractifs qui sont le point à l'infini et les deux points $z^2=1-a$, situés sur l'axe imaginaire pour lesquels $R'(z)$ a la valeur $3-2a$ comprise entre -1 et $+1$. Dans le domaine de chacun de ces points d'attraction se trouve un point critique et un seul de la fonction $R_{-1}(z)$. Les domaines immédiats de ces trois points sont simplement connexes et limités par des courbes de Jordan; il en est de même des domaines antécédents [1]. Le point double répulsif $z = 0$ est un point frontière commun aux trois domaines immédiats. L'ensemble $\mathcal{J}$ est formé d'un continu unique. Il y a évidemment symétrie par rapport à l'axe réel (ce dernier n'ayant en commun avec $\mathcal{J}$ que le point $z = 0$). On peut se faire une idée de l'ensemble $\mathcal{J}$ par l'exemple suivant qui est analogue : considérons deux circonférences tangentes entre elles extérieurement; traçons ensuite deux autres circonférences tangentes extérieurement respectivement aux deux premières et complètement extérieures l'une à l'autre; traçons ensuite quatre circonférences tangentes extérieurement respectivement aux quatre circonférences déjà tracées, mais extérieures les unes aux autres et ainsi de suite de manière que les rayons de ces circonférences successivement tracées tendent vers zéro et que chaque point de l'une d'elles soit limite de points de contact; l'ensemble de toutes ces circonférences et de leurs points limites forme une courbe ayant une infinité de points doubles qui est analogue à notre ensemble $\mathcal{J}$; les circonférences doivent seulement être remplacées par des courbes de Jordan sans points doubles qui, comme nous le verrons au Chapitre suivant, n'ont de tangentes en aucun point.

II. $$R(z) = \frac{z}{2 + z + z^3}.$$

L'origine est ici un point double attractif dont le domaine est d'un seul tenant, d'après ce que nous avons vu au paragraphe **32** au sujet des fractions rationnelles de la forme $\frac{z}{P(z)}$; l'origine est un point critique de la branche de $R_{-1}(z)$ qui y devient infinie; nous avons, en outre, trois points critiques qui s'obtiennent en posant

$$R'(\alpha) = 0, \qquad c = R(\alpha),$$

---

[1] On constate aisément que l'analyse du paragraphe 34 s'applique ici aux domaines des points $\pm\sqrt{1-\alpha}$, mais non au domaine du point à l'infini dont la courbe limite a des points doubles.

ce qui donne

$$\alpha^3 = 1 \quad \left\{ \begin{aligned} c &= \frac{1}{4}, \\ c &= \frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{3 + e^{\frac{2i\pi}{3}}}, \\ c &= \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}}{3 + e^{\frac{4i\pi}{3}}}. \end{aligned} \right.$$

On a donc pour ces trois points $|c| < \frac{1}{3}$. Il s'ensuit qu'ils appartiennent au domaine du point $z = 0$, car, pour $|z| \leqq \frac{1}{3}$, on a

$$|R(z)| < \frac{|z|}{2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{27}} = K|z| \qquad (K < 1).$$

Donc tous les points critiques de $R_{-1}(z)$ appartiennent au domaine immédiat du point $z = 0$, et ce domaine est le complémentaire d'un ensemble parfait partout discontinu.

III. $$R(z) = \frac{1}{4\sqrt{2}}(z^4 + 1) + z.$$

Le domaine du point à l'infini comprend ici tout l'axe réel. Il y a, en outre, deux points doubles attractifs imaginaires conjugués qui sont les points racines de l'équation $z^4 + 1 = 0$, dont la partie réelle est positive : $z = e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$. Les multiplicateurs correspondants ont en effet pour valeurs $\frac{1 \pm i}{4}$, ils sont donc plus petits que l'unité en module. Il y a à distance finie trois points critiques de $R_{-1}(z)$ dont l'un est réel et appartient au domaine du point à l'infini, les deux autres appartenant respectivement aux domaines des points $e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$; le premier de ces domaines est donc d'ordre de connexion infini et d'un seul tenant, les deux autres étant formés d'une infinité de parties qui sont chacune simplement connexe. L'analyse du paragraphe 34 est ici applicable aux domaines immédiats des points $e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$; on prendra, par exemple, pour la courbe C′ le périmètre d'un carré de côté infiniment grand, situé dans le demi-plan supérieur symétrique par rapport à l'axe imaginaire, l'un des côtés étant infiniment voisin de l'axe réel; les frontières de ces domaines immédiats sont donc des courbes de Jordan sans points doubles; ces deux courbes frontières sont ici sans point commun, à cause de la symétrie par rapport à l'axe réel qui est sans point commun avec elles. Soient D et D′ ces deux domaines, D étant au-dessus de l'axe réel. On constate aisément que parmi les racines d'une équation telle que $R(z) = \xi$, où ξ est imaginaire, il y en a toujours deux dont la partie imaginaire est positive et deux dont la partie imaginaire est négative; on en conclut que les deux domaines antécédents immédiats de D, distincts de D lui-même, sont au-dessous de l'axe réel; ils sont donc sans point frontière commun avec D; ils sont aussi sans point frontière commun entre eux. Si l'on considère les domaines D et D′ et leurs antécédents, on a une infinité dénombrable de domaines distincts et sans points frontières communs deux à deux; ces domaines ont des dimensions linéaires qui tendent vers zéro et leurs points limites sont tous les points de l'ensemble $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ renferme ainsi une infinité de continus distincts.

IV. $$R(z) = z(z+1)(z+2) = z^3 + 3z^2 + 2z.$$

Il y a, outre le point à l'infini, un point double atttractif

$$z = \frac{-3+\sqrt{5}}{2};$$

le domaine du point à l'infini comprend le demi-axe réel positif à l'exclusion de $z = 0$. Les points critiques à distance finie de la fonction $R_{-1}(z)$ sont les points $z = \frac{+2}{3\sqrt{3}}$ et $z = \frac{-2}{3\sqrt{3}}$. Le premier appartient au domaine du point à l'infini qui est, par suite, d'ordre de connexion infini. Le second appartient au domaine immédiat du point double $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$, qui est simplement connexe; comme deux déterminations seulement de $R_{-1}(z)$ se permutent autour de ce point critique, le domaine total du point $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ comprend une infinité de parties distinctes qui sont toutes simplement connexes. On verra facilement que ces domaines partiels n'ont pas de points frontières communs; ils sont limités par des courbes sans points doubles. L'ensemble $\mathcal{F}$ comprend dans cet exemple, comme dans le précédent, une infinité de continus distincts. Bien que l'ensemble E'_c ne renferme ici que deux points doubles attractifs, il n'y a pas, comme dans les exemples considérés au Chapitre III, partage du plan en deux régions simplement connexes.

V. $$R(z) = z(z-a)^2(|a|>1).$$

Le point $z=0$ est à la fois point double répulsif et point critique de $R_{-1}(z)$. Nous avons, en outre, les deux points doubles $z=a\pm 1$ pour lesquels $R'(z)=(z-a)(3z-a)$ prend les valeurs $3\pm 2a$ dont une au plus est inférieure à 1 en module. Si a est réel, positif et plus grand que 1, il faudra, en outre, que a soit inférieur à 2 pour qu'il y ait un point double attractif à distance finie. Soit donc $1<a<2$. Les domaines des deux points doubles ∞ et $a-1$ sont, le premier d'un seul tenant et simplement connexe, le second formé d'une infinité de parties simplement connexes; en effet, les domaines immédiats de ces deux points renferment respectivement un point critique unique de $R_{-1}(z)$:

$$\left(z=\infty \quad \text{et} \quad z=\frac{4a^3}{9}\right),$$

le premier permutant les trois branches de cette fonction et le second permutant seulement deux branches. L'ensemble $\mathcal{F}$ est formé ici d'une seule courbe présentant une infinité de points doubles, à savoir la courbe frontière du domaine simplement connexe D_∞ qui partage le plan en une infinité de régions.

VI. $$R(z) = \frac{2z^3+1}{3z^2}.$$

Cette fraction est celle qu'on obtient lorsqu'on applique la méthode d'approximation de Newton à l'équation $z^3-1=0$. Les points racines de cette équation sont des points doubles attractifs à multiplicateur nul; ils sont points critiques simples de la fonction $R_{-1}(z)$. Le point à l'infini est un point double répulsif, également point critique de $R_{-1}(z)$. Ces quatre points constituent l'ensemble E'_c. Les domaines des trois points $z = 1^{\frac{1}{3}}$ sont formés d'une infinité de parties simplement connexes. Cherchons, en particulier, ce qui se passe sur l'axe réel. Le segment $(0, +\infty)$ appartient au domaine du point $z = 1$. Ce segment a un antécédent immédiat, autre que lui-même et situé sur l'axe réel; c'est ce qu'on verra facilement en construisant la courbe $y = \frac{2z^3+1}{3z^2}$ pour z variant de $-\infty$ à $+\infty$; cette courbe a une asymptote de rebroussement $z = 0$, une asymptote d'inflexion $y = \frac{2}{3}z$, et un point à tangente horizontale $y = z = 1$. Le segment $\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, 0\right)$ antécédent de $(0, +\infty)$ a lui-même un antécédent réel qui lui est adjacent et situé à sa gauche, et ainsi de suite. Les longueurs de tous ces segments, à partir du troisième, vont en croissant, comme il résulte de l'expression de $R'(z) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{z^3}\right)$. Les extrémités de ces segments ont donc l'infini pour point limite unique. Le domaine du point $z = 1$ comprend donc tout l'axe réel, sauf une infinité dénombrable de points ayant l'infini pour point limite unique. Les domaines des deux autres points d'attraction se déduisent du premier par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ autour de l'origine; les domaines connexes partiels relatifs à ces trois points ont toujours des points frontières communs, à savoir les points $z = \infty$, $z = 0$ et leurs antécédents.

VII. $$R(z) = Kz - \frac{1}{z}.$$

Si K est réel et positif, on a une substitution à cercle fondamental dont les propriétés sont connues.

Supposons K réel et négatif et égal à $-K'$. On a alors

$$Z = -K'z - \frac{1}{z}.$$

En posant $Z = iT$, $z = it$, il vient

$$T = -K't + \frac{1}{t}.$$

On est encore ramené à une substitution à cercle fondamental du deuxième type.

Supposons maintenant K imaginaire. Les deux points doubles $z = \pm\sqrt{\frac{1}{K-1}}$, de multiplicateurs égaux à $2K - 1$, seront attractifs si K est intérieur au cercle décrit sur (o, 1) comme diamètre. Supposons cette condition remplie; les deux points critiques de $R_{-1}(z)$ appartiennent respectivement aux domaines immédiats de ces deux points; comme il n'y a que deux branches de $R_{-1}(z)$ qui se permutent autour de chacun de ces points, les domaines des deux points d'attraction sont d'un seul tenant, simplement connexes et séparés par une courbe qui est ici une courbe de Jordan sans points doubles, et qui passe notamment par le point à l'infini (point double répulsif de multiplicateur K imaginaire) et par l'origine. Cette courbe n'est pas analytique, tous les antécédents de $z = \infty$ qui forment un ensemble dense sur la courbe étant des points sans tangente.

Si l'on pose $T = Z^2$, $t = z^2$, on obtient, entre T et t, la relation

$$T = t\left(K - \frac{1}{t}\right)^2 = R_1(t).$$

On verra alors, comme au paragraphe 25, que la substitution $[t, R_1(t)]$ admet un point double attractif dont le domaine comprend tous les points extérieurs à un arc de courbe joignant les points o et ∞. Cette courbe n'est pas analytique.

VIII. $\qquad R(z) = z^2 - 1.$

Les points $z = 0$ et $z = -1$ forment un couple périodique attractif de multiplicateur nul; l'ensemble E'_c se compose de ces deux points et du point à l'infini. Les domaines des points o et -1 se composent d'une infinité de domaines partiels simplement connexes, tandis que le domaine du point à l'infini est d'un seul tenant et limité par une courbe ayant une infinité de points doubles.

IX. $\qquad R(z) = z + z^2.$

Il y a ici un point double indifférent $z = 0$, de multiplicateur égal à $+1$. On sait que ce point est à la fois limite de conséquents de certains domaines et point frontière, c'est-à-dire point de l'ensemble $\mathcal{F}$. Le domaine du point $z = 0$ comprend l'intérieur du cercle décrit sur $(0, -1)$ comme diamètre; la limite des domaines antécédents de ce cercle, c'est-à-dire le domaine du point zéro, est simplement connexe; l'ensemble $\mathfrak{J}$ sépare le plan en deux régions qui sont les domaines respectifs des points $z = 0$ et $z = \infty$. Cet ensemble $\mathfrak{J}$ est ici constitué par une courbe; on peut encore démontrer que c'est une courbe de Jordan sans points doubles; elle a une infinité dense de points de rebroussement qui sont le point $z = 0$ et ses antécédents : cela résulte immédiatement des considérations du Chapitre II.

37. Nous aurons encore l'occasion d'examiner quelques exemples particuliers. Nous nous bornons pour l'instant à ceux qui précèdent et nous allons indiquer quelques propriétés simples, communes à toutes les substitutions à coefficients réels ou, ce qui revient au même, à celles qui laissent invariante une circonférence quelconque du plan.

Supposons qu'il existe un point double attractif O sur la circonférence invariante Γ. Le domaine du point O est symétrique par rapport à Γ. Il peut arriver que tous les points de Γ appartiennent au domaine (immédiat) D de O. D est alors d'ordre de connexion infini; car si m est un point de la frontière f de D, le symétrique m' de m par rapport à Γ appartient aussi à f; m et m' étant séparés par Γ dont aucun point n'appartient à f, f n'est pas continu, donc D n'est pas simplement connexe; il est alors d'ordre de connexion infini. S'il existe un autre point double attractif P, il y en a également un en P′ symétrique de P. Les domaines totaux des points P et P′ sont alors formés d'une infinité de parties distinctes; on voit de plus que les domaines immédiats de P et de P′ n'ont aucun point frontière commun; les domaines immédiats de O et de P ont des points frontières non communs.

Si tous les points de Γ n'appartiennent pas au domaine immédiat du point O, considérons l'arc ab de Γ contenant O et contigu à l'ensemble fermé, section de $\mathfrak{J}$ par Γ. Lorsque z décrit Oa, $R(z)$ part de O pour aboutir en un point qui appartient à $\mathfrak{J}$ et qui ne peut être que l'une des extrémités de l'arc contigu ab; on a donc

$$R(a) = a \quad \text{ou} \quad b,$$
$$R(b) = a \quad \text{ou} \quad b.$$

Les points a et b sont donc : soit deux points doubles de multiplicateurs réels s avec $|s| > 1$ ou $s = \pm 1$; soit un point double et son antécédent immédiat; soit deux points d'un couple périodique. Si a et b sont confondus, on a $a = R(a)$.

Si le domaine immédiat de O est simplement connexe, sa section par Γ se réduit à l'arc ab; supposons, en effet, qu'il existe un autre arc cd dont tous les points intérieurs appartiennent à ce domaine immédiat, les extrémités c et d étant des points frontières. On peut joindre un point de ab à un point de cd par une ligne brisée polygonale dont tous les points sont intérieurs au domaine D (on peut supposer que Γ est l'axe réel). Soient p et q le dernier point de rencontre de ab et le premier point de rencontre de cd avec cette ligne brisée; on a ainsi une ligne brisée joignant pq et qui peut être supposée tout entière au-dessus de l'axe réel, sauf aux extrémités p et q, car le domaine D étant symétrique par rapport à l'axe réel, on peut toujours remplacer toute portion de cette ligne comprise entre deux points de l'axe réel par sa symétrique de façon qu'elle n'ait plus aucun point au-dessous de l'axe réel et la déformer ensuite infiniment peu de manière à supprimer les points situés sur l'axe réel; on a ainsi une ligne qu'on peut remplacer au besoin par une autre dépourvue de points doubles joignant un point de ab à un point de cd, située au-dessus de l'axe réel et intérieure à D. En lui adjoignant sa symétrique, on obtient un contour fermé simple intérieur à D tel qu'il existe deux points de la frontière f de D (par exemple a et d) de part et d'autre de ce contour. Donc D ne serait pas simplement connexe.

Cherchons maintenant la condition pour que tous les points de $\mathfrak{F}$ appartiennent à Γ. Si $\mathfrak{F}$ n'est pas partout discontinu, il renferme au moins un segment ab; il existe alors un petit cercle tel que tous les points de $\mathfrak{F}$ qui lui sont intérieurs forment un arc de la circonférence Γ; comme $\mathfrak{F}$ résulte de l'itération jusqu'à un rang fini de sa section par ce petit cercle (§ 27, III), $\mathfrak{F}$ est lui-même formé d'un arc de Γ. Si $\mathfrak{F}$ comprend toute la circonférence, la substitution possède un cercle fondamental. Si $\mathfrak{F}$ comprend seulement un arc de la circonférence, la substitution laissant invariants cet arc, d'une part, et le domaine limité par cet arc, d'autre part, appartient au type étudié au paragraphe 25 et possède un point double attractif sur la circonférence, dont le domaine d'attraction admet précisément cet arc pour frontière.

Si $\mathcal{J}$ est partout discontinu, la substitution peut encore être une substitution à cercle fondamental de deuxième espèce ou d'espèce singulière, ou encore une substitution (§ 25) laissant invariants un arc de cercle et le domaine qui a cet arc pour frontière. Mais il est possible, *a priori*, que la substitution n'appartienne à aucune de ces deux catégories et la question appelle de nouvelles recherches. On verra aisément qu'il y a toujours, dans ce cas, un point double sur Γ de multiplicateur plus petit que 1 en module ou égal à $+1$.

Considérons toujours une substitution à coefficients réels et supposons qu'il existe deux points doubles attractifs imaginaires conjugués O et O'; si la substitution n'a pas de cercle fondamental, comme, d'autre part, l'ensemble $\mathcal{J}$ n'est pas partout discontinu puisqu'il y a deux constantes limites distinctes, il résulte de ce qui précède qu'il y a des points de $\mathcal{J}$ extérieurs à l'axe réel. En outre, il est évident qu'aucun point réel n'appartient aux domaines de O ni de O'. Soient μ un point de $\mathcal{J}$ situé du même côté que O par rapport à l'axe réel et m le premier point de rencontre à partir de O du segment $O\mu$ avec $\mathcal{J}$; un point a du domaine immédiat D' de O' a des antécédents a_{-n} dans un cercle de centre m et de rayon infiniment petit; les points a et a_{-n} étant séparés par l'axe réel, on en conclut que le domaine total de O' n'est pas d'un seul tenant et se compose par suite d'une infinité de parties distinctes; de même pour le point O. On voit aussi que m, point frontière du domaine immédiat de O, n'est pas frontière du domaine immédiat de O'; ces deux frontières ne coïncident donc pas. On verra aussi que le domaine immédiat D de O et l'un de ses antécédents ont des frontières non identiques.

Enfin, on démontrera sans peine que, pour une substitution à coefficients réels, aucun segment de l'axe réel ne saurait appartenir à un domaine singulier.

Les exemples examinés tout à l'heure fournissent des illustrations des propriétés étudiées dans ce paragraphe.