BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Courbe de raccordement et élastique plane

Bulletin de la S. M. F., tome 49 (1921), p. 105-108

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1921__49__105_0>

COURBE DE RACCORDEMENT ET ÉLASTIQUE PLANE;

Par M. P. Appell.

I. Ayant été consulté sur la mode de raccordement de deux routes rectilignes A'A, B'B dans un plan, j'ai cherché, comme étant la meilleure courbe de raccordement, la courbe tangente à A'A et B'B en A et B, sans points anguleux ni rebroussements, rendant *minimum* l'intégrale

$$I = \int \frac{ds}{\rho^2}$$

prise le long de la courbe, ds désignant un élément d'arc et ρ le rayon de courbure de cet élément. Il faut, en effet, éviter les grandes courbures et aussi les grandes longueurs.

Les coordonnées x et y d'un point M de la courbe peuvent être regardées comme des fonctions de l'arc s compté, de A vers B, à partir de A. On a alors

$$I = \int_0^l (x''^2 + y''^2)\, ds,$$

en désignant les dérivées par rapport à s par des accents et la longueur de la courbe par l. On a de plus

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Suivant une méthode classique, écrivons que cette intégrale est minimum, en particulier, quand on passe de la courbe cherchée à une courbe infiniment voisine de même longueur. On a alors

$$\frac{1}{2}\delta I = \int_0^l (x''\,\delta x'' + y''\,\delta y'')\, ds.$$

Remplaçant $\delta x'' \, ds$, $\delta y'' \, ds$ par $d\delta x'$, $d\delta y'$ et intégrant par parties, en remarquant que $\delta x'$, $\delta y'$ sont nuls aux limites, on a

$$\frac{1}{2}\delta I = -\int_0^l (x''' \delta x' + y''' \delta y') \, ds.$$

Mais on a

$$x' \delta x' + y' \delta y' = 0,$$

donc λ désignant une fonction arbitraire de s

$$\frac{1}{2}\delta I = -\int_0^l [(x''' - \lambda x') \delta x' + (y''' - \lambda y') \delta y'] \, ds.$$

Intégrons par parties après avoir fait

$$\delta x' \, ds = d\,\delta x, \qquad \delta y' \, ds = d\,\delta y$$

et remarquons que δx et δy s'annulent aux limites. Il vient

$$\frac{1}{2}\delta I = \int_0^l \left[\frac{d}{ds}(x''' - \lambda x') \delta x + \frac{d}{ds}(y''' - \lambda y') \delta y\right] ds.$$

Égalant à zéro les coefficients de δx et de δy, on a

$$\frac{d}{ds}(x''' - \lambda x') = 0, \qquad \frac{d}{ds}(y''' - \lambda y') = 0,$$

d'où

(1) $$x''' - \lambda x' = a, \qquad y''' - \lambda y' = b$$

avec

(2) $$x'^2 + y'^2 = 1,$$

a et b désignant des constantes.

Éliminant λ entre les deux équations (1), on a

$$x''' y' - y''' x' = a y' - b x',$$

d'où en intégrant

(3) $$x'' y' - y'' x' = a y - b x + c.$$

Mais cette équation montre que la courbe cherchée n'est autre que l'élastique plane (*voir* mon *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I, Chap. VII).

En effet, la quantité $x''y' - y''x'$ est égal à $\pm \frac{1}{\rho}$; si l'on prend pour axe OX la droite

$$ay - bx + c = 0$$

et pour axe OY une perpendiculaire, on a

$$Y = \pm \frac{ay - bx + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

L'équation (3) s'écrit alors, dans le nouveau système d'axes,

$$\rho Y = \text{const.},$$

équation qui caractérise l'élastique plane.

Quand a et b sont nuls, la courbe est un cercle, car on a

$$\rho = \text{const.}$$

Ces indications générales devront être complétées par une discussion détaillée, conduisant, dans chaque cas, à la détermination des constantes.

Ce résultat peut se rattacher à la considération de l'énergie de l'élastique plane.

II. D'une façon générale posons

$$c = x''^2 + y''^2 = \frac{1}{\rho^2},$$

et cherchons les courbes pour lesquelles l'intégrale

$$I = \int_0^l f(c)\, ds$$

est un *minimum*, $f(c)$ étant une fonction positive donnée.

Un calcul analogue au précédent montre que, en prenant un axe OX convenable, on a pour ces courbes

$$\rho Y = hf'(c),$$

h désignant une constante. Si

$$f(c) = \frac{1}{\rho^{2n}} = c^n,$$

on a

$$\rho^{2n-1}Y = \text{const}.$$

En prenant

$$f(c) = (\sqrt{c} - k)^2,$$

où k est une constante, on trouve encore l'élastique plane.

III. *Indications bibliographiques.* — Nous nous sommes placés à un point de vue purement géométrique. Dans les chemins de fer, les ingénieurs font le raccordement en tenant compte du *dévers* de la voie. On pourra consulter à ce sujet les travaux suivants :

NORDLING (*Annales des Ponts et Chaussés*, 1867_2) propose l'emploi de la parabole cubique.

JULES MICHEL, *Raccordement des courbes avec les alignements dans le tracé des chemins de fer* [*Revue générale des chemins de fer* (Dunod), novembre 1879].

TOURTAY (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1883_2) emploie la *Clothoïde*, ou courbe de Cornu.

BOURLET, *Traité des bicycles et bicyclettes* (*Encyclopédie Léauté*), indique le Clothoïde.

D'OCAGNE, *Leçons sur la Topométrie* (Chap. IV, Théorie générale du raccordement), indique la lemniscate et l'élastique plane.

PAUL ADAM (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1895_2) préconise l'emploi de la lemniscate.

M. EDLER DE LEBER, *Calcul des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer* (Baudry, 1892).