

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

Sur les développements en série suivant les inverses de polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 189-191

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__189_0

© Bulletin de la S. M. F., 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE
SUIVANT LES INVERSES DE POLYNOMES ;**

PAR M. PAUL APPELL.

Dans le *Bulletin de la Société mathématique* (p. 7-48, 1920), j'ai résumé diverses recherches antérieures. Il est évident que, étant donnée une suite de polynomes dans les conditions indiquées

$$P_\nu(x) = x^\nu + a_{1,\nu} x^{\nu-1} + a_{2,\nu} x^{\nu-2} + \dots + a_{\nu,\nu},$$

si l'on développe $\frac{1}{x-y}$ par une série

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{P_1(x)} + \frac{Q_1(y)}{P_2(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_3(x)} + \dots,$$

on peut, par l'identification des développements des deux membres en séries procédant suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, $|y| < |x|$, déterminer les polynomes $Q_1(y)$, $Q_2(y)$, ..., $Q_\nu(y)$ dont les coefficients apparaissent alors comme polynomes par rapport aux coefficients $a_{m,k}$ des polynomes P_ν .

Comme je l'ai montré, on peut considérer l'intégrale

$$I_n^\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{Q_\nu(x)}{P_{n+1}(x)} dx$$

prise, dans le sens positif, sur un contour C entourant toutes les racines du polynome donné $P_{n+1}(x)$; la notation $Q_\nu(x)$ désigne un polynome de degré ν

$$Q_\nu(x) = x^\nu + b_{1,\nu} x^{\nu-1} + b_{2,\nu} x^{\nu-2} + \dots + b_{\nu,\nu},$$

assujetti à une sorte d'orthogonalité avec P_{n+1} , de telle manière que

$$(1) \quad I_n^\nu = 0, \quad \nu \geq n; \quad I_n^n = 1.$$

En vue de la détermination des $b_{m,\nu}$, nous écrivons

$$(2) \quad I_n^\nu = K_n^\nu + b_{1,\nu} K_n^{\nu-1} + b_{2,\nu} K_n^{\nu-2} + \dots + b_{\nu,\nu} K_n^0$$

en posant

$$(3) \quad K_n^p = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^p}{P_{n+1}(x)} dx.$$

Vérifions d'abord que cette intégrale est une fonction rationnelle entière des coefficients de P_{n+1} . En prenant le cas général où P_{n+1} a $(n+1)$ racines distinctes quelconques x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , l'intégrale est égale à la somme des résidus

$$(4) \quad K_n^p = \sum_{\mu=1}^{\mu=n+1} \frac{x_\mu^p}{(x_\mu - x_1)(x_\mu - x_2)\dots(x_\mu - x_{\mu-1})(x_\mu - x_{\mu+1})\dots(x_\mu - x_{n+1})}$$

où x_{n+1+k} est identique à x_k ; en réduisant au même dénominateur, on obtient

$$(5) \quad K_n^p = \frac{\Delta_p}{\Delta_n},$$

où Δ_p désigne le déterminant

$$(6) \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} x_1^p & x_2^p & \dots & x_{n+1}^p \\ x_1^{p-1} & x_2^{p-1} & \dots & x_{n+1}^{p-1} \\ x_1^{p-2} & x_2^{p-2} & \dots & x_{n+1}^{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

et où Δ_n s'obtient en remplaçant p par n . Ces déterminants, qui s'annulent évidemment dès que deux des x_μ deviennent égaux, sont bien connus. On voit que Δ_p est divisible par Δ_n : l'intégrale K_n^p est donc une fonction symétrique entière des racines x_μ ; elle est une fonction rationnelle entière des coefficients $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \dots, a_{n+1,n+1}$. Comme on a, évidemment, ainsi qu'on le voit notamment d'après (5),

$$K_n^p = 0, \quad p < n; \quad K_n^n = 1,$$

les équations déterminant les $b_{m,\nu}$ deviennent

$$\begin{aligned} K_{\nu-1}^\nu + b_{1,\nu} &= 0, \\ K_{\nu-2}^\nu + b_{1,\nu} K_{\nu-2}^{\nu-1} + b_{2,\nu} &= 0, \\ \dots, \\ K_{\nu-\lambda}^\nu + b_{1,\nu} K_{\nu-\lambda}^{\nu-1} + b_{2,\nu} K_{\nu-\lambda}^{\nu-2} + \dots + b_{\lambda,\nu} &= 0, \\ \dots \end{aligned}$$

elles donnent successivement $b_{1,\nu}, b_{2,\nu}, \dots, b_{\nu,\nu}$.

Les K_n^μ peuvent s'obtenir de proche en proche. On a en effet, pour chaque racine x_μ ,

$$(7) \quad x_\mu^{n+1} + a_{1,n+1} x_\mu^n + a_{2,n+1} x_\mu^{n-1} + \dots + a_{n+1,n+1} = 0.$$

$(\mu = 1, 2, \dots, n+1).$

On a alors

$$\Delta_{n+1} = -a_{1,n+1} \Delta_n, \quad K_n^{n+1} = -a_{1,n+1};$$

puis, en multipliant (7) successivement, car $x_\mu, x_\mu^2, \dots, x_\mu^{k-1}$,

$$\Delta_{n+2} = -a_{1,n+1} \Delta_{n+1} - a_{2,n+1} \Delta_n,$$

.....,

ou encore

$$K_n^{n+2} = -a_{1,n+1} K_n^{n+1} - a_{2,n+1},$$

.....,

$$K_n^{n+k} = -a_{1,n+1} K_n^{n+k-1} - \dots - a_{n+1,n+1} K_n^{k-1}.$$