BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PETROVITCH

Problèmes arithmétiques sur les équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 514-519

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__514_1>

PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

1. Soit $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$ une fonction réelle donnée de la variable x, d'une fonction y de x et d'un certain nombre de dérivées $y', y'', \ldots, y^{(p)}$ de y par rapport à x, tous les coefficients dans f étant *numériquement* donnés.

Proposons-nous le problème suivant :

La valeur numérique a étant réelle et donnée, déterminer la fonction y de manière que f soit développable, au voisinage de $x = a$, en série de puissances

$$\Sigma M_n(x-a)^n \tag{1}$$

à coefficients M_n *nombres entiers positifs (non donnés).*

Le problème ainsi posé paraît complètement indéterminé. Mais il est facile de montrer que généralement il admet une solution dépendant de $p + 1$ constantes arbitraires et d'une inégalité D, en ce sens que, ces constantes et l'inégalité D étant *numériquement* précisées, le problème admet une solution *numériquement* déterminée, ou un système bien déterminé de telles solutions, sans qu'il puisse en avoir d'autres.

2. Pour le faire voir, supposons d'abord que les coefficients M_n soient assujettis à la condition *de ne pas croître indéfiniment avec n*.

Soit H un nombre entier positif qui n'est dépassé par aucun coefficient M_n (inégalité D), et désignons par h le nombre de chiffres de H.

Soient

$$(2)\qquad A,\ A',\ A'',\ \ldots,\ A^{(p)}$$

les valeurs respectives que doivent prendre les fonctions y, y', y'', ..., $y^{(p)}$ pour

$$(3)\qquad x = a + 10^{-h}.$$

La valeur correspondante

$$(4)\qquad N = F(a + 10^{-h},\ A,\ A',\ A'',\ \ldots,\ A^{(p)})$$

s'exprimera par un seul nombre réel N. Si $N \leqq 0$, le problème n'admet pas de solutions, puisque la valeur

$$(5)\qquad \Sigma M_n 10^{-h}$$

est essentiellement positive. Si $N > 0$, le problème admet une solution qui s'obtient de la manière suivante.

Soit G_k le groupe numérique

$$(6)\qquad G_k = 00\ldots0M_k \qquad (K = 1, 2, 3, \ldots),$$

composé de l'entier M_k précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre total de chiffres de G_k soit égal h. Formons le nombre décimal

$$(7)\qquad M_0,\ G_1 G_2 G_3 \ldots$$

obtenu en écrivant bout à bout, à la suite les uns des autres, les groupes numériques G_1, G_2, G_3, ... et ayant pour partie entière le coefficient M_0. Il est manifeste que les chiffres significatifs de deux entiers consécutifs M_{k-1} et M_k n'empiètent jamais les uns sur les autres, séparés par des zéros en nombre plus ou moins considérable suivant que l'écart entre h et le nombre effectif de chiffres de M_k est plus ou moins grand.

Les deux nombres (5) et (7) devant coïncider entre eux et avec le nombre N, le coefficient M_0 coïncidera avec la partie entière de la valeur numérique de N et le coefficient $M_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ coïncidera avec le groupe de chiffres significatifs de N commençant par la $[(k-1)h+1]^{\text{ième}}$ et se terminant par la $kh^{\text{ième}}$ décimale de N.

La fonction (1) *se trouve ainsi parfaitement déterminée par le nombre* N et la fonction y sera déterminée comme intégrale générale de l'équation différentielle

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = \Sigma M_k (x-a)^k.$$

La solution du problème comporte donc $p+1$ constantes arbitraires (2). On peut manifestement remplacer l'une quelconque de ces constantes par celle représentant le nombre N.

3. Supposons maintenant les M_n *entiers positifs quelconques.* La convergence de la série (1) au voisinage de $x = a$ implique l'existence d'un entier positif L que la valeur de $\sqrt[n]{M_n}$ ne dépassera pour aucun coefficient M_n (inégalité D). Si l'on désigne par c le nombre de chiffres de L, on aura

$$M_n \leqq 10^{cn} \tag{8}$$

pour toute valeur, finie ou infinie, de n.

Désignons par $R(t)$ l'expression obtenue en remplaçant dans la partie réelle de $F(x, y, y', \ldots, y^{(p)})$ pour $x = a + re^{\varphi i}$ [$y(x)$ étant une solution du problème ici considéré]

$$r \text{ par } 10^{-\frac{c}{2}} \quad \text{et} \quad \varphi \text{ par } \alpha t,$$

où α désigne la constante

$$\alpha = \sqrt{2c \log \operatorname{nat} 10}. \tag{9}$$

Comme, d'après les conditions du problème, $R(t)$ coïncide avec la partie réelle de la fonction (1) pour les mêmes valeurs de x, r, φ, en vertu des formules

$$R(t) = \Sigma M_n 10^{-\frac{cn}{2}} \cos \alpha t, \tag{10}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} \cos \lambda t \, dt = e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \qquad (\lambda > 0), \tag{11}$$

la valeur numérique de l'intégrale définie

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} R(t)\, dt \tag{12}$$

sera

$$P = \Sigma\, 10^{-\frac{n(n+1)}{2}c} M_n. \tag{13}$$

Soit H_k le groupe numérique

$$H_k = 00\ldots M_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

composé de l'entier M_k précédé d'autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre total de chiffres de H_k soit égal à cn. La valeur numérique de (13) coïncidera avec le nombre décimal

$$M_0, H_1 H_2 H_3 \ldots \tag{14}$$

obtenu en écrivant bout à bout, à la suite les uns des autres, les groupes numériques H_1, H_2, H_3, ... et ayant pour partie entière le coefficient M_0. Il est manifeste que les chiffres de deux entiers consécutifs M_{k-1} et M_k n'empiéteront jamais les uns sur les autres. Le coefficient $M_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ coïncidera alors avec le groupe de chiffres significatifs du nombre P commençant par la $\left[\frac{k(k-1)}{2}c + 1\right]^{\text{ième}}$ et se terminant par la $\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^{\text{ième}}$ décimale de P.

La fonction (1) est donc parfaitement déterminée par le nombre P rattaché à l'intégrale y et la fonction y s'obtient comme intégrale générale de l'équation différentielle

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(p)}) = \Sigma M_k (x - a)^k. \tag{15}$$

La solution du problème comporte $p + 1$ constantes arbitraires qui sont : les valeurs

$$A, A', \ldots, A^{(p-1)}$$

que prennent $y, y', \ldots, y^{(p-1)}$ pour une valeur donnée de x, et la constante représentant le nombre P.

La fonction (1), et par suite aussi la fonction y, se trouvent ainsi étroitement liées aux nombres N et P lesquels, par la suite de leurs décimales, déterminent complètement la fonction (1), et à p constantes arbitraires près la fonction y.

Il est manifeste que ni N ni P ne sauraient être des nombres entiers sans que (1) se réduise à une constante; ils ne sauraient avoir un nombre limité de décimales que si (1) se réduit à un polynome en x.

Si les parties significatives des tranches G_k composant le nombre N, ou les tranches H_k composant le nombre P, se reproduisent périodiquement à partir d'un certain rang, la fonction (1) est une fonction rationnelle de x.

Si les parties significatives des H_k ont pour valeurs respectives

$$\binom{1}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \cdots$$

(1) est la fonction algébrique

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}, \quad \cdot\cdot$$

4. Le même procédé s'applique aux cas où la fonction F est remplacée par une intégrale

$$\mathrm{I}(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}\, dx$$

ou par une intégrale multiple portant sur F.

Envisageons, par exemple, le problème de déterminer la courbe plane dont l'aire limitée par l'axe des x, l'arc de la courbe et les deux ordonnées extrêmes $x = 0$ et $x = x$ soit développable en série

$$\Sigma \mathrm{M}_n x^n$$

à coefficients M_n nombres entiers positifs (non donnés) ayant chacun au plus h chiffres, sachant que cette aire, pour l'ordonnée extrême correspondant à $x = 10^{+h}$ est égale à celle du quadrant du cercle de rayon 1.

La courbe aura pour équation

$$y = \Sigma(n+1)\lambda_{n+1} x^n,$$

où λ_n est égal à $n^{\text{ième}}$ groupe à h décimales du nombre

$$\frac{\pi}{4} = 0,78539816339769830961\ldots.$$

On peut traiter de la même manière un grand nombre d'autres problèmes de cette espèce, comme par exemple le suivant : *Déterminer la fonction $f(x)$, holomorphe au voisinage d'une valeur réelle donnée $x = a$, jouissant de la propriété que la fonction et toutes ses dérivées successives prennent pour $x = a$ des valeurs entières positives (non données), en connaissant un nombre rattaché à la fonction.*

Dans le cas, par exemple, où les valeurs de la fonction et de ses dérivées doivent être plus petites qu'un entier donné à h chiffres, le problème est parfaitement déterminé lorsqu'on se donne la valeur numérique de l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-t} f[(a + 10^{-h})t]\, dt;$$

la fonction cherchée sera

$$f(x) = \sum \frac{\mathrm{M}_n}{n!}(x-a)^n,$$

où M_n est la partie significative du $n^{-\text{ième}}$ groupe à h décimales du nombre I.