Bulletin de la S. M. F.

Luigi Fantappiè

Le énième nombre premier comme valeur asymptotique d'une fonction déduite de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 226-234

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__226_0>

LE $n^{\text{ième}}$ NOMBRE PREMIER COMME VALEUR ASYMPTOTIQUE D'UNE FONCTION DÉDUITE DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN;

PAR M. LUIGI FANTAPPIÈ.

1. Avant de passer à la recherche des fonctions $\psi_n(s)$ telles que

$$p_n = \lim_{s \to \infty} \psi_n(s)$$

(où avec p_n nous entendons le $n^{\text{ième}}$ nombre premier) nous exposerons une méthode générale pour le calcul des constantes de certaines séries de Dirichlet; et dans les n^os^ 3 et suivants nous appliquerons cette méthode à la construction des dites fonctions $\psi_n(s)$.

Soit donc donnée une série de Dirichlet qui représente, pour $R(s) > s_0$, une fonction $f(s)$ holomorphe dans ce demi plan, c'est-à-dire

$$(1) \qquad f(s) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{c_n^s} = \sum_1^\infty \frac{a_n}{e^{\lambda_n s}},$$

$$(2) \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots.$$

Il est bien connu, d'après Riemann [1] et Kronecker [2], que non seulement les suites des constantes a_n et λ_n déterminent $f(s)$, mais qu'aussi $f(s)$ détermine complètement les constantes a_n et λ_n. Si en effet nous posons

$$(3) \qquad \Phi(w) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s) \frac{e^{ws}}{s} ds \qquad R(a) > s_0,$$

il est aisé de voir que les λ_n sont les points de discontinuité de cette fonction de w (qui reste constante à l'intérieur de chaque intervalle $\lambda_n < w < \lambda_{n+1}$) et les a_n sont les accroissements de $\Phi(w)$ lorsque w surpasse les points λ_n de discontinuité.

M. Cahen [3] dans sa Thése, et plus rigoureusement MM. Hada-

---

(1) B. RIEMANN, *Werke* (trad. Laugel), p. 171.

(2) KRONECKER, *Monatsber, d. Akad. Berlin*, 1878, p. 53.

(3) E. CAHEN, *Thèse*, (*Ann. Ec. Norm.*, 3^e^ série, t. XI, 1894, p. 75.

mard [1] et Perron [2] ont en plus démontré que ces propriétés de la fonction $\Phi(w)$, complétées convenablement, expriment des conditions nécessaires et suffisantes pour que $f(s)$ soit développable en série de Dirichlet.

2. Bien que l'intégrale du second membre de (3) ait une si grande importance, on se trouverait un peu embarrassé si l'on voulait calculer effectivement, au moyen de cette intégrale, les constantes λ_n et a_n quand $f(s)$ est donnée. Il me semble donc utile d'exposer une autre méthode pour la détermination des constantes λ_n, méthode qui a en plus l'avantage de ne considérer que des valeurs de $f(s)$ pour s réel.

Pour s réel très grand le premier terme de la série (1) est pour (2), le terme principal, et on peut calculer immédiatement λ_1 ou $c_1 = e^{\lambda_1}$. On aura en effet, pour (2)

$$\lambda_1 = -\lim_{s \to \infty} \frac{f'(s)}{f(s)} \tag{4}$$

et aussi

$$e^{\lambda_1} = c_1 = \lim_{s \to \infty} f(s)^{-\frac{1}{s}}, \tag{5}$$

$$a_1 = \lim_{s \to \infty} e^{\lambda_1 s} f(s). \tag{6}$$

En appliquant ces formules (4, 5, 6) non plus à la fonction $f(s)$ mais à $f_1(s) = f(s) - \frac{a_1}{e^{\lambda_1 s}}$, on pourrait déterminer λ_2 et a_2 et ainsi de suite λ_n et a_n; mais on voit que pour le calcul de λ_n avec cette méthode, il serait nécessaire d'exécuter successivement $2n - 1$ passages à la limite. Cependant nous démontrerons que dans le cas où l'on sait préalablement que toutes les a_n sont égales à l'unité, ou au moins jusqu'à un indice m tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 c_2 \ldots c_n < c_1^{n-1} c_{m+1}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n < (n-1)\lambda_1 + \lambda_{m+1}, \end{array} \right. \tag{7}$$

il est encore possible d'avoir λ_n ou c_n avec un seul passage à la

---

[1] J. HADAMARD, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, t. XXV, 1908, p. 326 et 395.
[2] O. PERRON, *Journ. reine u. Angew. Math.*, t. CXXXIV, 1908, p. 95.

limite. Et en effet nous aurons, dans ce cas,

$$f(hs)=\sum_{1}^{m}{}_{r}\left(\frac{1}{e^{\lambda_r s}}\right)^h+\sum_{m+1}^{\infty}{}_{t}\frac{a_t}{e^{\lambda_t' hs}}$$

et, si nous indiquons avec $\bar{f}(hs)$ et $\eta(hs)$ respectivement la première et la deuxième somme

$$f(hs)=\bar{f}(hs)+\eta(hs), \tag{8}$$

$\bar{f}(hs)$ représente donc la somme des $h^{\text{ièmes}}$ puissances des m nombres

$$\frac{1}{e^{\lambda_1 s}},\quad \frac{1}{e^{\lambda_2 s}},\quad \ldots,\quad \frac{1}{e^{\lambda_m s}}.$$

S'il était possible de connaître $\bar{f}(s), \bar{f}(2s), \ldots, \bar{f}(ns)$, on pourrait connaître, en appliquant les formules de Waring [1], la somme $\bar{\Pi}_n(s)$ des produits n à n de ces nombres; on aurait en effet

$$\bar{\Pi}_n(s)=\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{(-1)^{n-r}}{r!}\mathop{\mathrm{S}}_{n}^{r}\frac{\bar{f}(h_1 s)}{h_1}\,\frac{\bar{f}(h_2 s)}{h_2}\cdots\frac{\bar{f}(h_r s)}{h_r}, \tag{9}$$

où par $\mathop{\mathrm{S}}\limits_{n}^{r}$ nous entendons que la somme doit être étendue à tous les produits de r facteurs des n nombres $\frac{\bar{f}(hs)}{h}$ $(h=1, 2, \ldots, n)$ pour lesquels on a

$$h_1+h_2+\ldots+h_r=n.$$

Si nous appliquons la formule (9) à $f(s)$ au lieu de $\bar{f}(s)$, nous aurons une nouvelle fonction $\Pi_n(s)$

$$\Pi_n(s)=\sum_{1}^{n}{}_{r}\frac{(-1)^{n-r}}{r!}\mathop{\mathrm{S}}_{n}^{r}\frac{f(i_1 s)}{i_1}\,\frac{f(i_2 s)}{i_2}\cdots\frac{f(i_r s)}{i_r} \tag{10}$$

et en substituant à $f(s)$ son expression donné par (8)

$$\Pi_n(s)=\bar{\Pi}_n(s)+H_n(s), \tag{11}$$

où $H_n(s)$ sera une somme d'expressions analogues à (9), mais

---

[1] V Cesaro, *Lehrbuch der Algebraischen Analysis* (Leipzig, Teubner, 1904).

dans lesquelles quelque $\overline{f}(i_k s)$ sera remplacée par $\eta(i_k s)$. Nous observons cependant que la série de Dirichlet $\Pi_n(s)$, somme de $\overline{\Pi}_n(s)$ et $H_n(s)$, contiendra certainement le terme

$$\alpha(s) = \frac{1}{e^{s(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}},$$

produit des n premiers termes de $\overline{f}(s)$, dont la valeur $\frac{1}{(c_1 c_2 \ldots c_n)^s}$ sera, pour (2), la plus grande de celle de tous les autres termes de $\overline{\Pi}_n(s)$ et aussi de $H_n(s)$, puisque dans cette série, somme d'expressions analogues à (9), mais dans lesquelles certaines $\overline{f}(i_k s)$ sont remplacées par les $\eta(i_k s)$ des mêmes arguments, les produits $c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_n}$ qui y apparaissent devront contenir au moins un facteur c_{i_r} d'indice $i_r > m$, et comme on a, pour (7),

$$c_1 c_2 \ldots c_n < c_1^{n-1} c_{m+1},$$

on aura *a fortiori*, pour (2),

$$c_1 c_2 \ldots c_n < c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_n}.$$

Nous voyons donc, en définitive, que dans la série de Dirichlet $\Pi_n(s)$ le premier terme, c'est-à-dire le terme principal pour s très grand, sera certainement $\alpha(s) = \frac{1}{e^{s(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}}$. Cela suffit pour pouvoir appliquer à la fonction $\Pi_n(s)$ la méthode exposée au n° 2, nous aurons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = -\lim_{s \to \infty} \frac{\Pi'_n(s)}{\Pi_n(s)} \tag{12}$$

ou bien

$$c_1 c_2 \ldots c_n = \lim_{s \to \infty} [\Pi_n(s)]^{-\frac{1}{s}}. \tag{13}$$

Mais si l'on a $c_1^{n-1} c_{m+1} > c_1 c_2 \ldots c_n$, on aura *a fortiori*, pour (2), $c_1^{n-2} c_{m+1} > c_1 c_2 \ldots c_{n-1}$, et pour la série $\Pi_{n-1}(s)$

$$\Pi_{n-1}(s) = \sum_1^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-r}}{r!} \mathop{\mathrm{S}}_{n-1}^{r} \frac{f(i_1 s)}{i_1} \frac{f(i_2 s)}{i_2} \cdots \frac{f(i_r s)}{i_r}$$

$$(i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n-1),$$

nous aurons alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} = -\lim_{s \to \infty} \frac{\Pi'_{n-1}(s)}{(s)\Pi_{n-1}}$$

ou bien

$$c_1 c_2 \ldots c_{n-1} = \lim_{s \to \infty} [\Pi_{n-1}(s)]^{-\frac{1}{s}},$$

d'où nous tirons, avec (12) et (13),

$$(14) \qquad \lambda_n = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{\Pi'_{n-1}(s)}{\Pi_{n-1}(s)} - \frac{\Pi'_n(s)}{\Pi_n(s)} \right],$$

$$(15) \qquad c_n = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{\Pi_{n-1}(s)}{\Pi_n(s)} \right]^{\frac{1}{s}}.$$

Dans notre hypothèse (7), nous avons donc vu comment il est possible de calculer λ_n ou c_n avec un seul passage à la limite.

3. Passons maintenant à l'application de ces résultats à la théorie des nombres premiers. Les questions de la théorie des nombres premiers peuvent se grouper autour de deux problèmes centraux, l'un inverse de l'autre. Le premier, qui a été le plus profondément traité jusqu'ici, est celui de la détermination du nombre $\pi(x)$ des nombres premiers inférieurs à un nombre donné x. Pour ce qui se rapporte à la valeur asymptotique de $\pi(x)$, le résultat de M. Hadamard exprimé par

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\Pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

est fondamental, tandis que pour la détermination exacte de $\pi(x)$ il existe un quantité de formules pour lesquelles je renvoie à la bibliographie du Livre de M. Landau [1].

Puisqu'on a $n = \Pi(p_n)$, en indiquant par p_n le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, cette fonction $\pi(x)$ résout donc le problème de trouver le numéro d'ordre d'un nombre premier donné. Inversement nous nous proposons de traiter l'autre problème, c'est-à-dire *d'exprimer le $n^{\text{ième}}$ nombre premier en fonction* de son numéro d'ordre. Dans cet ordre de recherches, nous mentionnerons l'expression asymptotique citée par M. Landau (*loc. cit.*, vol. I, p. 214)

$$p_n = n \log n (1 + \varepsilon_n),$$

(1) E. LANDAU, *Die Vertheilung der Primzahlen* (Leipzig, Teubner, 1909).

où $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, l'expression de M. Cesaro [1], et l'autre plus précise de M. Cipolla [2]. Nous verrons qu'il est possible de donner une *expression exacte* de p_n en fonction de son numéro d'ordre, au moyen de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, en utilisant non plus la distribution de ses racines complexes, mais la façon dont elle se comporte pour s réel et croissant à l'infini.

4. Nous avons déjà vu au n° 2 comment on peut connaître, avec un seul passage à la limite, la constante c_n d'une série de Dirichlet

$$(1) \qquad f(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{a_n}{c_n^s}$$

toutes les fois qu'on a $a_1 = a_2 = \ldots = a_m \ldots = 1$. Or (*voir* Landau, *loc. cit.*, vol. I, p. 128)

$$(2) \qquad \log \zeta(t) = \sum_{1}^{\infty}{}_{mr} \frac{1}{r p_m^{rs}},$$

où par $\log \zeta(s)$ (pour s réel et > 1) nous entendons la détermination réelle du logarithme. Si nous posons

$$(3) \qquad \eta(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{p_n^s}$$

(série de Dirichlet absolument et uniformément convergente pour $s \geq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$), on aura donc

$$(4) \qquad \log \zeta(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{1}{r} \eta(rs)$$

et inversement [3]

$$(5) \qquad \eta(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(ns)$$

où $\mu(1) = 1$, et en général où $\mu(n)$ est la fonction arithmétique

---

[1] CESARO, *Sur une formule empirique de M. Pervouchine; C. R. Acad. Sc.*, t. CXIX, 1894, p. 848.

[2] CIPOLLA, *La determinazione assintotica dell'n^{esimo} numero primo; Acc. di Napoli*, 3e série, t. VIII, 1902, p. 132.

[3] W. SCHEIBNER, *Zeitsch. Math. Phys.*, t. V, 1860, p. 236.

qui prend la valeur o pour n égal à un nombre entier de la forme générale $n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \ldots p_{i_r}^{\alpha_r}$ l'un au moins des exposants $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ étant plus grand que l'unité, quand tous les α sont égaux à l'unité $\mu(n)$ prend la valeur ± 1 suivant que r est pair ou impair. Comme dans la série de Dirichlet (3), qui représente cette fonction $\eta(s)$, tous les coefficients a_n sont égaux à l'unité, nous pourrons alors appliquer à cette série la formule (15) du n° **2**, et nous aurons

$$(6) \qquad p_n = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{\Pi_{n-1}(s)}{\Pi_n(s)} \right]^{\frac{1}{s}},$$

où

$$\Pi_n(s) = \sum_1^n {}_r \frac{(-1)^{n-r}}{r!} \mathop{S}_n^r \frac{\eta(i_1 s)}{i_1} \frac{\eta(i_2 s)}{i_2} \cdots \frac{\eta(i_r s)}{i_r}$$
$$(i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n)$$

et

$$\Pi_{n-1}(s) = \sum_1^{n-1} {}_r \frac{(-1)^{n-r-1}}{r!} \mathop{S}_{n-1}^r \frac{\eta(i_1 s)}{i_1} \frac{\eta(i_2 s)}{i_2} \cdots \frac{\eta(i_r s)}{i_r}$$
$$(i_1 + i_2 + \ldots + i_r = n - 1).$$

Nous avons ainsi *exprimé exactement le $n^{\text{ième}}$ nombre premier comme la limite d'une expression contenant la η des divers arguments s, $2s$, ..., ns.*

5. Toutefois pour tirer de la $\zeta(s)$ la fonction $\eta(s)$, qui entre dans les formules précédentes (fonction qui du reste apparaît aussi dans la méthode de Riemann pour la détermination du nombre $\Pi(x)$ des nombres premiers $\leq x$ (¹) nous devrions calculer les valeurs successives de $\mu(n)$. Mais nous pouvons observer que, pour le calcul de p_n, il ne nous est pas nécessaire de connaître

(¹) On a en effet

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(ns) \right] \frac{x^s}{s} ds$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\eta(s) x^s}{s} ds \qquad (a > 1),$$

$\eta(s)$, car une autre fonction $\eta_n(s)$, représentée par une série de Dirichlet qui aurait seulement les m premiers termes égaux à ceux de $\eta(s)$, servirait également bien, pourvu que m soit un entier $> n$ et tel que

$$(7) \qquad p_1 p_2 \dots p_n < p_1^{n-1} c_{m+1}.$$

Une telle fonction nous est donnée par l'expression

$$(8) \quad \eta_n(s) = \log \zeta(s) - \sum_{2}^{k}{}_{r_1} \frac{1}{r_1} \log \zeta(r_1 s) + \sum_{2}^{k}{}_{r_1 r_2} \frac{1}{r_1 r_2} \log \zeta(r_1 r_2 s) - \dots$$
$$+ (-1)^n \sum_{2}^{k}{}_{r_1 \dots r_n} \frac{1}{r_1 \dots r_n} \log \zeta(r_1 \dots r_n s),$$

où $k = \frac{n(n-1)}{2}$. Et en effet il serait facile de vérifier, en tenant compte de (4), que la fonction $H_n(s)$ donnée par

$$(9) \qquad \eta_n(s) = \eta(s) + H_n(s)$$

est représentée par une série de Dirichlet dont le premier terme, c'est-à-dire celui de dénominateur minimum, a ce dénominateur égal à $2^{(k+1)s}$; $\eta_n(s)$ aura donc toutes ses constantes a_n égales à celles de $\eta(s)$, c'est-à-dire à l'unité, jusqu'à un certain indice m, et la première constante a_{m+1} différente de l'unité devra appartenir à un terme $\frac{a_{m+1}}{c_{m+1}^s}$ qui sera aussi pour (9), avec le même dénominateur, en $H_n(s)$. Mais le plus petit des dénominateurs de $H_n(s)$ est $2^{(k+1)s}$, donc

$$(10) \qquad 2^{k+1} \leqq c_{m+1}$$

et comme on a

$$p_1 = 2, \quad p_2 < 2^2, \quad \dots \quad p_n < 2^n \qquad \text{(pour le postulat de Bertrand)},$$
$$k = \frac{n(n-1)}{2},$$

il viendra :

$$p_1 p_2 \dots p_n < 2^{\frac{n(n+1)}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2} + 1 + n - 1} = p_1^{n-1} \cdot 2^{k+1}$$

et, à cause de (10),

$$p_1 p_2 \ldots p_n < p_1^{n-1} c_{m+1}.$$

Nous pourrons alors appliquer la méthode déjà exposée, et nous aurons encore

$$(11)\qquad \Pi_{n-1}^{\star}(s) = \sum_{1}^{n-1}{}_r \frac{(-1)^{n-r-1}}{r!} \mathop{\mathbf{S}}_{n-1}^{r} \frac{\eta_n(i_1 s)}{i_1} \frac{\eta_n(i_2 s)}{i_2} \cdots \frac{\eta_n(i_r s)}{i_r},$$

$$(12)\qquad \Pi_{n}^{\star}(s) = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{(-1)^{n-r}}{r!} \mathop{\mathbf{S}}_{n}^{r} \frac{\eta_n(i_1 s)}{i_1} \frac{\eta_n(i_2 s)}{i_2} \cdots \frac{\eta_n(i_r s)}{i_r}.$$

En posant

$$\psi_n(s) = \left[\frac{\Pi_{n-1}^{\star}(s)}{\Pi_n^{\star}(s)}\right]^{\frac{1}{s}}$$

nous voyons que ces fonctions $\psi_n(s)$, construites au moyen de $\eta_n(s)$ comme il est indiqué par (11) et (12) [et $\eta_n(s)$ est à son tour construite comme il est indiqué par (8) au moyen de $\log\zeta(s)$], *auront pour limite, pour s réel et croissant à l'infini*, précisément le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, c'est-à-dire

$$\lim_{s\to\infty} \psi_n(s) = \lim_{s\to\infty} \left[\frac{\Pi_{n-1}^{\star}(s)}{\Pi_n^{\star}(s)}\right]^{\frac{1}{s}} = p_n.$$

Nous pouvons observer que, pour $n > 1$, p est un entier impair; il sera donc complètement déterminé lorsqu'on aura pu trouver une valeur $\bar{s}$ suffisamment grande pour laquelle on sait que $\psi_n(\bar{s})$ diffère de la limite de moins que l'unité.

Il est aussi à remarquer que dans l'expression de $\psi_n(s)$, si compliquée qu'elle soit, il n'y a pas cependant d'expressions infinies (séries, produits infinis, etc.) car $\psi_n(s)$ n'est au fond que *la puissance d'exposant $\frac{1}{s}$ d'une fonction rationnelle de différentes valeurs de la fonction* $\log\zeta(s)$.