BULLETIN DE LA S. M. F.

A. BUHL

Électromagnétisme et géométrie

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 410-418
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__410_1>

ÉLECTROMAGNÉTISME ET GÉOMÉTRIE ;

Par M. A. Buhl.

On sait combien sont nombreux les travaux qui géométrisent la Mécanique et l'Électromagnétisme. Il semble seulement que tout le monde ne soit point d'accord sur l'origine la plus simple à adopter pour cette géométrisation ; j'ai toujours proposé, quant à moi, de partir des identités (1) qui, d'abord, expriment l'un des principes fondamentaux du calcul intégral et, ensuite, donnent, de manière quasi immédiate, les formules stokiennes dont l'une, (3), contient, en puissance, la forme einsteinienne la plus générale des équations de Maxwell-Lorentz.

J'ai eu le plaisir de constater qu'un géomètre éminent, M. Elie Cartan, abondait dans le même sens en plusieurs de ses Mémoires parmi lesquels je citerai particulièrement un grand travail *Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* en lequel je relève ces lignes : « Au fond les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Électromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée » (*Annales de l'École Normale*, 1923).

Ici, je ne développe pas le point de vue électromagnétique; je me propose de reconstruire, avec les mêmes fondations, les formules principales des *Lezioni di Geometria differenziale* de L. Bianchi (*terza edizione*). Mon résumé est peut-être trop bref; pour plus de détails, je renvoie surtout à mes Mémoires *Sur les formules fondamentales de l'Électromagnétisme et de la Gravifique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1920 *et années suivantes*).

1. *Identités et formules stokiennes fondamentales.* — Il s'agit des identités

$$(1)\qquad \int_C X\,dY = \int\int_A dX\,dY, \qquad \int\int_S X\,dY\,dZ = \int\int\int_V dX\,dY\,dZ.$$

Par des changements de variables et des combinaisons linéaires des nouvelles identités obtenues on obtient des formules qui généralisent la formule de Stokes ordinaire. Dans E_3 la première identité (1) redonne cette formule même; dans E_4 on a les deux formules

$$(2)\qquad \int_C \Sigma P_i\,dx_i = \int\int_A \frac{\Delta_1\,dx_1\,dx_2}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x_3,x_4)}},$$

$$(3)\qquad 2\int\int_S \Sigma M_{ij}\,dx_i\,dx_j = \int\int\int_V \frac{\Delta_2\,dx_1\,dx_2\,dx_3}{\dfrac{\partial F}{\partial x_4}},$$

en lesquelles Δ_1 et Δ_2 représentent respectivement

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x_1} & \dfrac{\partial G}{\partial x_2} & \dfrac{\partial G}{\partial x_3} & \dfrac{\partial G}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & \dfrac{\partial F}{\partial x_3} & \dfrac{\partial F}{\partial x_4} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} & \dfrac{\partial}{\partial x_4} \\ M_{1\omega} & M_{2\omega} & M_{3\omega} & M_{4\omega} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

La variété A, d'équations $F = 0$, $G = 0$, a évidemment deux dimensions dans E_4 : elle est déformable avec C pour frontière fixe. De même V a trois dimensions, et peut varier dans E_4, avec S, variété à deux dimensions, pour frontière invariable. Dans Δ_2 on a

$$\begin{vmatrix} M_{i\omega} & M_{j\omega} \\ i & j \end{vmatrix} = M_{ij} - M_{ji} = 2 M_{ij}. \tag{4}$$

Dans le premier membre de (3) le double indice ij conduit à six termes en 12, 13, 14, 23, 24, 34, avec des M_{ii} toujours nuls.

Il n'y a qu'une seule formule stokienne dans E_3 et la première identité (1) suffit pour l'établir ; il y en a deux dans E_4. En poursuivant on verrait qu'il y en a $n - 2$ dans E_n.

2. *Dérivées en* D *de composantes vectorielles*. — Considérons les mineurs à extraire des deux dernières lignes de Δ_1. Je dis qu'on peut les remplacer par

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ P_i & P_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} \\ i P_\alpha & j P_\alpha \end{vmatrix}, \tag{5}$$

les ω étant *indices de substitution*, comme dans (4), ce qui donne pour développement du dernier déterminant

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} P_\alpha - \Gamma^{\alpha}_{ji} P_\alpha.$$

Si, *première hypothèse qui sera toujours faite*,

$$\Gamma^{\alpha}_{ij} = \Gamma^{\alpha}_{ji}, \tag{6}$$

l'expression précédente est nulle, ce qui n'empêche cependant pas qu'on tire de (5), par identification des termes homologues dans les trois déterminants,

$$\frac{DP_j}{Dx_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \Gamma^{\alpha}_{ij} P_\alpha. \tag{7}$$

A la formule (5) on peut immédiatement associer

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} \\ P^i & P^j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^{\omega}_{i\alpha} & \Gamma^{\omega}_{j\alpha} \\ i P^\alpha & j P^\alpha \end{vmatrix}, \tag{8}$$

d'où, de même,

$$\frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial P^j}{\partial x_i} + \Gamma^j_{i\alpha} P^\alpha. \tag{9}$$

Cette fois, le dernier déterminant de (8) n'est pas nul mais cependant (8) et (9) vont se justifier de manière fort remarquable. Formons

$$P^j \frac{DQ_j}{Dx_i} + Q_j \frac{DP^j}{Dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(P^j Q_j) - \Gamma^\alpha_{ij} Q_\alpha P^j + \Gamma^j_{i\alpha} P^\alpha Q_j.$$

Les deux derniers termes du second membre se détruisent si, *seconde hypothèse qui sera toujours faite*, tout indice, figurant deux fois dans un terme, est indice de sommation.

Ici il s'agit évidemment de j et α.

En somme les dérivées, en D, (7) et (9) sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles :

(*a*) *On n'altère pas la première formule stokienne si, dans* Δ_1, *on remplace les* ∂ *par des* D ;

(*b*) *On n'altère pas la formule*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(P^j Q_j) = P^j \frac{\partial Q_j}{\partial x_i} + Q_j \frac{\partial P^j}{\partial x_i} \tag{10}$$

si, dans le second membre, on remplace les ∂ *par des* D.

3. *Dérivées en* D *d'expressions à deux indices.* — Prenons maintenant la seconde formule stokienne et plus particulièrement son déterminant Δ_2. Considérons, dans Δ_2, les mineurs de la première ligne ; on peut les écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\quad}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^\alpha_{i\omega} & \Gamma^\alpha_{j\omega} & \Gamma^\alpha_{k\omega} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Delta^\alpha_{i\omega} & \Delta^\alpha_{j\omega} & \Delta^\alpha_{k\omega} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix}, \tag{11}$$

car les deux derniers déterminants de cette expression sont identiquement nuls. Convenons maintenant que l'expression (11) s'écrive

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Encore par identification des termes homologues, on a des formules rentrant toutes dans le type

$$(13)\qquad \frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^{\alpha}_{ik} M_{j\alpha} - \Delta^{\alpha}_{ij} M_{\alpha k}.$$

Imaginons maintenant que, dans l'égalité de (11) et (12), on relève partout les deux indices des M cependant que, dans les Γ et les Δ, on échangera α et ω. Les deux derniers déterminants de (11) seront, de plus, changés de signes. On pourra ainsi obtenir des M^{jk} à dériver par la formule

$$(14)\qquad \frac{D}{Dx_i} M^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M^{jk} + \Gamma^{k}_{i\alpha} M^{j\alpha} + \Delta^{j}_{i\alpha} M^{\alpha k}.$$

Dans ce second cas, les déterminants en Γ et Δ ne sont pas nuls mais on achève de justifier (14) en remarquant que

$$(15)\qquad N^{jk} \frac{D}{Dx_i} M_{jk} + M_{jk} \frac{D}{Dx_i} N^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} (N^{jk} M_{jk})$$

si j, k, α sont indices de sommation. Là encore les dérivées en D, (13) et (14), sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles :

(*a*) *On n'altère pas la seconde formule stokienne si, dans* Δ_2, *on remplace les* ∂ *par des* D;

(*b*) *On n'altère pas la formule*

$$(16)\qquad \frac{\partial}{\partial x_i} (N^{jk} M_{jk}) = N^{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} + M_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} N^{jk}$$

si, dans le second membre, on remplace les ∂ *par des* D.

Des résultats analogues pourraient être obtenus avec des M_j^k mais ce qui précède sera suffisant pour ce que nous avons en vue dans le présent article.

Remarquons tout de suite que, en (13) et (14), nous retrouvons des dérivées covariantes bien connues quand les Δ s'identifient aux Γ. L'intérêt, ici, constitue justement à se demander ce que l'on peut faire de (13) et (14) quand les Γ et les Δ diffèrent.

4. *Le déplacement parallèle de M. T. Levi-Civita.* — Ce

déplacement correspond au cas où l'égalité (10), écrite sous la forme

$$d(P^j P_j) = P^j \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i + P_j \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i,$$

est satisfaite en posant

$$(17) \qquad P^j P_j = 1, \qquad \frac{DP_j}{Dx_i} dx_i = 0, \qquad \frac{DP^j}{Dx_i} dx_i = 0,$$

les deux dernières relations (17) n'en faisant qu'une.

D'abord la première relation (17) est scindée en

$$(18) \qquad P_j = g_{j\alpha} P^\alpha, \qquad P^j = g^{\alpha j} P_\alpha.$$

Quant aux deux autres elles ne peuvent s'identifier qu'à une condition qui reste à former.

Prenons les deux dernières équations (17) sous les formes respectives

$$dP_j = \Gamma^\alpha_{\lambda j} P_\alpha \, dx_\lambda, \qquad dP^j = -\Gamma^j_{\lambda\alpha} P^\alpha \, dx_\lambda$$

et écrivons qu'elles sont équivalentes au moyen de

$$dP_j = P^\alpha \, dg_{j\alpha} + g_{j\alpha} \, dP^\alpha.$$

Si l'équivalence doit avoir lieu quel que soit le vecteur (P) circulant le long d'une courbe (x) quelconque, on tombe sur la condition bien connue

$$\frac{\partial g_{j\beta}}{\partial x_\lambda} = g_{\beta\alpha} \Gamma^\alpha_{\lambda j} + g_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} = \begin{bmatrix} \lambda j \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda\beta \\ j \end{bmatrix}$$

qui n'est autre que

$$\frac{Dg_{j\beta}}{Dx_\lambda} = 0$$

pour $\Delta \equiv \Gamma$. Ainsi apparaissent les symboles de Riemann-Christoffel et tout l'appareil métrique, mais il est à remarquer que tout ce que nous avons fait dans les trois paragraphes précédents en est précisément fort indépendant.

5. *La géométrie différentielle.* — Après le système d'équations auquel correspond le parallélisme de M. Levi-Civita, quel est celui qui joue vraisemblablement le plus grand rôle ? C'est sans doute le

système

$$
(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i^s}{\partial x_l} - \Gamma_{il}^{\alpha} \xi_{\alpha}^s = b_{il} X^s, \\[2mm] \dfrac{\partial \eta_k^s}{\partial x_l} - \Delta_{kl}^{\alpha} \eta_{\alpha}^s = c_{kl} X^s, \\[2mm] m_{ik} = - \mathrm{S}\, \xi_i^s \eta_k^s, \end{cases}
$$

auquel correspond toute la géométrie différentielle telle qu'elle est exposée dans les *Lezioni di Geometria differenziale*, de L. Bianchi (*terza edizione*). C'est ce que nous voulons montrer très rapidement.

Il faut observer que, dans les formules (19), l'indice supérieur s est un simple indice d'énumération ne possédant pas obligatoirement les propriétés des indices supérieurs employés en (18) et d'ailleurs dans tout ce qui précède. Pour éviter toute équivoque, toute sommation en s sera indiquée par le symbole S.

On tire aisément, des équations (19),

$$
(20) \qquad \frac{\partial m_{ik}}{\partial x_l} = \Gamma_{il}^{\alpha} m_{\alpha k} + \Delta_{kl}^{\alpha} m_{i\alpha} - b_{il}\, \mathrm{S}\, \eta_k^s X^s - c_{kl}\, \mathrm{S}\, \xi_i^s X^s.
$$

Considérons le tableau T, où les indices supérieurs des ξ sont des s explicités,

$$
\begin{vmatrix} \star^1 & \star^2 & \dots & \star^{n+1} \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^{n+1} \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \dots & \xi_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n^1 & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^{n+1} \end{vmatrix}.
$$

Posons

$$
X^s = \frac{\text{mineur algébrique de } \star^s \text{ dans T}}{\sqrt{\text{somme des carrés des mineurs des } \star}}.
$$

On a évidemment

$$
(21) \qquad \mathrm{S}\, \xi_i^s X^s = 0, \qquad \mathrm{S}(X^s)^2 = 1.
$$

Si

$$
(22) \qquad \eta_k^s = \frac{\partial X^s}{\partial x_k}, \qquad \mathrm{S}\, \eta_k^s X^s = 0
$$

et la formule (20) devient

$$
(23) \qquad \frac{\partial m_{ik}}{\partial x_l} = \Gamma_{il}^{\alpha} m_{\alpha k} + \Delta_{kl}^{\alpha} m_{i\alpha},
$$

ce qui est, d'après (13),

$$\frac{D}{Dx_l} m_{ik} = 0 \tag{24}$$

avec des Γ et des Δ différents se trouvant d'ailleurs intervertis ici; cette interversion n'a aucune importance puisqu'au paragraphe 3 les Γ et les Δ sont absolument indéterminés.

Or les formules (23) ou (24) sont celles de Weingarten relatives à la représentation sphérique des surfaces (L. Bianchi, *loc. cit.*, p. 230). On voit combien elles sont proches de la seconde formule stokienne.

Terminons de plus en plus brièvement.

De (23) on tire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} & \frac{\partial}{\partial x_l} \\ m_{ik} & m_{il} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{\alpha k} & m_{\alpha l} \\ \Gamma^{\alpha}_{ik} & \Gamma^{\alpha}_{il} \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous adjoignons la condition

$$\frac{D g^{\lambda\alpha}}{D x_k} = 0,$$

avec les Δ remplacés par des Γ, ce qui fait des Γ des symboles de Christoffel à trois indices attachés à une forme différentielle quadratique à coefficients g_{ij}, on a, après quelques calculs et en prenant les m identiques aux b, une équation qui exprime que

$$\xi^s_\lambda g^{\lambda\alpha} b_{\alpha k}\, dx_k \tag{25}$$

est une différentielle exacte.

De même, avec

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_l} \\ m_{ik} & m_{lk} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_{i\alpha} & m_{l\alpha} \\ \Delta^{\alpha}_{ki} & \Delta^{\alpha}_{kl} \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\frac{D h^{\lambda\alpha}}{D x_l} = 0,$$

équation où les Γ sont remplacés par des Δ, symboles se rapportant cette fois à une différentielle quadratique à coefficients h_{ij}, on trouve encore, en prenant les h identiques aux c, que

$$\eta^s_\lambda c^{\lambda\alpha} b_{\alpha k}\, dx_k \tag{26}$$

est une différentielle exacte. On doit admettre en outre que $b_{ik} = b_{ki}$ ou $m_{ik} = m_{ki}$, ce qui d'après la dernière relation (19) s'écrit

$$\mathrm{S}\,\xi_i^s\,\eta_k^s = \mathrm{S}\,\xi_k^s\,\eta_i^s. \tag{27}$$

Or tenant compte de la première relation (22) et posant

$$\xi_i = \frac{\partial x^s}{\partial x_i},$$

l'équation (27) est vérifiée d'après la première (21).

Ainsi le système (19) et les différentielles exactes (25) et (26) livrent finalement toutes les formules de Codazzi ainsi que celles de Weingarten déjà mentionnées.

La géométrie différentielle et l'électromagnétisme trouvent une commune origine en les formules stokiennes fondamentales.