BULLETIN DE LA S. M. F.

N. WIENER

Un problème de probabilité dénombrables

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 569-578
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__569_0>

UN PROBLÈME DE PROBABILITÉS DÉNOMBRABLES ;

PAR M. NORBERT WIENER [1].

L'étude des lois de probabilité concernant les systèmes d'une infinité dénombrable de variables est due principalement à M. E. Borel [2]. M. H. Steinhaus [3] a obtenu des résultats très intéressants sur cette question, particulièrement au sujet de la convergence des séries telles que

$$\sum_{1}^{\infty} \pm \frac{1}{n},$$

où chaque signe est choisi indépendammeut des autres, les signes $+$ et $-$ ayant à chaque choix des probabilités égales. J'ai également écrit sur ce sujet [4]. En outre la partie des *Leçons d'Analyse fonctionnelle* de M. Paul Lévy, qui traite de la mesure dans l'espace fonctionnel du point de vue d'une infinité dénombrable de coordonnées, se rattache au même ordre d'idées.

Dans plusieurs articles [5] j'ai développé la théorie d'un type d'espace fonctionnel qui diffère par plusieurs points essentiels du type classique, et que j'appelle espace différentiel. Cet espace est caractérisé par le fait que l'on considère comme des variables indépendantes, non les différentes valeurs de la fonction $f(x)$

---

[1] J'adresse ici mes remerciements à M. Paul Lévy, qui a bien voulu m'aider dans la rédaction de ce Mémoire en français.

[2] E. BOREL, *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques* (*Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, t. XXVII, 1er semestre 1909, p. 247 à 271).

[3] H. STEINHAUS, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure* (*Fund. Math.*, t. IV, 1923).

[4] NORBERT WIENER, *Notes on the Series* $\Sigma \pm \frac{1}{n}$ (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Pologne*, 1923).

[5] *The Average of an Analytic functional* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, Washington, t. VII, p. 253-260); *The Average of an Analytic functional and the Brownian Movement* (*Ibid.*, p. 294-298); *Differential-Space* (*Journ. Math. and Phys., Mass. Inst. Techn.*, t. II, p. 131-174); *The Average Value of a functional* (*Proc. London Math. Soc.*, 2e série, t. XXII, Part 6, p. 454-467).

que représente un point de cet espace, pour des valeurs de x très nombreuses et en progression arithmétique, mais les accroissements de $f(x)$ entre deux valeurs consécutives de x. Comme dans l'espace fonctionnel ordinaire, on peut remplacer l'infinité continue de coordonnées qui détermine un point de cet espace par une infinité dénombrable de coordonnées indépendantes. Pour préciser, si

$$(1) \qquad f(x) \sim a_0 + a_1\sqrt{2}\cos\pi x + \ldots + a_n\sqrt{2}\cos n\pi x + \ldots \quad (^1)$$

est une fonction de l'espace différentiel définie dans l'intervalle (o, 1), les quantités

$$(2) \qquad \pi a_1, \quad 2\pi a_2, \quad \ldots, \quad n\pi a_n, \quad \ldots$$

constituent une infinité dénombrable de coordonnées ayant toutes des poids égaux. Si

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n)$$

est une fonction bornée uniformément continue de $a_1, \ldots, a_n$, j'ai démontré [2] que sa valeur moyenne dans un domaine que j'appelle sphère de rayon r est

$$\frac{1}{(2\pi r^2)^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n\, e^{-\frac{1}{2r^2}\sum_1^n x_k^2}\,\varphi\left(\frac{x_1}{\pi}, \ldots, \frac{x_n}{\pi n}\right)$$

et l'on obtient la même moyenne, si toutefois elle existe, lorsque φ, quoique non borné, est uniformément continu dans tout domaine où les a_n sont bornés.

On verra que nous supposons essentiellement que πa_1, $2\pi a_2$, $\ldots$, $n\pi a_n$, $\ldots$ sont des variables indépendantes, obéissant à la loi de Gauss avec le même paramètre. C'est dans cette hypothèse que nous trouvons pour la moyenne d'une fonctionnelle la valeur obtenue d'autre part dans l'espace différentiel. Nous sommes ainsi conduits à la question : est-il possible d'appliquer cette transformation de coordonnées à une classe plus étendue de fonctionnelles? En d'autres termes, est-il possible de développer toute la théorie

---

(1) Le signe $\sim$ est mis à la place du signe $=$ parce que la série considérée peut n'être que convergente en moyenne.

(2) *Differential Space*, p. 171.

de l'espace différentiel en se plaçant au point de vue d'une infinité dénombrable de variables?

L'objet du présent travail est de donner à cette question une réponse affirmative. Dans ce but, il est nécessaire de rappeler brièvement quelques points de mon précédent Mémoire; le procédé d'intégration développé dans ce Mémoire était un cas particulier de l'intégration dans les ensembles abstraits au sens de Daniell (¹). M. Daniell considère un ensemble T_0 de fonctions bornées $f(p)$ d'éléments quelconques p. Cet ensemble est fermé relativement aux opérations suivantes : multiplier par une constante; ajouter deux fonctions; et prendre les modules. M. Daniell appelle « intégrale » une fonctionnelle $U(f)$ ayant les propriétés suivantes :

(C) $$U(cf) = c\,U(f),$$

(A) $$U(f_1 + f_2) = U(f_1) + U(f_2),$$

(L) Si $f_1 \geqq f_2 \geqq \ldots \geqq 0$ et $\lim f_n = 0$ alors $\lim U(f_n) = 0$,

(P) $U(f) \geqq 0$ si f est toujours $\geqq 0$.

Il étend autant que possible le domaine dans lequel il définit cette opération, comme M. Lebesgue l'a fait en partant de l'intégration au sens de Riemann. Il prouve d'abord que, si $f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots$ est une suite de fonctions appartenant à T_0, la suite des $U(f_n)$ est non décroissante, et par suite devient infinie par valeurs positives ou a une limite. Si alors f_n a une limite f, M. Daniell définit $U(f)$ comme limite de $U(f_n)$, et désigne par T_1 l'ensemble des fonctions telles que f. Il définit ensuite pour toute fonction f la semi-intégrale supérieure $\dot{U}(f)$ comme la borne inférieure de $U(g)$ pour toute fonction g appartenant à T_1 et $\geqq f$. Il définit $\underset{\bullet}{U}(f)$ comme $-\dot{U}(-f)$. Si $\dot{U}(f) = \underset{\bullet}{U}(f)$, ces quantités étant finies, il les désigne par $U(f)$, et la fonction f est dite sommable. Un des principaux théorèmes de Daniell est le suivant : si $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ est une suite de fonctions sommables ayant pour limite f, et s'il existe une fonction φ sommable telle que $|f_n| \leqq \varphi$ pour toutes les valeurs de n, alors f est sommable et $U(f_n)$ a pour limite $U(f)$. Il faut aussi, pour la suite, rappeler les résultats

(¹) P. J. DANIELL, *A General Form of Integral* (*Annals of Mathematics*, 2ᵉ série, t. XIX, p. 279-294).

suivants : si f est sommable, cf et $|f|$ sont sommables et $U(cf) = cU(f)$; de plus, si f et g sont sommables $f+g$ est sommable et $U(f+g) = U(f) + U(g)$, et si $f \geqq g$, $U(f) \geqq U(g)$.

Enfin, si $f(x) \geqq g(x) \geqq h(x)$, $f(x)$ et $h(x)$ étant sommables et ayant même intégrale U, $g(x)$ est également sommable.

Dans mon précédent article, les éléments p de l'espace auquel j'appliquais la théorie de l'intégration ou de la moyenne étaient les fonctions continues $f(x)$ s'annulant avec x et définies dans l'intervalle $(0, 1)$. L'ensemble T_0 était celui des fonctionnelles bornées et telles qu'il existe une fonction $\varphi(x)$, s'annulant pour $x = 0$, pour laquelle

$$|F[f] - F[f+g]| < \varphi(\max|g|).$$

Nous désignions par $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la valeur de $F[f_n]$, où

$$f_n(t) = \sum_1^k x_i, \qquad \left[\frac{k-1}{n} < t \leqq \frac{k}{n}\right],$$

et nous l'appelions $n^{\text{ième}}$ section de $F[f]$. Nous avons établi que pour toute fonctionnelle de l'ensemble T_0, la moyenne de la $n^{\text{ième}}$ section dans la sphère $\sum_1^n x_n^2 = r^2$ a, pour n infini, une limite que nous appelons moyenne de $F[f]$ dans la sphère de rayon r et désignons par $A_r\{F\}$. Nous avons montré que les résultats de Daniell s'appliquent dans ces conditions, et comme cas particulier nous avons considéré la moyenne de fonctionnelles telles que $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, les a_n ayant la même signification que plus haut, formule (2).

Nous allons maintenant, indépendamment de la théorie précédente, définir une intégrale de Daniell représentant la moyenne d'une fonction des a_n. Nous considérerons des éléments p d'une nature plus générale : toute suite de nombres réels $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ constitue un argument pour nos fonctionnelles, que la série (1) converge en moyenne ou non. Notre ensemble T_0 sera celui des fonctions $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (n étant fini), bornées, uniformément continues, et nulles pour les valeurs suffisamment grandes des variables, et notre opération U sera définie par la formule

$$U_r \{\varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$$
$$= \frac{1}{(2\pi r^2)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, e^{-\frac{1}{2r^2}\sum_1^n x_k^2} \varphi\left(\frac{x_1}{\pi}, \ldots, \frac{x_n}{\pi n}\right).$$

Il est évident que T_0 vérifie les conditions de Daniell, et que l'opération (U) vérifie les conditions (C), (A) et (P). Elle vérifie aussi la condition (L). On peut l'établir par la méthode employée par Daniell dans un autre Mémoire, en utilisant le fait que U_r, qui est une moyenne, ne peut pas dépasser le module maximum de son argument. La méthode de Daniell s'applique donc pour généraliser l'opération U_r.

L'opération U_r, appliquée à φ considéré comme fonction des a_n, coïncide avec l'opération A_r, appliquée à φ considéré comme fonctionnelle de f, la fonction f et les coefficients a_n étant liés par la relation (1). Alors, d'après le théorème de Daniell rappelé plus haut, pour toute fonction de l'ensemble T_1 liée à l'opération U_r, l'opération A_r s'applique et conduit à la même valeur. Il en résulte, d'après un autre théorème de Daniell également rappelé plus haut, que les extensions de ces deux opérations coïncident; en ce sens que dans tout domaine où U_r peut être défini, A_r peut être défini et U_r et A_r ont la même signification.

L'objet du présent travail est de montrer que le domaine où U_r est défini coïncide avec celui où A_r est défini, et que presque tous les systèmes de coefficients a_n (dans le sens qui résulte de la loi de probabilité indiquée plus haut), correspondent à des fonctions $f(x)$ continues. Dans mon précédent article [1], j'ai démontré un théorème revenant à dire que la fonction égale à l'unité si $a_m^2 + \ldots + a_n^2 + \ldots > a^2$ et nulle dans le cas contraire a une semi-intégrale supérieure tendant vers zéro pour m infini. J'ai montré ensuite que, si $F(f)$ est une fonctionnelle bornée et uniformément continue au sens restreint, c'est-à-dire si à tout η positif correspond un θ positif tel que

$$\int_0^1 [f(t) - g(t)]^2 \, dt < \theta$$

---

(1) *Differential-Space*, p. 171-172.

entraîne

$$|F[f]-F[g]|<\eta,$$

F est sommable A_r; et la méthode employée permet de voir que F, considéré comme fonction des a_n, est sommable U_r.

Établissons maintenant la sommabilité U_1 de fonctionnelles d'un type particulier. Si $f(x)$ est la fonction de carré sommable correspondant à la série des cosinus

$$a_0+a_1\sqrt{2}\cos\pi x+\ldots+a_n\sqrt{2}\cos n\pi x+\ldots,$$

la fonction

$$\int_0^1 f(\pi y)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\pi(x-y)+\rho^2}\,dy,$$

qui correspond à la série

$$a_0+a_1\sqrt{2}\,\rho\cos\pi x+\ldots+a_n\sqrt{2}\,\rho^n\cos n\pi x+\ldots,$$

est continue par rapport à x pour tout $\rho<1$. Choisissons maintenant pour a_0 une fonction de ρ telle que notre nouvelle fonction s'annule pour $x=0$, c'est-à-dire que cette fonction sera

$$f_\rho(x)=\int_0^1 f(\pi y)(1-\rho^2)\times\left[\frac{1}{1-2\rho\cos\pi(x-y)+\rho^2}-\frac{1}{1-2\rho\cos y+\rho^2}\right]dy.$$

Considérons alors une fonctionnelle de la forme

$$\varphi[f_\rho(x_1),\ \ldots,\ f_\rho(x_n)],$$

où φ est une fonction bornée et continue de ses arguments. On voit aisément que φ sera une fonctionnelle bornée de a_1, a_2, ..., continue au sens restreint indiqué tout à l'heure. Elle sera sommable A_1 et sommable U_1, et les deux opérations conduiront à la même valeur.

Il n'y a aucune difficulté à étendre un peu cette classe de fonctionnelles; φ peut être une fonction de n variables ne prenant que les valeurs 1 et 0, prenant la première de ces valeurs dans un ensemble mesurable borné. Une telle fonction peut en effet être considérée comme limite d'une suite décroissante de fonctions continues, et différentes de zéro seulement dans un domaine borné. D'ailleurs, d'après un autre théorème de Daniell, si deux fonctionnelles sont sommables, la fonctionnelle toujours égale à la plus grande des deux (ou à la plus petite) est sommable. On en conclut que, si une fonctionnelle de f est égale à 1 ou 0 suivant que des inégalités en nombre fini entre un nombre fini d'expressions $f_\rho(x)$ (les ρ et les x ayant des valeurs comprises entre 0 et 1) sont vérifiées ou non, cette fonctionnelle est sommable, pourvu que ces inégalités permettent de borner supérieurement les $f_\rho(x)$. Comme d'ailleurs la limite d'une suite décroissante de fonctionnelles sommables est elle-même sommable, on peut augmenter indéfiniment le nombre des valeurs considérées des ρ et des x, et obtenir par exemple pour les x l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle (0, 1), limites comprises, et pour les ρ un ensemble de nombres inférieurs à 1 mais approchant indéfiniment de cette valeur. Ainsi la fonctionnelle égale à 1 quand les $f_\rho(x)$ (pour les valeurs de ρ considérées) vérifient une condition de Lipschitz donnée pour toutes les valeurs rationnelles de x, et à 0 dans le cas contraire, est sommable U_1 et sommable A_1, les deux opérations donnant la même valeur; bien entendu, les fonctions $f_\rho(x)$ étant continues, la restriction que l'on ne considère que les valeurs rationnelles de x est sans importance, et peut être supprimée.

On peut remarquer que, si $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz, les $f_\rho(x)$ la vérifient également, car $f_\rho(x+h)-f_\rho(x)$ est une moyenne des valeurs de $f(x+h)-f(x)$, calculée avec des poids convenables. Par suite la probabilité [1] que tous les $f_\rho(x)$ vérifient une condition de Lipschitz est au moins égale à la probabilité que $f(x)$ la vérifie; et cela est vrai aussi bien en définissant la probabilité par les moyennes U_r ou A_r. Or j'ai démontré [2] que la probabilité qu'il existe deux nombres t_1 et t_2 compris entre 0 et 1 tels que

$$(3)\qquad |f(t_2)-f(t_1)| \leqq ar\,|t_2-t_1|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

tend vers 1 quand a augmente indéfiniment, la probabilité étant

(1) La probabilité ou mesure d'un ensemble de fonctions est par définition la moyenne d'une fonctionnelle égale à 1 pour ces fonctions et 0 pour les autres.

(2) *Differential-Space*, p. 166.

liée à la moyenne A_r. Donc, qu'il s'agisse de moyenne A_r ou U_r, la probabilité que, pour tous les ρ considérés,

$$(4) \qquad |f_\rho(t_2) - f_\rho(t_1)| \leqq ar|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

tend vers 1 pour a infini.

Quel que soit a, si cette dernière égalité est vraie pour toutes les valeurs considérées de ρ, les $f_\rho(x)$ sont également continus. Il est donc possible de choisir parmi ces fonctions une suite convergeant uniformément vers une limite. Les $f_\rho(x)$ convergent d'ailleurs en moyenne vers f et ne peuvent converger uniformément vers une autre limite. La fonction $f(x)$ est donc la limite d'une suite uniformément convergente de $f_\rho(x)$, et vérifie toute condition d'égale continuité que les $f_\rho(x)$ vérifient. Donc, non seulement (4) résulte de (3), mais (3) résulte de (4). Donc l'ensemble des fonctions vérifiant l'inégalité (3) a une mesure U_1 aussi bien qu'une mesure A_1, et ces mesures coïncident. En particulier, la probabilité A_1 de l'inégalité (3) tendant vers 1 pour a infini, sa probabilité U_1 tend aussi vers 1. De ce résultat, et des théorèmes principaux de Daniell, nous pouvons conclure que l'ensemble des suites a_n ne correspondant à aucune fonction $f(x)$, ou correspondant à des fonctions pour lesquelles on ne puisse pas trouver a tel que pour tout système de valeurs de t_1 et t_2,

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leqq ar|t_2 - t_1|^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

a une mesure nulle. Donc, à l'exception de suites constituant un ensemble de mesure nulle, toute suite de a_n représente une fonction continue.

Considérons maintenant les fonctionnelles définies, si f est continu, par la formule

$$F[f] = \varphi[f(x_1), \ldots, f(x_n)],$$

où φ est borné et continu, et si f est discontinu [1] par la formule

$$F[f] = 0$$

---

[1] Nous comprenons aussi dans ce cas celui où f est une notation purement symbolique représentant une suite de coefficients a_n.

Nous considérons de même la fonctionnelle définie, si f est continu, par la formule

$$F_\rho[f] = \varphi[f_\rho(x_1), \ldots, f_\rho(x_n)]$$

et si f est discontinu par la formule

$$F_\rho[f] = 0.$$

Il est évident que, si f est continu,

$$\begin{aligned}\lim_{\rho \to 1} F_\rho[f] &= \lim_{\rho \to 1} \varphi[f_\rho(x_1), \ldots, f_\rho(x_n)] \\ &= \varphi\left[\lim_{\rho \to 1} f_\rho(x_1), \ldots, \lim_{\rho \to 1} f_\rho(x_n)\right] \\ &= \varphi[f(x_1), \ldots, f(x_n)] = F[f],\end{aligned}$$

et que, dans le cas contraire,

$$\lim_{\rho \to 1} F_\rho[f] = F[f].$$

En outre l'ensemble des F_ρ est uniformément borné, et chaque F_ρ est sommable comme étant toujours égal à la plus petite de deux fonctionnelles sommables. Alors, d'après les théorèmes de Daniell, $F[f]$ est sommable U_1.

On voit aisément que ce résultat subsiste si φ est une fonction simple (step-function), car une telle fonction peut être obtenue à la limite en partant de fonctions continues.

Cet ensemble de fonctionnelles est précisément l'ensemble T_0 d'un de mes précédents Mémoires (¹), où j'étudiais la même opération A_r que dans mon Mémoire sur l'espace différentiel. Il en résulte que toute fonctionnelle sommable A_r au sens du présent Mémoire est sommable U_r, les deux opérations conduisant à la même moyenne, pourvu qu'elle s'annule pour toute fonction discontinue. Cette dernière restriction, qui ne s'applique qu'à des fonctions formant un ensemble de mesure nulle, peut d'ailleurs être omise. Les deux opérations U_1 et A_1 sont donc complètement identiques, ayant la même extension et conduisant à la même valeur.

Tous les résultats de mon article sur l'espace différentiel peuvent

(¹) *The Average Value of a Functional.*

donc être considérés comme des résultats sur les probabilités dénombrables [1].

---

[1] Je rectifie ici quelques erreurs d'impression commises dans cet article.

Première formule non numérotée après la formule (78), page 164, lire, pour le champ d'intégration,

$$\int_0^1 \int_{t_1}^1 \cdots \int_{t_{\nu-1}}^1 .$$

Même correction pour la première formule de la page 165; dans cette formule, remplacer aussi t_n par t_ν.

Même page, formule (C), lire

$$U(cf) = c\,U(f).$$