BULLETIN DE LA S. M. F.

S. STOÏLOW

Sur l'inversion des fonctions continues

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 135-148

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__135_0>

SUR L'INVERSION DES FONCTIONS CONTINUES ;

Par M. S. Stoïlow.

Ce travail est le développement de deux Notes parues aux *Comptes rendus* (t. 179, 1924, p. 807 et 1585) dont le but est d'étudier quelques propriétés de la correspondance inverse de $y = f(x)$, où $f(x)$ est une fonction continue. Le problème conduit naturellement à examiner la nature de la fonction $f(x)$ aux points de l'ensemble $f(x) = b$, puis à étudier des particularités de cet ensemble qui est toujours fermé. C'est l'objet de ces recherches. Elles s'appuient entièrement, et presque uniquement, sur le théorème bien connu de M. Lebesgue : l'ensemble des points où une fonction à variation bornée n'a pas de dérivée bien déterminée et finie est de mesure nulle.

Ce théorème, démontré d'abord par M. Lebesgue pour les fonctions continues, a été étendu ensuite aux fonctions quelconques à variation bornée. C'est sous cette forme étendue que je l'emploie et voici les principaux résultats auxquels il me conduit :

Si b est une valeur prise hors d'un certain ensemble d'exception de mesure nulle :

En chaque point de première espèce de l'ensemble $f(x) = b$, un nombre dérivé est égal au nombre dérivé de nom différent et de côté opposé ; en chaque point isolé du même ensemble il existe une dérivée bilatérale.

Si les nombres dérivés d'un même côté sont bornés (le côté pouvant n'être pas le même quand on passe d'un point à l'autre) l'ensemble est fini ; si ces nombres dérivés sont finis l'ensemble est dénombrable.

La première proposition, qui rappelle par sa forme le théorème général sur les nombres dérivés de M. Denjoy, conduit aisément à celui-ci, fournissant quelques renseignements sur l'ensemble d'exception ; la seconde est en quelque sorte l'équivalent, sur l'ensemble $f(x) = b$, d'une proposition connue pour *tout* le domaine de définition de $f(x)$.

Faisons remarquer encore que plusieurs démonstrations données ici s'étendraient sans changement essentiel aux fonctions mesurables.

I. — Les rapports $\lambda(x_0, x)$ et $\mu(x_0, x)$.

1. Soit $f(x)$ une fonction continue quelconque sur le segment $(0, 1)$. En tout point x_0 de ce segment, et de chaque côté de ce point, on peut attacher à $f(x)$ une fonction à sens de variation déterminé : la fonction que je désignerai par $f^+(x_0 \mid x)$ sera définie seulement pour $x \geqq x_0$, où elle sera égale à $f(x)$ aux points où $f(x) \geqq f(x_0)$ et égale à $f(x_0)$ aux points où $f(x) < f(x_0)$. La fonction $f^-(x_0 \mid x)$ sera définie de la même façon à gauche de x_0 et les fonctions désignées par $f_+(x_0 \mid x)$ et $f_-(x_0)$ à droite et à gauche, mais en remplaçant les inégalités $f(x) \geqq f(x_0)$ et $f(x) < f(x_0)$ par les inégalités inverses.

Chacune de ces quatre fonctions est ce que j'appelle *à sens de variation déterminé en x_0, d'un côté ou de l'autre de ce point.*

Soit $\varphi(x)$ une fonction quelconque à sens de variation déterminé en x_0, à droite ou à gauche, et supposons, pour fixer les idées, qu'elle soit du type $f^+(x_0 \mid x)$.

Considérons alors les deux rapports

$$\lambda(x_0, x) = \frac{\max.[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x_0}^{x}}{x - x_0}$$

et

$$\mu(x_0, x) = \frac{\min.[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x}^{a}}{x - x_0};$$

où a désigne un point fixe sur $(0, 1)$ à droite de x et où les numérateurs sont le maximum et le minimum sur les segments (x_0, x) et (x, a) respectivement.

Ces rapports peuvent tendre vers des limites déterminées pour $x = x_0$, sans que la dérivée existe, à droite de x_0, en ce point. On verra facilement, un peu plus loin, que lorsque cette dérivée existe, ces deux rapports ont pour limite commune la valeur de cette dérivée.

2. Soient x' les points de $(x_0, 1)$ qui sont tels que $\varphi(x')$ est la

valeur maxima de $\varphi(x)$ sur (x_0, x'), et x'' les points de (x_0, a) tels que $\varphi(x'')$ est le minimum de $\varphi(x)$ sur (x'', a).

De tels points x' et x'' existent évidemment. Soient F_1 l'ensemble des x' et F_2 l'ensemble de x''. F_1 et F_2 sont fermés. Fn effet, tout point qui n'est pas x', et différent de x_0, peut être enfermé dans un petit segment où il n'y ait aucun x' à cause de la continuité de $\varphi(x)$ en ce point. Quant à x_0 il peut être considéré comme x', pour (x_0, x_0). L'ensemble F_1 est donc fermé.

Il en sera de même pour F_2. On peut toujours prendre a assez près de x_0 pour que x_0 soit un x'', puisque $\varphi(x)$ est, au voisinage dc x_0, du type $f^+(x_0 \mid x)$. Nous supposons toujours a pris de cette façon.

Sur F_1 et F_2 la fonction $\varphi(x)$ est évidemment non décroissante.

Aux deux extrémités d'un même intervalle contigu de l'un de ces ensembles, $\varphi(x)$ a la même valeur. Il est donc impossible que F_1 ou F_2 soit dénombrable.

Les ensembles F_1 et F_2 sont donc *fermés et non dénombrables* (1).

Nous allons établir maintenant que si x tend vers x_0 *sur* F_1, *les limites extrêmes* (plus grande et plus petite limite) de $\lambda(x_0, x)$ *sont les mêmes que si x tendait vers x_0 sur le segment entier* $(x_0, 1)$; *l'ensemble* F_2 *possédant la même propriété par rapport à* $\mu(x_0, x)$.

Nous le montrerons pour $\lambda(x_0, x)$, la démonstration étant la même pour $\mu(x_0, x)$.

Si x'_1 et x'_2 sont les extrémités d'un intervalle contigu de F_1 on a, en effet, si x est dans cet intervalle,

$$\lambda(x_0, x'_1) > \lambda(x_0, x) > \lambda(x_0, x'_2)$$

(en supposant comme toujours que x'_1 est l'extrémité gauche), car le

---

(1) Ceci résulte du théorème de L, Scheffer si l'on considére la fonction non décroissante égale à $\varphi(x)$ sur F et constante dans les intervalles contigus, fonction évidemment continue (*voir*, par exemple, H. LEBESGUE : *Leçons sur l'intégration*, p. 76).

Il serait facile de montrer que sur chacun de ces ensembles $\varphi(x)$ ne peut passer brusquement d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires et l'on peut établir ainsi la proposition que M. Denjoy a déduite de son *Principe de la gradation des fonctions continues* (*Annales de l'École Normale*. 1916, p. 144).

maximum de $\varphi(\xi)$ est le même dans chacun des intervalles (x_0, x'_1), (x_0, x) et (x_0, x'_2), puisque $\varphi(x'_1) = \varphi(x'_2)$. Ces deux inégalités montrent que les limites extrêmes ne peuvent être autres sur F_1 que sur le segment entier.

Il est par conséquent indifférent de considérer $\varphi(x)$ sur F_1 et F_2 seulement, ou sur tout le segment, quand il s'agit d'étudier les limites des rapports λ et μ.

On voit donc que si la dérivée de $\varphi(x)$ existe sur F_1, ou sur F_2, le rapport λ, ou le rapport μ, a une limite bien déterminée qui est cette dérivée et que cette condition est nécessaire. Mais elle est évidemment plus générale que l'existence de la dérivée sur le segment.

3. Faisons remarquer encore que les inégalités

$$\lambda(x_0, x'_1) > \lambda(x_0, x) > \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0},$$

$$\mu(x_0, x'_2) < \mu(x_0, x) < \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0},$$

qui ont lieu pour $x'_1 < x < x'_2$ et $\varphi(x)$ du type $f^+(x_0 \mid x)$, montrent immédiatement que si l'on désigne par $\overline{\lambda_0}$ et $\underline{\mu_0}$ la plus grande limite de λ et la plus petite limite de μ pour $x = x_0$, par Δ_d et δ_d les nombres dérivés à droite de la fonction $\varphi(x)$, on a

$$\Delta_d \leqq \overline{\lambda_0}, \qquad \delta_d \geqq \underline{\mu_0}.$$

Mais, sur F_1 et sur F_2, $\overline{\lambda_0}$ et $\underline{\mu_0}$ sont ce que Δ_d et δ_d sont sur le segment entier. On a donc aussi les inégalités

$$\Delta_d \geqq \overline{\lambda_0}, \qquad \delta_d \geqq \underline{\mu_0},$$

ce qui donne

$$\Delta_d = \overline{\lambda_0}, \qquad \delta_d = \underline{\mu_0}.$$

4. Si $\varphi(x)$ est l'un des autres quatre types de fonctions $f(x_0 \mid x)$, on a, avec des définitions analogues de $\lambda(x_0, x)$ et de $\mu(x_0, x)$ et par le même raisonnement, le résultat général.

Premier type $f^+(x_0 \mid x)$:

$$\overline{\lambda_0} = \limsup_{x = x_0} \frac{\max.[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x_0}^{x}}{x - x_0} = \Delta_d,$$

$$\underline{\mu_0} = \liminf_{x = x_0} \frac{\min.[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x}^{a}}{x - x_0} = \delta_d.$$

Deuxième type $f_+(x_0 \mid x)$:

$$\underline{\lambda_0} = \lim_{x=x_0} \text{inf.} \frac{\text{min.}[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x_0}^{x}}{x - x_0} = \delta_d,$$

$$\overline{\mu_0} = \lim_{x=x_0} \text{sup.} \frac{\text{max.}[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x}^{a}}{x - x_0} = \Delta_d.$$

Troisième type $f_-(x_0 \mid x)$:

$$\overline{\lambda_0} = \lim_{x=x_0} \text{sup.} \frac{\text{min.}[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x_0}^{x}}{x - x_0} = \Delta_g,$$

$$\underline{\mu_0} = \lim_{x=x_0} \text{inf.} \frac{\text{max.}[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x}^{a}}{x - x_0} = \delta_g.$$

Quatrième type $f^-(x_0 \mid x)$:

$$\underline{\lambda_0} = \lim_{x=x_0} \text{inf.} \frac{\text{max.}[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x_0}^{x}}{x - x_0} = \delta_g,$$

$$\overline{\mu^0} = \lim_{x=x_0} \text{sup.} \frac{\text{min.}[\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]_{x}^{a}}{x - x_0} = \Delta_g.$$

Les nombres dérivés des fonctions $f^+(x_0 \mid x)$ et des trois autres analogues attachés à $f(x)$ en x_0, sont les mêmes que ceux de $f(x)$. C'est en quoi consiste l'intérêt des considérations qui précèdent.

II. — Propriétés des points de première espèce de l'ensemble $f(x) = b$.

1. Pour chaque segment (r_1, r_2) dont les extrémités sont des nombres rationnels de $(0, 1)$, nous allons définir quatre fonctions *monotones :* $z(y)$, $t(y)$, $\zeta(y)$, $\tau(y)$ comme il suit :

Soit z_0 l'abscisse du point de (r_1, r_2) le plus à *gauche* de ceux qui donnent à $f(x)$ la valeur minima sur ce segment, valeur que je désignerai par $A_{r_1 r_2}$. L'ensemble

$$f(x) \leqq y,$$

où $y \geqq A_{r_1 r_2}$, contient toujours z_0, et, quand $y > A_{r_1 r_2}$, il contient toujours un segment à l'intérieur duquel est z_0. En désignant par $z(y)$ l'abscisse de l'extrémité *droite* de ce segment, quantité qui dépend évidemment de y, on a ainsi une fonction *croissante* de y définie sur le segment $(A_{r_1 r_2}, B_{r_1 r_2})$, où $B_{r_1 r_2}$ désigne le maximum de $f(x)$ dans (r_1, r_2). On a évidemment $z(A_{r_1 r_2}) = z_0$ et $f[z(y)] = y$.

Si l'on prend l'extrémité droite t_0 de l'ensemble $f(x) = A_{r_1 r_2}$, au lieu de l'extrémité gauche z_0, et l'abscisse de l'extrémité gauche $t(y)$ du segment de $f(x) \leqq y$ qui contient t_0, on aura défini de la même façon la fonction *décroissante* $t(y)$, sur $(A_{r_1 r_2}, B_{r_1 r_2})$, avec $t(A_{r_1 r_2}) = t_0$ et $f[t(y)] = y$.

Enfin, si l'on remplace, dans ce qui vient d'être dit, l'ensemble $f(x) = A_{r_1 r_2}$, par $f(x) = B_{r_1 r_2}$ et que l'on considère ainsi les segments des ensembles

$$f(x) \geqq y$$

qui contiennent ζ_0 et τ_0 respectivement, ces deux points étant l'extrémité gauche et l'extrémité droite de $f(x) = B_{r_1 r_2}$, on définira deux fonctions $\zeta(y)$ et $\tau(y)$ se réduisant à ζ_0 et τ_0 pour $y = B_{r_1 r_2}$, la première décroissante et la seconde croissante sur le segment $(A_{r_1 r_2}, B_{r_1 r_2})$ et l'on aura :

$$f[\zeta(y)] = f[\tau(y)] = y.$$

Les fonctions $z(y)$, $t(y)$, $\zeta(y)$ et $\tau(y)$ ne sont pas en général continues sur les segments où elles sont définies.

Les valeurs qu'elles prennent ne remplissent donc pas le segment (r_1, r_2) en général. J'appellerai *points* z, t, ζ et τ, les valeurs prises par l'une de ces quatre fonctions appartenant *à l'un* des segments (r_1, r_2), segments dont l'ensemble est dénombrable.

2. Nous allons montrer maintenant que *tout point de première espèce* [1] *de l'ensemble*

$$f(x) = b,$$

où b *est une valeur prise par* $f(x)$, *est un point* z, t, ζ, ou τ, si b n'est pas un point de discontinuité pour l'une des quatre fonctions $z(y)$, $t(y)$, $\zeta(y)$, $\tau(y)$.

En effet, d'un côté au moins d'un pareil point, on doit avoir $f(x) > b$, ou bien $f(x) < b$. Supposons pour fixer les idées qu'on ait à droite $f(x) > b$. Deux cas sont alors à distinguer : 1° on a au voisinage gauche de ce point $f(x) \leqq b$; 2° on a, aussi près que l'on voudra à gauche, des points où $f(x) > b$ et des points où $f(x) \leqq b$.

[1] On appelle ainsi les deux extrémités des intervalles contigus.

Dans le premier cas, il est clair que l'on peut prendre un segment (r_1, r_2) contenant le point à son intérieur et tel que, à gauche du point, dans ce segment on ait partout $f(x) \leqq b$. Pour ce segment le point considéré sera alors certainement un point z.

Dans le second cas ce sera certainement un point τ pour un segment (r_1, r_2) où l'on aurait, à droite du point, partout $f(x) > b$.

Remarquons tout de suite que les points *isolés* de $f(x) = b$, seront simultanément de deux espèces z, t, ζ ou τ.

3. Ceci étant, soit maintenant $G_{r_1 r_2}$ l'ensemble des valeurs de y, du segment $(A_{r_1 r_2}, B_{r_1 r_2})$ où l'une au moins des quatre fonctions monotones n'a pas de dérivée bilatérale finie ou infinie, ou n'est pas continue, plus les deux extremités $A_{r_1 r_2}$ et $B_{r_1 r_2}$. L'ensemble $G_{r_1 r_2}$ est de mesure nulle d'après le théorème bien connu de M. Lebesgue et puisque l'ensemble des $(r_1 r_2)$ est dénombrable.

Considérons maintenant les fonctions inverses des quatre fonctions monotones complétées par des traits horizontaux. Ces fonctions inverses sont définies sur tout (r_1, r_2) et monotones aussi.

Aux points de discontinuité de z, par exemple, correspondent des segments de la fonction inverse dont les points intérieurs ne sont pas des z de (r_1, r_2). Aux points où $z(y)$ n'a pas de dérivée finie ou infinie correspondent des points de la fonction inverse où il en est de même pour celle-ci. Les points qui correspondent à $G_{r_1 r_2}$ et qui sont des points z forment donc aussi un ensemble de mesure nulle soit, $I_{r_1 r_2}$. Les sommes G et I de tous les ensembles $G_{r_1 r_2}$ et $I_{r_1 r_2}$ relatifs à tous les segments (r_1, r_2) *sont donc aussi de mesure nulle.*

Remarquons que, par la transformation $y = f(x)$, à I correspond G, mais à G correspond, en général, un ensemble contenant I, mais qui n'est plus de mesure nulle.

Soit, maintenant, x_0 un point de première espèce de $f(x) = b$, et nous supposerons pour fixer les idées que l'on a $f(x) < b$, à gauche de x_0. Supposons de plus que b soit une valeur quelconque prise par $f(x)$, mais prise *en dehors de l'ensemble* G. On peut choisir comme nous l'avons dit plus haut (r_1, r_2) tel que si $z(y)$ est la fonction correspondant à ce segment on ait $z(b) = x_0$ (n° 2). Soit $z'(b)$ la dérivée bilatérale de $z(y)$ en b, dérivée pouvant être finie ou infinie.

On a, h étant positif,

$$z'(b) = \lim_{h=0} \frac{z(b-h) - z(b)}{-h} = \lim_{h=0} \frac{z(b+h) - z(b)}{h}.$$

Le premier rapport n'est autre que

$$\frac{1}{\mu(x_0, x)}$$

pour $f_-(x_0 | x)$ sur F_2; et le second est

$$\frac{1}{\lambda(x_0, x)}$$

pour $f^+(x_0 | x)$ sur F_1. *Ces rapports λ et μ ont donc des limites uniques λ_0 et μ_0 qui existent pour $f^+(x_0 | x)$ et pour $f_-(x_0 | x)$ respectivement, et sont égales entre elles.*

On aura donc, en x_0,

$$\Delta_d = \delta_g$$

et de même (par un raisonnement analogue) en tout point x_0 qui serait un t la même relation.

Aux points x_0 qui seraient des ζ ou des τ on aurait

$$\Delta_g = \delta_d.$$

Si l'on appelle valeur *ordinaire*, de b, toute valeur de $f(x)$ en dehors de G, on peut énoncer la proposition suivante :

En tout point de première espèce de l'ensemble $f(x) = b$, où b est une valeur ordinaire, on a $\Delta_d = \delta_g$ ou bien $\Delta_g = \delta_d$, suivant que le point est z ou t, ou bien ζ ou τ.

Et comme corollaire :

Si le point est isolé dans l'ensemble $f(x) = b$, il y existe une dérivée bilatérale finie ou infinie

En effet, il est alors simultanément ζ et t ou z et τ, puisque les points de maximum et de minimum de $f(x)$ sont dans G.

Donc si l'ensemble $f(x) = b$, avec b ordinaire, *n'est pas un ensemble parfait*, il y a certainement une dérivée bilatérale en un point de cet ensemble.

4. On peut remarquer que l'ensemble des points de première espèce pour lesquels la proposition de plus haut n'est pas valable, c'est-à-dire qui font partie d'ensembles $f(x) = b$, où b est dans G, *ces points forment un ensemble de mesure nulle*, puisqu'ils sont dans I.

L'énoncé de plus haut présente un rapport étroit avec le théorème général des nombres dérivés de M. Denjoy (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1915, p. 105), mais il a été établi en ne partant que du théorème classique de M. Lebesgue sur l'existence des dérivées d'une fonction monotone, qui est contenu comme cas particulier dans celui de M. Denjoy.

On pourrait au moyen de ce dernier théorème et de quelques considérations auxiliaires arriver à la proposition du paragraphe précédent. Mais nous allons montrer ici comment on peut, au contraire, arriver très aisément au théorème général de Denjoy en partant du résultat trouvé.

Le langage géométrique sera commode dans l'application que nous allons en faire à cet effet. Nous serons conduits ainsi à quelques renseignements complémentaires sur l'ensemble des points d'exception.

5. Considérons les points α de la courbe $y = f(x)$, où Δ_d est inférieur à ρ, nombre fixe, et la transformation

$$Y = y - \rho x, \qquad X = x.$$

Les points transformés α' auront sur la courbe transformée la même propriété; ρ étant remplacé par zéro. Ce seront donc pour la fonction $Y = f(X) - \rho X$ des points de première espèce, de sorte que ceux d'entre eux où l'on n'aura pas $\Delta_d = \delta_g$ se projetteront sur OX suivant un ensemble de mesure nulle I_ρ et sur OY suivant un autre ensemble de mesure également nulle G_ρ (proposition du n° 3). Soit b_ρ l'une des valeurs contenues dans G_ρ.

Les coordonnées Y, des points α', satisfont donc à

$$b_\rho = Y$$

et par conséquent les coordonnées (x, y) des α, à

$$b_\rho = y - \rho x.$$

On obtient donc ce résultat que *les projections des α suivant la direction de coefficient angulaire ρ forment un ensemble de mesure nulle.*

Les projections sur Ox (projections suivant la direction Oy) forment aussi un ensemble de mesure nulle d'après le n° 4.

En donnant à ρ une suite de valeurs croissant indéfiniment on obtient donc que tous les points où Δ_d est fini [1] sans que $\Delta_d = \delta_g$, ces points se projettent sur Ox suivant un ensemble de mesure nulle.

On pourra répéter le même raisonnement pour tout autre nombre dérivé fini, de sorte que l'on voit immédiatement [2] que, *si l'on excepte des points de la courbe qui se projettent sur Ox suivant un certain ensemble de mesure nulle, un nombre dérivé fini est toujours égal au nombre dérivé de nom différent et de côté opposé.*

Si les quatre nombres dérivés sont infinis sans être de signe contraire pour le même côté, ce point est nécessairement un point z, t, ζ ou τ, la fonction correspondante ayant en ce point une dérivée nulle. La fonction monotone inverse, fonction de x, y aura donc une dérivée infinie et le théorème de Lebesgue dit alors que cet ensemble est encore de mesure nulle.

Le théorème de Denjoy est donc complètement démontré, savoir : sauf sur un ensemble de mesure nulle on a l'un des cas :

1° $\Delta = \delta' = \text{fini}, \quad \Delta' = +\infty, \quad \delta = -\infty,$

2° $\Delta = \Delta' = \delta = \delta' = \text{fini},$

3° $\Delta = \Delta' = +\infty, \quad \delta = \delta' = -\infty;$

où Δ, δ et Δ', δ' désignent les nombres dérivés relatifs à l'un et à l'autre côté.

III. — Les ensembles $f(x) = b$ et les nombres dérivés de $f(x)$ aux points de cet ensemble.

1. Reprenons la fonction continue $y = f(x)$ définie sur $(0, 1)$ et

---

[1] Pour que le raisonnement soit valable, il n'est pas nécessaire que Δ_d soit fini, mais seulement que Δ_d ne soit pas $+\infty$.

[2] En prenant une suite $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ croissant indéfiniment.

soit $E_{y_1}^{y_2}$ l'ensemble des points x défini par

$$y_1 \leqq f(x) \leqq y_2.$$

Considérons la fonction

$$\psi(y) = m[E_A^y],$$

A désignant le minimum de $f(x)$ sur $(0, 1)$ et m $[E]$ la mesure de E.

La fonction $\psi(y)$ (appelée quelquefois fonction sommatoire de $f(x)$ à cause du rôle qu'elle joue dans la sommation de M. Lebesgue) est croissante. Elle admet donc, d'après le théorème de M. Lebesgue, une dérivée *finie* hors d'un ensemble d'exception de mesure nulle. Soit H cet ensemble d'exception. $\psi(y)$ est définie sur le segment (A, B), B étant le maximum de $f(x)$ dans $(0, 1)$. Si y_0 est une valeur hors de H, prise sur ce segment, je poserai

$$\frac{1}{\psi'(y_0)} = f'_{y_0} > 0,$$

$\psi'(y)$ étant la dérivée de $\psi(y)$; au point y_0 la fonction devant être continue l'ensemble $f(x) = y_0$ doit être de mesure nulle. On aura donc, h étant positif,

$$f'_{y_0} = \lim_{h=0} \frac{h}{m[E_{y_0}^{y_0+h}]} = \lim_{h=0} \frac{h}{m[E_{y_0-h}^{y_0}]}.$$

2. Soient maintenant x_0 un point de l'ensemble $f(x) = y_0$ et $\sigma_{x_0 h}$ la partie à droite de x_0 du segment de $E_{y_0}^{y_0+h}$ qui contient x_0. Si $f^+(x_0|x) \neq 0$ au voisinage de x_0, on a

$$\limsup_{h=0} \frac{h}{m[\sigma_{x_0 h}]} = \overline{\lambda_0} = \Delta_d,$$

$\overline{\lambda_0}$ étant la limite supérieure (plus grande limite) du $\lambda(x_0, x)$ relatif à $f^+(x_0|x)$, d'après ce qui a été dit aux n^{os} **1** et **3** (section I). Donc

$$\Delta_d = \limsup_{h=0} \frac{m[E_{y_0}^{y_0+h}]}{m[\sigma_{x_0 h}]} \cdot \frac{h}{m[E_{y_0}^{y_0+h}]} = f'_{y_0} \limsup_{h=0} \frac{m[E_{y_0}^{y_0+h}]}{m[\sigma_{x_0 h}]}.$$

Comme $\sigma_{x_0 h}$ n'est qu'une partie de $E_{y_0}^{y_0+h}$, *on a*

$$\Delta_d \geqq f'_{y_0} > 0$$

pour tout y_0 *hors de* H *et où* $f^+(x_0|x) \neq 0$.

Il en sera de même de $|\delta_d|$, si $f_+(x_0|x) \neq 0$, et des deux autres nombres dérivés dans les conditions analogues.

Comme f^+ et f_+ ne peuvent être nuls tous deux sans que $\psi(y)$ ne soit discontinue pour y_0 (donc y_0 dans H), on voit que les deux nombres dérivés ne peuvent être nuls d'un même côté que si y_0 est pris dans H, c'est-à-dire pour des valeurs y_0 formant un ensemble de mesure nulle.

3. Si à l'ensemble H on ajoute l'ensemble G de la section précédente, on peut montrer que les points où *un* nombre dérivé est nul se projettent sur Oy suivant un ensemble de mesure nulle ([1]).

Supposons en effet, pour fixer les idées, $\Delta_d = 0$ en x_0. Deux cas sont à distinguer : 1° on a à droite de x_0, et à son voisinage, $f(x) < f(x_0)$. Alors, si au voisinage gauche de x_0, on a $f(x) \leqq f(x_0)$, y_0 est dans G; sinon, le point x_0 est un point t (section II, n° 2) et puisque l'on a $\Delta_d = \delta_g = 0$, la fonction $f^-(x_0|x)$ doit avoir une dérivée nulle à gauche de x_0, ce qui implique que y_0 soit dans H; 2° aussi près que l'on veut de x_0, et à sa droite, on a des points où $f(x) \geqq f(x_0)$. Alors, si pour tous ces points on a $f(x) = f(x_0)$, y_0 est dans G; sinon, $f^+(x_0|x)$ a une dérivée nulle à droite, donc y_0 est dans H.

Les raisonnements seraient tout semblables si au lieu de Δ_d on avait Δ_g, δ_d ou δ_g zéro.

4. Considérons maintenant l'ensemble

$$f(x) = b,$$

où b est une valeur prise hors de G et de H.

Envisageons, en chaque point a de cet ensemble, un nombre dérivé D de $f(x)$ satisfaisant à la condition suivante : Le nombre dérivé du même côté est de signe opposé à celui de D; ou bien s'il est du même signe il est, au plus, en valeur absolue, égal à D. Je dis que *si les* D *sont bornés dans l'ensemble* $f(x) = b$, *celui-ci n'a qu'un nombre fini de points.*

([1]) Cette propriété a été donnée récemment par M. Saks par une voie tout à fait différente (*Fundamenta Mathematicæ*, t. 6, 1924, p. 111). Dans sa Thèse (*Intégrale et série trigonométrique*, Moscou 1915), M. Lusin avait établi cette proposition pour le cas d'une dérivée nulle.

On a d'abord

$$|D| = f'_b \limsup_{h=0} \frac{m[E_b^{b\pm h}]}{m[\sigma_{a,h}]} \qquad (\text{où } E_b^{b-h} = E_{b-h}^b),$$

où $\sigma_{a,h}$ désigne la partie à droite ou à gauche de a, du segment de $E_b^{b\pm h}$ qui contient a, suivant qu'il s'agit d'un nombre dérivé à droite ou à gauche; le signe à prendre devant h étant $+$ pour Δ_d et δ_g et $-$ pour Δ_g et δ_d.

Soit p_a la plus petite limite, pour $h = 0$, de $\frac{m(\sigma_{a,h})}{m(E_h^{b\pm h})}$.

L'égalité ci-dessus devient

$$|D| = \frac{f'_b}{p_a} \leqq M,$$

si M est la borne supérieure de $|D|$ aux points a; on a donc

$$p_a \geqq \frac{f'_b}{M} = N > 0.$$

Envisageons maintenant n points a. n ne peut dépasser un certain nombre. En effet, pour chacun de ces points, soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on aura

$$p_{a_i} \geqq N \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si donc h est pris assez petit il faudra que l'on ait

$$\frac{m[\sigma_{a_i h}]}{m[E_h^{b\pm h}]} > \frac{N}{2}.$$

Mais on peut encore prendre h assez petit pour que les n segments $\sigma_{a_i h}$ soient distincts l'un de l'autre, car $f(x) = b$ ne peut contenir de segment (ses points auraient des dérivées nulles). On a donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} m[\sigma_{a_i h}] > \frac{nN}{2} m[E_h^{b\pm h}]$$

et l'on voit que $\frac{nN}{2} \leqq 1$, puisque les $\sigma_{a_i h}$ font partie de $E_h^{b\pm h}$. Donc, puisque $N > 0$, n est inférieur à un nombre fini. L'ensemble $f(x) = b$ est donc fini, en particulier, si d'un côté (qui peut varier d'un point à l'autre) les *deux* nombres dérivés sont bornés sur l'ensemble.

5. Si D est seulement *fini*, on peut considérer successivement les points où $|D|$ est inférieur à $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$, suite indéfiniment croissante, et l'on voit que l'ensemble des points a est, alors, dénombrable. Donc :

Si en chaque point de l'ensemble $f(x) = b$, *il existe un nombre dérivé* D *qui est fini, l'ensemble est dénombrable.*

En particulier, il en sera ainsi, si les nombres dérivés d'un côté sont finis en chaque point de l'ensemble.

6. On peut aller plus loin, si l'on tient compte de ce que b est pris hors de G, et que l'on fait usage de la proposition établie au n° 3 de la section précédente : les ensembles dénombrables et fermés ayant nécessairement une infinité de points isolés, $f(x)$ *a une dérivée bilatérale, en une infinité de points, si les nombres dérivés de* $f(x)$ *sont finis, d'un côté, aux points de* $f(x) = b$. On remarque l'analogie de cette proposition avec la suivante, démontrée d'abord par M. Montel (*Comptes rendus*, t. 155, 1912) et qui résulte aussi du théorème général de M. Denjoy sur les nombres dérivés des fonctions continues (*Journal de Mathématiques*, 1915, p. 188). Savoir si une fonction continue a ses nombres dérivés finis, d'un côté, elle admet une dérivée, « presque partout ».