BULLETIN DE LA S. M. F.

P. C. DELENS

Sur la théorie invariante des cubiques planes

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 212-219
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__212_1>

SUR LA THÉORIE INVARIANTE DES CUBIQUES PLANES;

PAR M. P.-C. DELENS.

Je vais indiquer ici quelques propriétés d'une forme mixte, covariante à une forme cubique ternaire, qui a été, je crois, peu étudiée.

Soit $F^{(3)}$ une cubique générale du plan; à tout point m du plan correspond une conique polaire

$$P^{(2)} \equiv F^{(3)} \between m \quad \text{ou} \quad F^{(3)} \mid m. \tag{1}$$

Les coniques polaires de tous les points du plan forment un réseau linéaire, que j'appellerai le réseau polaire. Il sera dans la suite nécessaire de distinguer entre les lieux de points, conique, cubique, etc., et les enveloppes de droites, que j'appellerai simplement deuxième classe, troisième classe, etc. Ainsi une conique polaire a comme forme contrevariante la deuxième classe

$$p^{(2)} \equiv \frac{1}{2!} P^{(2)} \between P^{(2)} \equiv \frac{1}{2!} (F^{(3)} \mid m \between F^{(3)} \mid m). \tag{2}$$

Celle-ci dépend linéairement de la deuxième classe m^2, qui est un point double; c'est ce que nous indiquerons par

$$p^{(2)} \equiv \Psi m^2.$$

Plus généralement, à toute deuxième classe $q^{(2)}$, l'opération Ψ

fera correspondre une deuxième classe

$$p^{(2)} \equiv \Psi q^{(2)} \tag{3}$$

que nous dirons *polaire* de la première.

La correspondance polaire par rapport à la cubique conduit également à associer à une droite D sa poloconique $R^{(2)}$. Si x est le point courant du plan, l'équation de celle-ci est

$$y^{(2)} \between D^2 = \frac{1}{2!} F^{(3)} \mid x \between F^{(3)} \mid x \between D^2 \equiv R^{(2)} \between x^2 = 0.$$

Plus généralement, nous appellerons *poloconique* d'une conique $S^{(2)}$ la courbe d'équation

$$y^{(2)} \between S^{(2)} \equiv R^{(2)} \between x^2 = 0, \tag{4}$$

et nous traduirons cette correspondance entre les deux coniques par

$$R^{(2)} \equiv \Phi S^{(2)}. \tag{5}$$

Les deux opérateurs Φ et Ψ sont représentés sous la forme symbolique par le même covariant mixte $\left(\overline{\alpha 12}^2\right.$ dans la notation de Cayley$\left.\right)$, du second degré par rapport aux coefficients de la cubique et aux deux séries de variables (covariantes et contrevariantes). Cette forme mixte est encore ce que Clebsch appelle un connexe, et qu'on désigne maintenant sous le nom de tenseur. Mais nous distinguerons ici les deux formes sous lesquelles il agit. Pour les calculs, la forme canonique

$$F^{(3)} \equiv U^3 + V^3 + W^3 + H^3$$

avec

$$0 \equiv \alpha U + \beta V + \gamma W + \delta H$$

semble la plus simple. On a alors

$$\Phi \equiv \Sigma\, UV, \quad \overline{UV}^2,$$

$$\Psi \equiv \Sigma\, \overline{UV}^2, \quad UV,$$

ce qui montre que ces deux opérateurs sont *conjugués*, c'est-à-dire que

$$p^{(2)} \between S^{(2)} \equiv q^{(2)} \between R^{(2)} \tag{6}$$

traduit

$$\Psi q^{(2)} \between S^{(2)} \equiv q^{(2)} \between \Phi S^{(2)}. \tag{7}$$

Les correspondances entre coniques et entre deuxièmes classes, indiquées par les opérateurs Φ et Ψ, jouissent de la propriété essentielle d'être *involutives*.

Appliquons en effet Φ aux six paires de droites UV, WH, UW, HV, UH, VW, qui sont six coniques linéairement indépendantes. On obtient

$$\Phi \mathrm{UV} \equiv \overline{\mathrm{WHU}}\,\overline{\mathrm{WHV}}\,\mathrm{WH},$$

$$\Phi \mathrm{WH} \equiv \overline{\mathrm{UVW}}\,\overline{\mathrm{UVH}}\,\mathrm{UV},$$

et les relations analogues; puis, par répétition de l'opération Φ,

$$\Phi\Phi \mathrm{UV} \equiv \overline{\mathrm{UVW}}\,\overline{\mathrm{UVH}}\,\overline{\mathrm{WHU}}\,\overline{\mathrm{WHV}}\,\mathrm{UV} \equiv \sigma \mathrm{UV},$$

σ étant l'invariant du quatrième degré de la cubique, qui s'annule si la forme cubique est réductible à la somme de trois cubes, ce que nous ne supposerons pas dans la suite. Il en est de même pour une quelconque des paires de droites indiquées, donc pour une conique quelconque, c'est-à-dire

$$\Phi\Phi S^{(2)} \equiv \sigma S^{(2)}. \tag{8}$$

Le carré fonctionnel de l'opérateur Φ est donc l'invariant σ; de même pour l'opérateur conjugué Ψ. En outre, la relation précédente donne, si

$$R^{(2)} \equiv \Phi S^{(2)},$$

$$\sigma S^{(2)} \equiv \Phi R^{(2)}.$$

De même

$$p^{(2)} \equiv \Psi q^{(2)}$$

entraîne

$$\sigma q^{(2)} \equiv \Psi p^{(2)}.$$

Dans ces conditions, la relation (6) devient

$$p^{(2)} \between S^{(2)} \equiv \frac{1}{\sigma} \Psi q^{(2)} \between \Phi R^{(2)} \equiv q^{(2)} \between R^{(2)}, \tag{9}$$

et montre que l'invariant linéaire $\Phi \between \Psi$ de Φ et Ψ a aussi pour valeur σ.

Nous pouvons désormais donner les définitions suivantes des poloconiques et deuxièmes classes polaires, prises par rapport à la cubique directrice $F^{(3)}$:

I. La poloconique $R^{(2)}$ d'une conique $S^{(2)}$ est le lieu des points (doubles) dont la deuxième classe polaire est apolaire à $S^{(2)}$.

II. La deuxième classe polaire $p^{(2)}$ d'une deuxième classe $q^{(2)}$ est l'enveloppe des droites (doubles) dont la poloconique est apolaire à $q^{(2)}$.

On voit que les transformations Φ, Ψ conservent les systèmes linéaires de coniques et deuxièmes classes, et *les relations d'apolarité*. Nous allons résumer en un tableau, que nous justifierons ensuite, les propriétés les plus remarquables de ces transformations. On n'oubliera pas que, les transformations étant involutives, ce tableau peut être lu dans les deux sens.

Transformation Φ.

1. (Polo-) conique.	(Polo-) conique.
2. Droite double.	Conique tritangente à la hessienne.
3. Paire de droites.	Conique passant par deux triades de contacts.
4 Conique polaire du point m pour $F^{(3)}$.	Conique polaire du point m pour $H^{(3)}$.
5. Conique $I^{(2)}$ ou $I'^{(2)}$.	Conique $I^{(2)}$ ou $I'^{(2)}$.

Transformation Ψ.

1. 2ᵉ classe (polaire).	2ᵉ classe (polaire).
2. Point double.	Forme tangentielle d'une conique du réseau polaire.
3. Paire de points.	2ᵉ classe harmonique à deux coniques du réseau polaire.
4. Apolaire au réseau polaire.	Apolaire au réseau polaire de $H^{(3)}$.
5. 2ᵉ classe $e^{(2)}$ ou $e'^{(2)}$.	2ᵉ classe $e^{(2)}$ ou $e'^{(2)}$.

Pour démontrer les propositions 2, 3 et 4 du tableau Φ, nous formerons d'abord l'équation de la hessienne $H^{(3)}$ de la cubique $F^{(3)}$. Ce sera évidemment

$$(10) \qquad \frac{1}{3!}(F^{(3)} \mid x \between F^{(3)} \mid x \between F^{(3)} \mid x) \equiv H^{(3)} \between x^3 = 0$$

exprimant que la conique polaire $y^{(2)}$ du point x est décomposée.

La conique polaire d'un point m par rapport à la hessienne aura donc pour équation

$$\frac{1}{3!}(F^{(3)} \mid m \between F^{(3)} \mid x \between F^{(3)} \mid x) \equiv H^{(3)} \between m x^2 = 0,$$

donc

$$\frac{1}{3}\Phi(F^{(3)} \mid m) \equiv H^{(3)} \mid m,$$

ce qui établit la proposition 4.

Représentons, comme précédemment, par $y^{(2)}$ la deuxième classe polaire du point double x^2, et soient D et D′ deux droites. En utilisant l'identité

$$[y^{(2)} \between D^2][y^{(2)} \between D'^2] - [y^{(2)} \between DD']^2 \equiv \frac{1}{2} y^{(2)} \between y^{(2)} \between \overline{DD'}^2$$

ainsi que

$$\frac{1}{2} y^{(2)} \between y^{(2)} \equiv [H^{(3)} \between x^3] F^{(3)} \mid x,$$

on aura

$$(11)\quad [\Phi D^2 \between x^2][\Phi D'^2 \between x^2] - [\Phi DD' \between x^2]^2 \equiv [H^{(3)} \between x^3](F^{(3)} \mid x \between \overline{DD'}^2,$$

qui montre qu'en leurs points communs avec la hessienne, les coniques ΦD^2 et $\Phi D'^2$ lui sont tangentes, et que la conique $\Phi DD'$ passe par les deux triades de points de contact. On voit en outre que cette dernière conique recoupe les précédentes sur la droite polaire du point $\overline{DD'}$ par rapport à la cubique.

La proposition 5 du tableau Φ se rapporte aux coniques invariantes dans la transformation; celles-ci se partagent en deux systèmes, que nous appelons les coniques $I^{(2)}$ et $I'^{(2)}$ suivant que

$$(12)\qquad \Phi\, I^{(2)} \equiv +\sqrt{\sigma}\, I^{(2)}$$

ou

$$(13)\qquad \Phi\, I'^{(2)} \equiv -\sqrt{\sigma}\, I'^{(2)}.$$

Pour les déterminer, considérons une conique dépendant linéairement des six formes indépendantes UV, WH, UW, HV, UH, VW déjà considérées. Soit

$$I^{(2)} \equiv \varepsilon UV + \zeta WH + \eta UW + \theta HV + \iota UH + \varkappa VW.$$

Pour satisfaire à l'équation (12), il faudra

$$\sqrt{\sigma} = \frac{\varepsilon\,\overline{WHU}\,\overline{WHV}}{\zeta} = \frac{\zeta\,\overline{UVW}\,\overline{UVH}}{\varepsilon} = \frac{\eta\,\overline{HVU}\,\overline{HVW}}{\theta}$$
$$= \frac{\theta\,\overline{UWH}\,\overline{UWV}}{\eta} = \frac{\iota\,\overline{VWU}\,\overline{VWH}}{\varkappa} = \frac{\varkappa\,\overline{UHV}\,\overline{UHW}}{\iota}.$$

Les coniques $I^{(2)}$ forment donc le réseau linéaire

$$\begin{aligned} I^{(2)} \equiv\ & \lambda\left(\sqrt{\overline{UVW}\,\overline{UVH}}\,UV + \sqrt{\overline{WHU}\,\overline{WHV}}\,WH\right) \\ & + \mu\left(\sqrt{\overline{UWH}\,\overline{UWV}}\,UW + \sqrt{\overline{HVU}\,\overline{HVW}}\,HV\right) \\ & + \nu\left(\sqrt{\overline{UHV}\,\overline{UHW}}\,UH + \sqrt{\overline{VWU}\,\overline{VWH}}\,VW\right), \end{aligned}$$

les coefficients λ, μ, ν étant arbitraires.

De même les coniques $I'^{(2)}$ forment un second réseau linéaire

$$I'^{(2)} \equiv \lambda'\left(\sqrt{\overline{UVW}\,\overline{UVH}}\,UV - \sqrt{\overline{WHU}\,\overline{WHV}}\,WH\right) + \mu'(\ldots) + \nu'(\ldots).$$

Or on peut reconnaître que ces deux réseaux linéaires sont les réseaux polaires des deux cubiques $A^{(3)}$ et $A'^{(3)}$ qui ont même cayleyenne que la cubique $F^{(3)}$, la cayleyenne étant, comme l'on sait, l'évectant de l'invariant σ.

De la même manière, la proposition 5 du tableau Ψ se rapporte aux deuxièmes classes invariantes par la transformation Ψ; là encore il suffit d'appliquer la transformation aux six points doubles $\overline{UV}^2$, $\overline{WH}^2$, $\overline{UW}^2$, $\overline{HV}^2$, $\overline{UH}^2$, $\overline{VW}^2$, pour trouver deux réseaux linéaires de deuxièmes classes invariantes, à savoir :

$$e^{(2)} \equiv \lambda\left(\sqrt{\overline{WHU}\,\overline{WHV}}\,\overline{UV}^2 - \sqrt{\overline{UVW}\,\overline{UVH}}\,\overline{WH}^2\right) + \mu(\ldots) + \nu(\ldots),$$
$$e'^{(2)} \equiv \lambda'\left(\sqrt{\overline{WHU}\,\overline{WHV}}\,\overline{UV}^2 + \sqrt{\overline{UVW}\,\overline{UVH}}\,\overline{WH}^2\right) + \mu'(\ldots) + \nu'(\ldots).$$

Ces deux réseaux sont les réseaux de deuxièmes classes respectivement apolaires aux réseaux $I^{(2)}$ et $I'^{(2)}$, comme on le vérifie immédiatement. On se rend facilement compte combien la connaissance de ces réseaux de coniques et deuxièmes classes invariantes guide en quelque sorte les transformations.

Ces transformations seront, je pense, particulièrement utiles pour étudier le réseau des coniques tritangentes à une cubique $H^{(3)}$, considérée comme hessienne d'une autre cubique $F^{(3)}$. On n'obtient ici qu'un seul de ces réseaux, les deux autres correspondant à deux autres cubiques $B^{(3)}$ et $B'^{(3)}$ de même hessienne. Les tangentes menées à la courbe d'un de ses points, en particulier, constituent, de trois manières différentes, deux de ces coniques dégénérées, donc sont de la forme ΦD^2 et $\Phi D'^2$, tandis que la conique polaire du point est de la forme $\Phi DD'$. Une telle étude correspond à celle des faisceaux de coniques quadritangentes à une quartique donnée, comprenant les bitangentes de la courbe.

A ce sujet, on peut signaler qu'une quartique pouvant être définie comme enveloppe des coniques polaires des points d'une conique par rapport à une cubique $F^{(3)}$, on peut, sans référence à cette cubique, la définir comme enveloppe de deuxièmes classes, formes tangentielles de coniques d'un réseau linéaire, qui sont apolaires à une conique fixe. On voit ainsi immédiatement, par exemple, que les centres de six paires de bitangentes se trouvent sur cette conique.

En ce qui concerne la théorie invariante des cubiques, il semble avantageux d'associer plus étroitement qu'on ne le fait souvent, à l'étude d'une cubique $F^{(3)}$, celle de la troisième classe contrevariante $g^{(3)}$ qui a pour réseau polaire (tangentiel) celui qui est apolaire au réseau (ponctuel) de $F^{(3)}$, ainsi que les cubiques covariantes à $F^{(3)}$ qui ont même hessienne ou cayleyenne que cette forme.

Note. — Après avoir remis cette étude, j'ai découvert que les transformations Φ et Ψ avaient été signalées et étudiées par Hilbert [1] et H.-S. White [2], tandis que Gordan donnait des développements invariants s'y rapportant. Mais ces études sont limitées à celles des réseaux d'autopoloconiques et de deuxièmes classes autopolaires, dont l'origine est du reste reconnue par H.-S. White, et aussi à l'application de Φ et Ψ à des courbes d'ordres ou de classes plus élevés qui soient invariantes ou singulières pour ces transformations. Notre travail ne fait donc pas double emploi avec les articles cités. Nous nous contenterons d'ajouter pour le moment qu'il résulte des tableaux Φ et Ψ qu'on obtient une correspondance entre points (doubles) seulement pour les points conjugués

---

[1] *Journal de Liouville*, vol. 4, 4e série, 1888.
[2] *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 1, 1900.

de $F^{(3)}$ qui décrivent la hessienne $H^{(3)}$ et les correspondances analogues entre droites de la cayleyenne par l'échange entre droites d'un couple invariant de tangentes à la cayleyenne $k^{(3)}$.