BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur les éléments singuliers d'un système de deux équations de Pfaff

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 38-49
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__38_1>

SUR LES ÉLÉMENTS SINGULIERS D'UN SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DE PFAFF;

PAR M. E. GOURSAT.

Dans un Mémoire *Sur le problème de Bäcklund et les systèmes de deux équations de Pfaff* [2], j'ai étudié en détail les

---

([2]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1918, p. 1-109.

éléments singuliers d'un système de deux équations de Pfaff à six variables, et montré comment cette étude se liait de la façon la plus naturelle au problème de Bäcklund. J'avais indiqué rapidement à la fin du Mémoire comment la méthode pouvait être étendue aux systèmes de deux équations de Pfaff à un nombre quelconque de variables. Je me propose d'exposer ici quelques résultats plus précis. Ces résultats sont évidemment très particuliers; s'ils ne sont pas absolument dépourvus d'intérêt, c'est parce qu'ils se rattachent à une question générale et importante encore bien peu étudiée, le rôle des éléments singuliers dans un système de Pfaff.

1. Considérons un système S de deux équations de Pfaff à n variables, n'admettant pas d'élément caractéristique,

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \omega_1 = a_1\,dx_1 + \ldots + a_n\,dx_n = 0, \\ \omega_2 = b_1\,dx_1 + \ldots + b_n\,dx_n = 0; \end{cases}$$

nous supposerons en outre que ce système n'admet pas de combinaison intégrable, et que le nombre n est supérieur à cinq [1]. Tout élément linéaire intégral du système $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ est en involution avec une infinité d'autres éléments linéaires intégraux $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$, qui doivent satisfaire aux quatre équations

$$\text{(2)} \qquad \omega_1(\delta) = 0, \qquad \omega_2(\delta) = 0, \qquad \omega'_1(d, \delta) = 0, \qquad \omega'_2(d, \delta) = 0.$$

Le système (1) étant de caractère *deux*, ces quatre équations sont distinctes, si l'élément linéaire intégral (dx_i) est quelconque. Elles ne peuvent se réduire aux deux premières équations puisque le système (1) n'admet pas, par hypothèse, d'éléments caractéristiques. Mais il peut se faire que, pour certains éléments linéaires intégraux (dx_i), ces quatre équations se réduisent à trois. Nous appellerons *éléments singuliers* du système S les éléments linéaires intégraux (dx_i) de ce système tels que les quatre équations (2) qui déterminent les éléments $(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$ en

[1] Les systèmes de deux équations de Pfaff à cinq variables ont été étudiés en détail dans un important Mémoire de M. Cartan (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXVII, 1910, p. 109-192).

involution avec l'élément (dx_i) se réduisent à trois équations linéairement distinctes.

D'après cela, un élément (dx_i) sera un élément singulier si l'on peut trouver des coefficients λ, μ, ν, ρ indépendants des δx_i, tels que l'on ait identiquement, quels que soient $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$,

$$(3) \qquad \lambda\omega'_1(d, \delta) + \mu\omega'_2(d, \delta) + \nu\omega_1(\delta) + \rho\omega_2(\delta) = 0,$$

et cette condition équivaut à n relations distinctes

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{c} (\lambda a_{i1} + \mu b_{i1})\,dx_1 + \ldots + \lambda(a_{in} + \mu b_{in})\,dx_n + \nu a_i + \rho b_i = 0 \\ a_{ik} = \dfrac{\partial a_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial a_k}{\partial x_i} \\ b_{ik} = \dfrac{\partial b_i}{\partial x_k} - \dfrac{\partial b_k}{\partial x_i} \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'élément (dx_i) doit en outre satisfaire aux deux équations (1) et, en éliminant les $n+2$ indéterminées $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n, \nu, \rho$ entre les $n+2$ équations linéaires et homogènes (1) et (4), on est conduit à la condition

$$(5) \qquad \Delta(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} + \mu b_{1n} & a_1 & b_1 \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} + \mu b_{2n} & a_2 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{n1} + \mu b_{n1} & \lambda a_{n2} + \mu b_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} + \mu b_{nn} & a_n & b_n \\ -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_2 & \ldots & -b_n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ satisfait à cette condition, les $n+2$ équations (1) et (4) sont compatibles en dx_i, ν, ρ, et l'on obtient des éléments linéaires intégraux (dx_i), tels que l'on ait identiquement

$$(6) \qquad (\lambda\omega_1 + \mu\omega_2)' \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2),$$

de sorte que ces éléments linéaires (dx_i) sont en involution avec tout autre élément linéaire intégral (δx_i) du système (1), relativement à l'équation

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$$

de ce système.

Le déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est un déterminant symétrique gauche et les résultats de la discussion sont tout différents suivant la parité de la classe du système (1).

1° Supposons n pair et égal à $2p+2$. Le déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est un déterminant symétrique gauche d'ordre pair et de degré $2p$ en λ, μ; on a donc

$$\Delta(\lambda, \mu) = [F(\lambda, \mu)]^2, \tag{7}$$

$F(\lambda, \mu)$ étant un polynome homogène de degré p en λ, μ. Il y a donc en général p systèmes distincts d'éléments singuliers, correspondant aux p racines de l'équation

$$F(\lambda, \mu) = 0 \tag{8}$$

en $\frac{\lambda}{\mu}$. A chaque système de solutions (λ, μ) de cette équation correspond une équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ du système (1), que nous appellerons une *équation singulière* de ce système. A chaque équation singulière correspond une famille d'éléments singuliers (dx_i) qui sont en involution avec tous les éléments linéaires intégraux de (1) relativement à l'équation $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$.

Ainsi, *lorsque la classe est un nombre pair* $2p+2$, *il y a en général* p *familles distinctes d'éléments singuliers, et* p *équations singulières.*

2° Lorsque la classe du système (1) est un nombre impair $2p+1$, les conclusions sont toutes différentes. Le déterminant symétrique gauche $\Delta(\lambda, \mu)$ d'ordre impair est identiquement nul, et les $n+2$ équations (1) et (4) sont toujours compatibles, et se réduisent en général à $n+1$ équations linéairement distinctes. *A toute équation* $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ *du système* (1) *correspond donc en général un élément linéaire intégral singulier, qui est en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux, relativement à cette équation.*

2. Ces conclusions ne s'appliquent qu'aux systèmes les plus généraux de deux équations de Pfaff à n variables. Pour étudier les divers cas particuliers qui peuvent se présenter, on doit tenir compte du degré d'indétermination du système formé par les équations (1) et (4), lorsque le déterminant $\Delta(\lambda, \mu)$ est nul. D'une façon générale, si tous les mineurs de $\Delta(\lambda, \mu)$ à $n+2-k$ lignes sont nuls, sans que tous les mineurs à $n+2-k-1$ lignes soient nuls $(k \geqq 0)$ pour un système de valeurs de λ et de μ, les équations (3) et (4) se réduisent à $n+2-k-1$ équations distinctes. Les valeurs de $dx_1, \ldots, dx_n$ dépendent linéairement de $k+1$ paramètres arbitraires. Comme un élément $(dx_1, \ldots, dx_n)$ ne dépend en réalité que des rapports $\frac{dx_i}{dx_k}$, on voit que les éléments singuliers qui sont en involution avec tous les éléments linéaires intégraux du système (1), relativement à l'équation $\lambda\omega_1+\mu\omega_2$, où λ et μ satisfont à la condition (7), dépendent de k paramètres ou forment une multiplicité linéaire d'éléments à k dimensions. Nous dirons que le nombre k est le rang de l'équation

$$\lambda\omega_1+\mu\omega_2=0,$$

et que cette équation est *singulière* si son rang k est *positif;* il résulte de cette définition qu'*à une équation singulière de rang k correspondent* ∞^k *éléments singuliers.*

Si n est égal à $2p+2$, *le nombre k est un nombre impair*, car le premier mineur de Δ qui n'est pas nul est d'ordre pair. D'après ce que nous avons dit tout à l'heure, il y a en général p équations singulières de rang *un*.

Au contraire, si n est égal à $2p+1$, il n'y a pas en général d'équation singulière, puisque tous les mineurs du premier ordre de Δ devraient être nuls pour un même système de valeurs des indéterminées λ, μ. Une équation du système (1) est en général de rang zéro, mais une équation singulière, s'il en existe, est nécessairement de *rang pair*.

3. Soit $\Omega=0$ une équation de classe $2m+1$ du système S

$$(2m+1 \leqq n),$$

qui peut s'écrire sous forme canonique

$$\Omega = P_1\,dx_1+\ldots+P_m\,dx_m-dz=0, \tag{9}$$

et soit

$$\Omega_1 = X_1\,dx_1+\ldots+X_m\,dx_m+P_1\,dp_1+\ldots+P_m\,dp_m+\Omega_2=0 \tag{10}$$

une autre équation du système, distincte de la première, Ω_2 ne renfermant aucune des différentielles

$$dz,\quad dx_1,\quad \ldots,\quad dx_m,\quad dp_1,\quad \ldots,\quad dp_m.$$

Pour qu'un élément intégral du système S soit en involution avec tous les autres éléments linéaires intégraux de ce système, relativement à $\Omega = 0$, il faut que la relation

$$(11) \qquad \Omega' = \sum_{1}^{m} (dx_i\,\delta p_i - dp_i\,\delta x_i) = 0$$

soit vérifiée par tous les éléments δx_i, δp_i qui satisfont à la relation $\Omega_1(\delta) = 0$.

Nous supposerons d'abord que le système S est de classe impaire $2p+1$; dans ce cas on a forcément $m \leqq p$. Il peut se présenter deux cas : Si la forme Ω_2 disparaît, c'est-à-dire si Ω_1 ne contient que les différentielles des $2m$ variables x_i, p_i, l'équation $\Omega' = 0$ sera une conséquence de l'équation $\Omega_1(\delta) = 0$ si l'on a

$$(12) \qquad \frac{dp_1}{X_1} = \frac{dp_2}{X_2} = \ldots = \frac{dp_m}{X_m} = -\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = -\frac{dx_m}{P_m}$$

et ces $2m-1$ relations, jointes à l'équation $\Omega = 0$, déterminent une famille d'éléments linéaires singuliers définis par $2m$ relations entre les $2p+1$ différentielles.

Le cas général où $m = p$ est évidemment compris dans l'hypothèse que nous venons d'examiner, ce qui confirme le résultat déjà signalé. A toute équation du système S, et de même classe $2p+1$ que le système lui-même, correspond un élément intégral singulier, qui est en involution avec tout autre élément intégral relativement à cette équation.

Si l'équation (10) renferme des différentielles autres que

$$dx_1, \quad \ldots, \quad dx_m, \qquad dp_1, \quad \ldots, \quad dp_m,$$

c'est-à-dire si la forme Ω_2 n'est pas nulle, on a forcément $m < p$, et la relation $\Omega' = 0$ ne peut être vérifiée par tous les éléments linéaires intégraux (δx_i) qui vérifient l'équation $\Omega_1(\delta) = 0$, que si l'on a à la fois

$$(13) \qquad dx_1 = 0, \quad \ldots, \quad dx_m = 0, \quad dp_1 = 0, \quad \ldots, \quad dp_m = 0,$$

les éléments singuliers devraient en outre vérifier les deux équations $dz = 0$, $\Omega_2 = 0$, ce qui fait en tout un système de

$$2m + 2 \leqq 2p$$

relations.

En définitive, à toute équation d'un système S de classe impaire $2p + 1$ correspondent toujours des éléments singuliers définis par un système de $2q$ relations, le nombre q étant au plus égal à p. Mais, pour une valeur du nombre q, il peut se présenter deux cas bien distincts. Les éléments singuliers qui correspondent à une équation $\Omega = 0$ étant définis par un système de $2q$ relations, cette équation peut être de classe $2q + 1$, ou de classe $2q - 1$. Si l'équation $\Omega = 0$ est de classe $2q + 1$, tous les éléments caractéristiques de cette équation appartiennent au système de Pfaff proposé. Si l'équation $\Omega = 0$ est de classe $2q - 1$, les éléments caractéristiques de cette équation n'annulent pas la seconde équation du système, et les équations de définition des éléments singuliers correspondants admettent $2q - 1$ combinaisons intégrables.

Les équations du système S auxquelles ne correspondent qu'un seul élément singulier peuvent être de deux espèces. Si l'équation est de classe $2m + 1$, et que l'élément singulier correspondant soit défini par $2m$ relations, on doit avoir $m = p$, c'est le cas général d'une équation du système dont la classe est égale à celle du système. Mais il peut aussi arriver que les éléments singuliers correspondant à une équation de classe $2m + 1$ soient définis par $2m + 2$ équations; pour qu'il n'y ait qu'un élément singulier de cette espèce, il faut donc que l'on ait $2m + 2 = 2p$, ou $m = p - 1$, et l'équation $\Omega = 0$ est de classe $2p - 1$. On sait qu'un système de Pfaff de deux équations et de classe $2p + 1$ admet toujours une infinité d'équations de classe $2p - 1$ [1]. Une équation de cette espèce sera en général de rang zéro, si ces éléments caractéristiques ne sont pas des éléments intégraux du système.

En définitive, une équation $\Omega = 0$ appartenant à un système de deux équations de Pfaff de classe $2p + 1$ ne peut être une équation *singulière* de ce système que si elle est de classe inférieure à $2p + 1$, et, si elle est de classe $2p - 1$, ses éléments caractéris-

---

(1) *Sur le problème äc Backlund* (*loc. cit.*, p. 109).

tiques doivent être des éléments intégraux du système. Toute équation du système de classe $2m+1$ inférieure à $2p-1$ est une équation singulière du système, et les éléments singuliers correspondants sont définis par un système de $2m$ ou de $2m+2$ équations. Le rang k de cette équation est donc égal à $2(p-m)$ ou à

$$2(p-m-1).$$

On peut toujours reconnaître, par des calculs algébriques, si un système de classe $2p+1$ admet une équation singulière de rang $k>0$. Il suffit, comme on l'a vu au n° **2**, qu'il existe un système de valeurs pour λ, μ, annulant tous les mineurs de $\Delta(\lambda, \mu)$ à $2p+3-k$ lignes, sans que tous les mineurs à $2p+2-k$ lignes soient nuls. La classe de cette équation est alors égale à $2p+1-k$, ou à $2p-1-k$, suivant que les éléments caractéristiques de l'équation sont des éléments intégraux du système, ou non.

Supposons en second lieu que le système S est de classe paire $2p+2$. Si une équation $\Omega=0$ de classe $2m+1$ appartient à ce système, on a forcément $m \leqq p$. Si $m=p$, cette équation ne peut être singulière que si ces éléments caractéristiques sont des éléments intégraux du système, et le rang est égal à *un*. Si m est inférieur à p, l'équation est toujours une équation singulière, et les éléments singuliers correspondants sont définis par un système de $2m$ ou de $2m+2$ relations. Le rang k de l'équation est donc $2p-2m+1$ ou $2p-2m-1$, et inversement, toute équation singulière de rang k est de classe $2p+2-k$ ou de classe $2p-k$, suivant que ses éléments caractéristiques sont ou non des éléments intégraux du système.

4. Un système de Pfaff de classe impaire n'admet donc pas d'une façon normale d'équations singulières, mais l'existence de telles équations permet en général de simplifier le problème de l'intégration. Considérons par exemple un système de classe 7. Il existe une infinité d'équations de ce système de classe 5; on peut donc ramener d'une infinité de manières ce système à la forme

$$(14) \qquad \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \qquad \omega_2 = 0,$$

la seconde équation $\omega_2=0$ contenant d'autres différentielles que dx, dy, dp, dq, si l'équation $\omega_1=0$ n'est pas une équation singulière. On peut évidemment ramener cette équation à la forme

$$(15) \qquad \omega_2 = \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{F}\,dv = 0,$$

X, Y, P, Q, F étant des fonctions de x, y, z, p, q, et de deux autres variables u et v. On satisfait à la première équation en posant

$$z = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$f(x, y)$ étant une fonction arbitraire de x et de y. En remplaçant z, p, q, dp, dq par leurs expressions dans la seconde équation $\omega_2 = 0$, et en égalant à zéro les coefficients de dx et de dy, on obtient les deux relations

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{P}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{X} + \mathrm{F}\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ &\mathrm{P}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{Q}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \mathrm{Y} + \mathrm{F}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right.$$

l'élimination de u conduira à une équation aux dérivées partielles du premier ordre pour déterminer v. Conformément à la théorie générale, le système est de genre deux, car il admet des intégrales à deux dimensions.

La fonction F n'est pas nulle, si l'équation $\omega_1 = 0$ n'est pas une équation singulière, ce qui est le cas général. Mais si l'équation $\omega_1 = 0$ est une équation singulière, on a $\mathrm{F} = 0$, et les deux équations (16) donnent u et v explicitement. *Tout système* S *de deux équations de Pfaff, de classe* 7, *est donc intégrable explicitement s'il admet une équation singulière de classe* 5.

Il en est de même s'il admet une équation singulière de classe *trois*. Le système est alors réductible à la forme

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dz - p\,dx = 0, \\ \omega_2 &= \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv = 0, \end{aligned}$$

X, Y, P, Q, U, V étant des fonctions des sept variables x, y, z, p, q, u, v. La forme de Pfaff $\mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{U}\,du + \mathrm{V}\,dv$, où l'on considère x, z, p comme constants, peut à son tour être ramenée à une forme canonique, et le système S s'écrira, après cette réduction,

$$(17)\qquad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx = 0, \\ \omega_2 = X\,dx + P\,dp + U\,du + V\,dv, \end{cases}$$

P, U, V étant des fonctions des sept variables x, y, z, p, q, u, v. On satisfait à la première équation en posant $z = f(x)$, $p = f'(x)$, et la seconde équation devient

$$[X + Pf''(x)]\,dx + U\,du + V\,dv = 0;$$

c'est une équation de Pfaff à cinq variables x, y, q, u, v, ramenée à une forme canonique. On trouvera donc toutes les intégrales par des formules explicites, par exemple, en posant

$$(18)\qquad v = F(x, u), \qquad X + Pf''(x) = -V\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad U = -V\frac{\partial F}{\partial u}.$$

D'une façon générale, soit

$$(19)\qquad \omega_1 = dz - \sum_{i=1}^{m} p_i\,dx_i = 0$$

une équation singulière de classe $2m+1$ d'un système de Pfaff de classe $2p+1$ ($m < p$). Le système se compose de l'équation $\omega_1 = 0$, et d'une autre équation $\omega_2 = 0$, où l'on peut supposer que dz ne figure pas. Si dans cette équation $\omega_2 = 0$, on fait

$$z = C, \qquad x_i = C', \qquad p_i = C'', \qquad dz = 0, \qquad dx_i = 0, \qquad dp_i = 0,$$

elle se réduit à une équation de classe $2r-1$, que l'on peut ramener à une forme réduite où ne figurent que r différentielles. La seconde équation $\omega_2 = 0$ peut donc toujours être ramenée à la forme

$$(20)\qquad \begin{aligned} \omega_2 = {} & X_1\,dx_1 + \ldots + X_m\,dx_m \\ & + P_1\,dp_1 + \ldots + P_m\,dp_m + du_1 + v_2\,du_2 + \ldots + v_{r-1}\,du_{r-1} = 0, \end{aligned}$$

les variables z, x_i, p_k, u_i, v_k formant un système de

$$2m + 1 + 2r - 1$$

variables distinctes. Comme le système S est de classe $2p+1$, la somme $2m + 2r$ ne peut être supérieure à $2p+1$, et par suite, on a

$$(21)\qquad m + r \leqq p.$$

On peut trouver explicitement toutes les solutions de l'équation $\omega_1 = 0$. Par exemple, on aura toutes les intégrales à m dimensions par des formules donnant explicitement les variables z, x_i, p_k au moyen de m variables auxiliaires $t_1, t_2, \ldots, t_m$. En portant ces expressions de z, x_i, p_k dans la seconde équation $\omega_2 = 0$, on obtiendra une équation où figureront seulement $m + r$ différentielles, et où le nombre des variables sera $2p - 2m + m = 2p - m$. Cette équation sera réduite à une forme canonique, et pourra par conséquent être intégrée explicitement si l'on a

$$2p - m \geqq 2m + 2r - 1,$$

c'est-à-dire

$$(22) \qquad 3m + 2r \leqq 2p + 1.$$

Les inégalités (21) et (22) sont certainement satisfaites si l'on a $m = 1$, car on tire de la première $r \leqq p - 1$; et la deuxième sera vérifiée aussi.

Tout système de deux équations de Pfaff de classe impaire est donc intégrable explicitement, s'il admet une équation singulière de classe 3.

5. On peut faire des remarques analogues pour les systèmes de classe paire. Considérons par exemple le système de classe 8 formé des deux équations

$$\omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$\omega_2 = X\,dx + Y\,dy + P\,dp + Q\,dq = 0,$$

X, Y, P, Q étant des fonctions des huit variables x, y, z, p, q, u, v, w. A l'équation singulière $\omega_1 = 0$ correspond une famille d'éléments singuliers définie par les relations

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = -\frac{dp}{X} = -\frac{dq}{Y}, \qquad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Le système considéré est de genre trois, et l'intégrale générale M_3 est définie par les relations

$$x = f(x, y), \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$
$$X + P\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad Y + P\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + Q\frac{\partial^2 f}{\partial y} = 0,$$

qui permettent d'exprimer toutes les variables au moyen de x, y et de l'une des variables u, v, w. Sur chaque intégrale M_3, il y a une infinité de multiplicités M_1, dépendant d'une fonction arbitraire dont tous les éléments sont des éléments singuliers, c'est-à-dire de caractéristiques de Monge à une dimension. En effet, supposons que les coordonnées d'un point quelconque de M_3 aient été exprimées au moyen des trois variables indépendantes x, y, u. Si l'on se déplace sur M_3 de façon que l'on ait entre les différentielles dx, dy la relation

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q},$$

on aura aussi, pour ce déplacement,

$$dp = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy = \frac{dx}{P} \left\{ P \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + Q \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right\} = - \frac{X\, dx}{P};$$

on a donc aussi

$$\frac{dp}{X} = - \frac{dx}{P}$$

et l'on verrait de même que l'on a $\frac{dp}{Y} = - \frac{dx}{P}$.

On peut rattacher cette remarque à une théorie plus générale de M. Cartan (*Bulletin de la Société mathématique*, t. 29, p. 301).