BULLETIN DE LA S. M. F.

F. ENRIQUES

Sur la classification des surfaces algébriques au point de vue des transformations birationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 602-609

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__602_0>

SUR LA CLASSIFICATION DES SURFACES ALGÉBRIQUES AU POINT DE VUE DES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES

(Résumé de la Conférence tenue le 24 mai 1924);

PAR M. FEDERIGO ENRIQUES.

1. Rappelons d'abord ce qui a été établi par Riemann, Clebsch, Brill et Nöther touchant la classification des courbes

$$f(x, y) = 0.$$

Un nombre entier, qu'on appelle le *genre*, joue ici le rôle fondamental. Pour chaque valeur du genre p il y a une famille de courbes, renfermant une infinité continue de classes distinctes, qui est précisément ∞^{3p-3} pour $p > 1$ (∞^1 pour $p = 1$, ∞^0 pour $p = 0$).

Et il est essentiel de remarquer que cette famille est *irréductible* (1), de sorte que dans la classification des courbes il ne s'introduit d'autres nombres entiers en dehors du genre.

2. En passant aux surfaces $f(x, y, z) = 0$ il faut expliquer d'abord la définition de quelques caractères invariants qui s'introduisent ici comme extension du genre des courbes. En ces explications on tiendra compte des résultats obtenus par Clebsch, Nöther et Zeuthen, des développements de l'école géométrique italienne et aussi de ceux qui ont été établis par M. Picard, en partant de sa féconde conception des intégrales de différentielles totales attachées à une surface.

On suppose d'abord que la surface dont on parle, $f(x, y, z) = 0$, ne possède d'autres singularités qu'une courbe double nodale, à laquelle appartiendront un certain nombre de points triples (qui seront en même temps triples pour la surface et pour la courbe) : d'après MM. B. Levi et O. Chisini on peut toujours se ramener à ces hypothèses, par une simple transformation de la surface.

---

(1) *Cf.* ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, t. III, 1924, p. 366-376 (*Bologna*, *Zanichelli*).

Les caractères principaux de la surface f, dont l'ordre sera indiqué par n, peuvent être définis de la façon suivante :

Que l'on envisage les surfaces φ_{n-4}, φ_{n-3}, d'ordre $n-4$, $n-3$ adjointes à f, c'est-à-dire qui passent simplement par la courbe double de f : les sections φ_{n-4} sont invariantes par rapport aux transformations birationnelles de f;

Le nombre des φ_{n-4} linéairement indépendantes sera le *genre géométrique* p_g de f;

Dans l'hypothèse $p_g > 0$, le genre des courbes (*canoniques*) sections de f et des φ_{n-4}, dépouillées des courbes (exceptionnelles) transformables en de points simples, constitue le *genre linéaire* $p^{(1)}$ de f;

Le nombre des φ_{n-3} adjointes à f linéairement indépendantes, dépend du genre π des sections planes de f, et s'exprime par

$$p_a + \pi,$$

où p_a est un invariant : ce caractère prend le nom de *genre numérique* ou *arithmétique* de f, et l'on a

$$p_a \leqq p_g.$$

La différence $p_g - p_a$, qu'on appelle l'*irrégularité* de la surface, a plusieurs significations remarquables, en particulier elle désigne le nombre des intégrales de différentielles totales de première espèce, attachées à p.

Or les invariants p_g, $p^{(1)}$ et p_a ne suffisent pas à la classification des surfaces. Par exemple s'il s'agit de déterminer la classe des surfaces *rationnelles*, on trouvera de suite

$$p_a = p_g = 0$$

(tandis que $p^{(1)}$ n'est pas défini dans ces conditions); mais réciproquement il y a des familles de surfaces pour lesquelles les deux genres p_a et p_g s'évanouissent en même temps, et qui ne sont pas rationnelles.

En effet pour les surfaces $p_a = p_g = 0$, bien qu'il n'existe pas de courbes *canoniques* découpées par des φ_{n-4} adjointes, il peut exister des courbes *bicanoniques* qui viennent découpées par des surfaces d'ordre $2(n-4)$ *biadjointes* à f, c'est-à-dire passant doublement par la courbe double de f.

Le plus simple exemple qui se présente à ce sujet est donné par les surfaces d'ordre 6, f_6, qui passent doublement par les arêtes d'un tétraèdre (1) : la f_6 n'admet pas de quadriques adjointes, mais elle possède une φ_4 biadjointe qui est formée par les quatre plans du tétraèdre : ainsi le genre de f_6, $p_g = 0$, mais on a un *bigenre* $P = P_2 = 1$.

A côté des courbes bicanoniques on définira analoguement les *courbes i-canoniques*, qui seront découpées sur une surface f d'ordre n par des surfaces $\varphi_{i(n-4)}$ d'ordre $i(n-4)$, *i-adjointes* à f, se comportant par rapport à la courbe de f comme si elles y passaient i fois ; ainsi le bigenre de f figurera parmi les *genres d'ordre supérieur*, ou *i-genres* P_i de f pour $i = 2, 3, \ldots (P_1 = p_g)$.

C'est là une considération qui rappelle l'introduction des *idéaux* dans la théorie des nombres.

3. Le rôle du bigenre et des genres d'ordre supérieur, par rapport à la classification des surfaces, ressortit des considérations suivantes :

D'abord le bigenre suffit à définir la classe des surfaces rationnelles, car on a le théorème de M. Castelnuovo (2) : les surfaces rationnelles sont définies par les conditions

$$p_a = P_2 = 0.$$

Or la classe des surfaces rationnelles rentre dans la famille plus générale des surfaces $f(x, y, z) = 0$ qui, par une transformation birationnelle, se réduisent au type du cylindre

$$F(X, Y) = 0 ;$$

ces surfaces auront en général un genre numérique $p_a \leqq 0$, et seront rationnelles seulement pour $p_a = 0$.

Les plurigenres P_i permettent de définir *la famille des surfaces transformables en des cylindres* (3), *qui est déterminée par les*

---

(1) *Cf.* F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (*Memorie della Società italiana delle Scienze*, 1896, n° 39; cf. *ibid.*, 1906, et *Rendiconti Accademia di Bologna*, 1908).

(2) *Memorie della Società it. delle Scienze*, 1906.

(3) Enriques, *Rendiconti Circolo di Palermo*, t. XX, 1905, p. 1.

conditions

$$P_4 = P_6 = 0,$$

et ces conditions ne sont pas réductibles, car il y a des surfaces pour lesquelles $P_4 = 0$, $P_6 > 0$, et d'autres pour lesquelles $P_4 > 0$, $P_6 = 0$.

Le genre d'ordre 4, P_4, joue aussi un rôle essentiel dans la définition des *surfaces hyperelliptiques*, dont les points correspondent biunivoquement aux couples u, v incongruents par rapport à un système de périodes

$$\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & \frac{1}{\delta} & h & g' \end{matrix} :$$

cette famille est définie par les conditions

$$p_g = P_4 = 1, \qquad p_a = -1 \quad (^1),$$

mais elle se compose d'une infinité de familles, renfermant chacune ∞^3 classes, qui se distinguent d'après la valeur du *diviseur* $\delta = 1$, 2, ... Ainsi aux caractères entiers que nous avons introduits dans la théorie générale des surfaces, il s'ajoute ici un autre caractère entier arbitraire, qui est précisement le δ.

Une circonstance analogue se présente aussi dans la classification des *surfaces régulières de genre* 1, *qui sont dépourvues de courbe canonique* (d'ordre > 0). Ces surfaces sont caractérisées par les conditions

$$p_a = P_4 = 1 \quad (^2),$$

mais elles donnent lieu à une infinité de familles distinctes (renfermant chacune 19 modules), qui dépendent d'un nombre entier arbitraire (³) : la première famille est formée par les surfaces $z^2 = f_6(x, y)$, la seconde par les surfaces du quatrième ordre, la troisième par des surfaces du sixième ordre de l'espace à quatre dimensions, etc.

(¹) Enriques, *Rendiconti Circolo di Palermo*, t. XX, 1905, p. 61.

(²) Enriques, *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$ (*Rendiconti Accademia Bologna*, 1905).

(³) Enriques, *Rendiconti Bologna*, Dec. 1908. — Severi, *Atti Istituto Veneto*, Gennaio, 1909.

4. Pour pousser ces considérations et parvenir à quelques résultats généraux concernant la classification des surfaces, il convient de rappeler que (d'après Castelnuovo et Enriques, 1900) toute surface ne se réduisant pas à un cylindre peut être transformée en une surface dépourvue de courbes exceptionnelles. Ceci posé, on définit aisément pour de telles surfaces *le genre linéaire virtuel* $p^{(1)}$, indépendamment de l'existence de courbes canoniques (c'est-à-dire pour $p_g \geqq 0$). Il suffit d'écrire la formule qui (pour $p_g > 0$) donne le genre π' de la courbe section de f avec une φ_{n-3} adjointe : en désignant par π le genre de la section plane de f on a

$$\pi' = p^{(1)} + 3(\pi - 1).$$

On démontre que le $p^{(1)}$ défini par cette expression est, èn tout cas, invariant, vis-à-vis de toutes les transformations qui n'introduisent pas des courbes exceptionnelles, et l'on a

$$p^{(1)} \geqq 1.$$

Maintenant que l'on se propose de classifier les surfaces non appartenant au type des cylindres (pour lesquelles $P_4 + P_6 > 0$), d'après la valeur du $p^{(1)}$, on parvient au résultat suivant [1] :

Les surfaces ($P_4 + P_6 > 0$) *de genre linéaire* $p^{(1)} = 1$ *donnent lieu à une infinité de familles dépendant de deux entiers arbitraires; au lieu que pour* $p^{(1)} > 1$ *on a seulement un nombre fini de familles distinctes.*

En effet, en ce dernier cas, la surface peut être transformée en une surface d'un ordre donné ; c'est-à-dire, pour $p_g > 3$, en une surface (*canonique*) de S_{p_g-1} dont les sections planes ou hyperplanes sont des courbes canoniques, et qui, d'après Nöther, est d'ordre $p^{(1)} - 1$; tandis que, pour $p_g < 3$, la surface se ramènera à une surface bicanonique ou i-canonique, d'ordre $i^2\,[p^{(1)} - 1]$, où l'on pourra supposer

$$\left[p_a \geqq 1,\ P_i \geqq p_a + \frac{i(i-1)}{2}(p^{(1)} - 1) + 1 > 3,\ p^{(1)} \geqq 2,\ i \leqq 4\right].$$

Il convient d'ajouter que pour $p^{(1)} = 1$ on a en général des sur-

---

(1) Enriques, *Rendiconti Bologna* (*loc. cit.*), 1906.

faces contenant un faisceau de courbes elliptiques; font exception les surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$ $(P_i = 1)$ rappelées ci-dessus, les surfaces hyperelliptiques de genres $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$, $(P_i = 1)$, et les surfaces de genres

$$p_a = P_3 = 0, \qquad P_2 = 1, \qquad (P_{2i+1} = 1 \quad P_{2i} = 0),$$

qui se ramènent à la surface du sixième ordre passant doublement pour les arêtes d'un tétraèdre.

Mais pour toutes ces surfaces de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, la question d'existence se trouve également résolue.

5. Tâchons d'examiner brièvement la *question d'existence* qui se rapporte aux surfaces de genre linéaire $p^{(1)} > 1$.

La construction d'une surface de caractères donnés se ramène en général à la construction d'une fonction algébrique de deux variables $z(x, y)$ dont on se donne la *courbe de diramation* $f(x, y) = 0$.

La fonction z répond à une surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

qui, par une projection parallèle à l'axe z, vient représentée sur le plan $z = 0$ compté un certain nombre n de fois, et la courbe f est ici la trace du cylindre circonscrit à F du point à l'infini de z (le cylindre qui projette la courbe double de F ne figurant pas dans celui-là). En désignant par π le genre des sections planes de F, parallèles à l'axe z, l'ordre de la courbe f sera

$$m = 2n + 2\pi - 2.$$

En outre la courbe f possédera en général un certain nombre d de nœuds et un certain nombre k de points de rebroussement, qui seront liés aux genres p_a et $p^{(1)}$ de F par des formules connues, de Nöther et Zeuthen :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{(m-1)(m-2)}{2} - d - k = p^{(1)} + 11\pi - 10 - n, \\ m(3m-6) - 6d - 8k = 24(\pi + p_a). \end{cases}$$

Ces formules définissent linéairement les caractères d et k répondant à la courbe de diramation d'un plan n-ple image d'une surface donnée F. Réciproquement il s'agit pour nous de construire F en partant de la courbe de diramation f d'un plan n-ple, que l'on se donne *à priori*. Alors l'*existence* de F amène certaines conditions auxquelles la courbe f devra satisfaire : il faut que parmi les riemanniennes que l'on peut construire sur le plan de la variable complexe x, en choisissant comme points de diramation les intersections de $f(x, y) = 0$ avec $y = tx$, il y en a une qui demeure invariante pour toute variation de t ; et cela porte précisément à des conditions par rapport aux nœuds et aux points de rebroussement de f, et par rapport aux tangentes menées à f par le point $(0,0)$ (¹).

Ces conditions présentent d'ailleurs une circonstance remarquable : si elles sont satisfaites pour une certaine courbe plane f, d'ordre m et avec d nœuds et k points de rebroussement, elles le seront aussi pour toutes les courbes, douées des mêmes caractères, appartenant à un système continu dans lequel f est susceptible de varier.

6. Or il est aisé de voir comment se pose en général la question d'existence pour les surfaces de genre linéaire $p^{(1)} > 1$. Supposons, par simplicité, que l'on ait $p_g > 3$, de sorte qu'on puisse se rapporter à de surfaces F canoniques, d'ordre $p^{(1)} - 1$. On sera amené à considérer des plans multiples de l'ordre

$$n = p^{(1)} - 1,$$

dont la courbe de diramation C sera d'ordre

$$m = 4(p^{(1)} - 1),$$

et possédera d nœuds et k points de rebroussement, ces nombres étant définis par les équations linéaires :

$$(1') \qquad \begin{cases} (2p^{(1)} - 3)(4p^{(1)} - 5) - d - k = 10p^{(1)} - 9, \\ (4p^{(1)} - 4)(12p^{(1)} - 18) - 6d - 8k = 24(p^{(1)} + p_a). \end{cases}$$

D'ailleurs cette courbe C jouit d'une propriété qui entraîne des conditions auxquelles elle doit satisfaire parmi les courbes de son

(¹) Enriques, *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione* (*Annali di Matematica*, s° IV, t. 1, 1923-24, p. 185.

genre $P^{(1)} = 10p^{(1)} - 9$: c'est-à-dire que les droites découpent sur C une série $g^2_{4(p^{(1)}-1)}$ qui multipliée par 5 donne la série canonique $g_{2P^{(1)}-2}$; cela résulte aisément de la propriété fondamentale de la courbe jacobienne d'un réseau de courbes canoniques sur F.

Partant si l'on veut construire un plan multiple d'ordre $n = p^{(1)} - 1$, correspondant à une surface canonique de genres p_a et $p^{(1)}$, on sera amené aux opérations suivantes.

1° D'abord on tâchera de déterminer, parmi les courbes K de genre $P^{(1)} = 10p^{(1)} - 9$, celles où il est possible de diviser la série canonique par 5, en obtenant une série de dimension $\geqq 2$: la possibilité de cette division entraîne

$$6p^{(1)} - 10$$

conditions, qui portent sur les

$$3(10p^{(1)} - 9) - 3,$$

modules des K, de sorte qu'on aura une ou plusieurs familles de K singulières, dépendant de

$$24p^{(1)} - 20,$$

modules.

2° Une K singulière obtenue par le procédé indiqué donnera lieu en général à *une* courbe C (ou à ∞^8 C projectivement identique) d'ordre $4(p^{(1)} - 1)$, douée de

$$d + k = (2p^{(1)} - 3)(4p^{(1)} - 5) - 10p^{(1)} + 9$$

points doubles : il faudra ajouter la condition que la C possède, parmi ces points doubles, k points de rebroussement, le nombre k étant défini par la seconde des équations $(1')$.

Supposons que cette équation donne, pour d et k, des nombres entiers, on aura ainsi un certain nombre de familles de courbes C, parmi lesquelles se trouvent les courbes de diramation des surfaces canoniques de genres p_a et $p^{(1)}$.

3° Il n'y aura après cela qu'à choisir précisément les familles de courbes C qui satisferont aux conditions d'existence des plans multiples d'ordre $p^{(1)} - 1$, dont il a été question.

Ainsi se pose le problème général de la construction effective des surfaces de caractères donnés.