

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur les fonctions entières d'ordre nul et les équations différentielles

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 34-42

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__34_1

© Bulletin de la S. M. F., 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE NUL
ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;**

PAR M. GEORGES VALIRON.

J'ai montré dans une note récente ⁽¹⁾ que la théorie des fonctions elliptiques paires ou, ce qui est équivalent, des fonctions invariantes par les substitutions (z, kz) et $(z, \frac{1}{z})$, conduit à un exemple très simple de fonction entière d'ordre nul qui est solution d'une équation différentielle algébrique du troisième ordre. L'examen des propriétés de la dérivée logarithmique $H(z)$ de la fonction entière $f(z)$ et de $H'(z)$ m'avait amené à énoncer ce résultat : $M(r)$ désignant le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$, les fonctions pour lesquelles le rapport

$$\log M(r) : (\log r)^2$$

reste borné ne peuvent être solutions d'aucune équation différentielle algébrique du second ordre. Mais en réalité j'avais cru pouvoir étendre à toutes les fonctions une propriété qui n'appartient peut-être qu'à celles dont les zéros sont distribués très régulièrement. Le résultat que je démontre ici ne s'applique qu'à une

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. 180, 1925, p. 571.

classe de fonctions plus restreinte, celles pour lesquelles on a

$$(1) \quad \frac{\log M(r)}{(\log r)(\log_2 r)} < \frac{1}{\log 4}.$$

La proposition découle d'une propriété de la fonction $[zH(z)]'$ qui me semble assez remarquable, car elle montre que l'analogie que l'on est habitué à rencontrer entre les propriétés des fonctions entières à croissance très lente et les propriétés des polynomes peut cesser dans certains cas.

1. Soit $r_k \dots r_n \dots$ la suite des modules des zéros non nuls de la fonction entière $f(z)$. Nous nous bornerons dans tout ce qui suit aux fonctions pour lesquelles on a

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log r_n} = 0.$$

Cette condition imposée aux r_n peut être remplacée par une condition relative à la croissance de $\log M(r)$. On remarque d'abord que dire que la condition (2) est réalisée revient à dire que

$$n \log_2 r_n : \log r_n$$

tend vers zéro et l'on s'appuie sur ce que, pour les fonctions d'ordre nul de cette espèce, $\log M(r)$ est asymptotiquement égal à l'expression

$$\log \frac{r^n}{r_k r_{k+1} \dots r_n} \quad (r_n \leq r < r_{n+1}) \quad (1).$$

On voit ainsi que la condition nécessaire et suffisante pour que les zéros vérifient l'égalité (2) est que l'on ait

$$(3) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{(\log r)^2} \log_2 r = 0.$$

Considérons donc une fonction vérifiant les conditions équivalentes (2) ou (3). Marquons dans un système de coordonnées Oxy les points A_n ($n = k, k+1, \dots$) de coordonnées $(n \log n, \log r_n)$; eu égard à la propriété (2), la pente de la droite OA_n a pour limite

(1) Voir par exemple mes *Lectures on the general theory of integral functions*, th. XXXVIII, p. 136.

l'infini. On peut donc construire un polygone de Newton π , convexe vers les y négatifs, ayant pour sommets certains des points A_n (en nombre infini) et laissant les autres au-dessus de ses côtés ou sur ses côtés; la pente des côtés de π va en croissant et tend vers l'infini. Si A_n est un sommet de π et u_n la pente de π à droite de ce sommet, on a

$$\log r_{n+p} \geq \log r_n + pu_n \log n \quad (p = 1, 2, \dots),$$

donc *a fortiori*

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{r_m} < \frac{1}{r_n} \frac{1}{n^{u_n-1}}.$$

Nous allons en déduire une valeur approchée de la dérivée logarithmique $H(z)$ de $f(z)$ dans les couronnes C_n d'équations

$$(4) \quad r_n h \leq r = |z| \leq r_n n^{\frac{1}{2}u_n}.$$

où h désigne un nombre donné indépendant de n et supérieur à 1. Nous écrirons $H(z)$ sous la forme

$$H(z) = \frac{k-1}{z} + \sum_k^n \frac{1}{z-a_m} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{z-a_m}.$$

Dans la seconde somme $|z - a_m|$ est supérieur à

$$r_m \left(1 - n^{-\frac{1}{2}u_n}\right),$$

tandis que dans la première $z - a_m$ est égal à $z \left(1 + \frac{\theta}{h}\right)$ avec $|\theta|$ inférieur ou égal à 1, ce qui montre que, *en tout point de la couronne C_n on a*

$$(5) \quad H(z) = \frac{n}{z} \left(1 + \frac{\theta}{h-1}\right) + \frac{\varepsilon(z)}{z}$$

avec

$$|\theta| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(z) = o(1).$$

(¹) L'égalité (5) reste valable même pour des fonctions ne vérifiant pas la condition (3). [Voir ma note *Sur la dérivée logarithmique de certaines fonctions entières* (Nouv. Ann., t. XI, 1911.)]

2. Remarquons de suite que cette égalité (5) fournit une valeur asymptotique de $\log |f(z)|$ dans la couronne C_n . En intégrant $H(z)dz$ sur une circonférence $|z| = r$ de C_n , on obtient en effet

$$\log |f(z)| > \log M(r) - \pi \frac{h+1}{h-1} n;$$

mais il est bien connu que $\log M(r)$ croît plus vite que $\log r$, donc en tenant compte de l'égalité (2) on voit que le rapport

$$\log |f(z)| : \log M(r) \quad (|z| = r),$$

tend vers 1 lorsque le point z s'éloigne indéfiniment dans les couronnes C_n . Cette proposition est un cas particulier d'une proposition générale (1), nous en retiendrons cette conséquence : *quelque grand que soit le nombre donné k , $|f(z)|$ est supérieur à r^k dans les couronnes C_n de rang suffisamment élevé.*

3. Nous chercherons maintenant une valeur approchée de la dérivée $G(z)$ de $zH(z)$ en certains points des couronnes C_n , c'est en vue de cette recherche que nous avons introduit l'hypothèse (2). On a

$$-G(z) = \sum_k \frac{\alpha_m}{(z - a_m)^2}.$$

Nous supposons z compris dans la portion C'_n de C_n dans laquelle

$$r > r_n n^{\frac{1}{2}u_n}$$

D'après le calcul fait plus haut, la somme des termes de $G(z)$ de rang supérieur à n , est inférieure à

$$\frac{2}{r} \frac{n^{\frac{u_n}{2}}}{n^{u_n-1}},$$

tandis que, pour $n > n_0$, la somme des n premiers termes est moindre que

$$\frac{2nr_n}{r^2} < \frac{2n}{n^{\frac{1}{2}u_n}} \frac{1}{r},$$

(1) Voir la note de la page 35.

ce qui montre que, en tout point de C'_n , on a

$$(6) \quad |z G(z)| < n^{-\frac{1}{2}} n^n.$$

Une limitation inférieure de $z G(z)$ sera donnée par le développement de Laurent. On a

$$-z G(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_q}{z^q}$$

avec

$$b_q = q \sum_k^n (a_p)^q \quad (q = 1, 2, \dots),$$

$$b_0 = 0,$$

$$b_{-q} = q \sum_{n+1}^{\infty} (a_p)^{-q} \quad (q = 1, 2, \dots).$$

Les relations bien connues de Cauchy entre les coefficients et la valeur moyenne de $z G(z)$, montrent que sur chaque circonférence $|z| = r$ de la couronne on peut trouver un point au moins en lequel on a

$$(7) \quad |z G(z)| > |b_q| \frac{1}{r^q},$$

quel que soit l'entier positif q .

4. Pour tirer un résultat intéressant de l'inégalité (7), nous utiliserons une proposition connue sur les approximations simultanées (1) qui permet d'assurer que, à chaque valeur de n correspond un nombre q inférieur ou égal à γ^n pour lequel tous les termes de b_q ont un de leurs arguments inférieur en valeur absolue à $\frac{2\pi}{\gamma}$. En supposant γ supérieur à 4, le second membre de (7) sera supérieur à

$$qc \left(\frac{r_n}{r} \right)^q,$$

c étant une constante qui dépend de γ . Le premier membre de (7) sera donc *a fortiori* supérieur au nombre obtenu en remplaçant q

1) Voir, par exemple, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, p. 241-243.

par γ^n et, l'on voit qu'en un point de la circonférence $r = h' r_n$ on aura

$$|z G(z)| > c \gamma^n (h')^{-\gamma^n}.$$

Le second membre de cette inégalité sera supérieur à $r^{-\varepsilon_n}$, ε_n tendant vers zéro lorsque n croît indéfiniment pourvu que

$$(8) \quad \overline{\lim}_{n=\infty} \frac{n}{\log_2 r_n} < \frac{1}{\log 4}.$$

Nous supposons que cette dernière inégalité est vérifiée lorsque n parcourt la suite complète des entiers positifs; la méthode indiquée au n° 1 montre que, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\log M(r)$ vérifie la condition (1). Pour les fonctions vérifiant cette condition, on peut donc trouver dans la couronne C_n un point en lequel

$$|z G(z)| > \frac{1}{r^{\varepsilon_n}} \quad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

En joignant ce point à un point de la couronne C'_n par une ligne continue intérieure à C_n , on trouvera un point au moins en lequel on aura à la fois une limitation dans les deux sens pour $|z G(z)|$ et en groupant les divers résultats obtenus, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante :

1. *La fonction $f(z)$ vérifiant la condition (1) et le nombre k arbitrairement grand étant donnés, il existe un point z dans chaque couronne C_n de rang suffisamment grand en lequel on a simultanément les inégalités*

$$|f(z)| > r^k, \quad \left| \frac{z H(z)}{n} - 1 \right| < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{r^{\varepsilon_n}} < |z G(z)| < \frac{1}{n^k},$$

ε_n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment et n est inférieur à $\log r$.

5. Une équation différentielle algébrique du second ordre, supposée vérifiée par la fonction entière $f(z)$, peut s'écrire sous la

forme

$$\sum A_{p,q,s} |z H(z)|^p |z G(z)|^q z^s = \frac{1}{f(z)} P \left| z, H(z), G(z), \frac{1}{f(z)} \right|,$$

$P(u, v, w, t)$ étant un polynome d'un certain degré μ . En un point z vérifiant les conditions de l'énoncé I, le second membre de cette équation sera inférieur à $r^{-k+\mu+1}$ tandis que le terme mis en évidence dans le premier membre est supérieur au produit d'une constante par r^{s-q_0} . Il est loisible de supposer que k a été choisi de telle façon que le second membre soit infiniment petit par rapport à chaque terme du premier membre. Considérons dans le premier membre le terme obtenu comme suit : nous prenons s égal à sa valeur maximum s_0 , puis parmi les termes ainsi obtenus ceux pour lesquels q a la plus petite valeur possible, soit q_0 ; enfin, parmi les termes tels que $s = s_0$ et $q = q_0$, nous prenons celui pour lequel p a la plus grande valeur, soit p_0 . Le rapport d'un terme quelconque du premier nombre au terme ainsi choisi est à un facteur numérique près

$$z^{s-s_0} |z H(z)|^{p-p_0} |z G(z)|^{q-q_0},$$

son module est inférieur à $z^{s-s_0+\frac{1}{2}}$ si $s < s_0$ quels que soient d'ailleurs p et q ; si $s = s_0$ ce module est inférieur à

$$n^{-k(q-q_0)+p+1},$$

lorsque $q > q_0$, P désignant le maximum de p ; enfin si $s = s_0$ et $q = q_0$, p est inférieur à p_0 et le module du rapport est inférieur, au coefficient numérique près, à

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{p-p_0}.$$

Le terme mis en évidence est donc le terme prépondérant du premier membre, les autres termes sont infiniment petits par rapport à celui-là, il n'y a donc pas de réduction dans le premier membre qui est infiniment grand par rapport au second, l'équation est impossible. Ainsi :

II. *Les fonctions entières vérifiant la condition de croissance (1) ne peuvent être solutions d'équations différentielles algébriques du second ordre.*

6. L'égalité (5) est à rapprocher de la propriété connue de la dérivée logarithmique d'un polynome pour laquelle le rapport $\frac{zH(z)}{n}$, n étant le degré, tend vers 1; au contraire la propriété de la fonction $zG(z)$ d'être infiniment petite, mais d'ordre infinitésimal nul par rapport à $\frac{1}{r}$, n'a pas d'analogue dans la théorie des

polynomes, pour les polynomes $z^2G(z)$ tend vers $\sum_1^n a_m$ ou bien est d'ordre au moins égal à 1 en $\frac{1}{r}$. C'est grâce à cette non analogie que la démonstration de la proposition II a pu être faite par la méthode suivie ici. Il ne semble pas qu'il soit possible de mettre en évidence une fonction liée à la dérivée de $G(z)$ et qui se comporte d'une manière analogue par rapport à $G(z)$ (ce qui permettrait de conclure à l'impossibilité de satisfaire à une équation du troisième ordre).

7. Dans bien des cas particuliers il sera possible de tirer de l'inégalité (7) un résultat bien plus précis que celui qui a servi ci-dessus, ce qui permettra d'étendre la proposition II à des classes de fonctions vérifiant seulement la condition de croissance (3). Voici deux exemples assez généraux. Supposons qu'à partir d'une valeur de n on ait $r_{n+1} > \alpha r_n$, α étant supérieur à 1, et prenons q assez grand pour que α^q soit supérieur à 2, b_q sera supérieur à $\frac{1}{2} r_n^q$ et par suite le module de $zG(z)$ sera supérieur à une constante d pour $r = h' r_n$, la proposition I sera encore vérifiée, on aura même ici $|zG(z)| = \frac{1}{n^k}$. On aura un résultat analogue lorsque les arguments des zéros seront distribués de telle façon que, pour une valeur de q , les points $(\alpha_p)^q$ se trouvent dans un angle d'ouverture inférieur à π , en particulier lorsque tous les zéros sont réels à partir d'un certain rang ou bien sont compris dans deux angles opposés de sommet à l'origine et d'ouverture moindre que $\frac{\pi}{2}$.

Je signalerai enfin un autre critérium permettant de reconnaître si le théorème II s'applique à une fonction donnée vérifiant la condition (3). Faisons la transformation

$$z = r_n Z, \quad H_n(Z) = \frac{1}{n} z H(z).$$

Les fonctions $H_n(Z)$ sont holomorphes et bornées dans leur ensemble dans toute couronne $1 < R \leq Z \leq R'$, elles forment une famille normale de M. Montel. S'il existe une fonction limite qui ne soit pas constante, il existera une suite de fonctions $H_n(Z)$ dont les dérivées convergeront vers une limite non nulle l en un point Z_0 . En revenant à $H(z)$, on aura

$$\lim z_n G(z_n) = n l Z_0, \quad z_n = r_n Z_0,$$

et l'énoncé I, donc II, seront valables comme ci-dessus. Lorsque toutes les fonctions limites des $H_n(Z)$ sont des constantes, ces constantes sont toutes égales à 1 puisque $H_n(Z)$ tend vers 1 lorsque Z croît indéfiniment, et il en résulte que $H_n(Z)$ tend uniformément vers 1 dans tout domaine intérieur à $|Z| > 1$. En repassant à la fonction $H(z)$ on voit que, pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (3), le théorème II est applicable sauf peut-être si $\frac{1}{n} z H(z)$ tend uniformément vers 1 dans les couronnes C_n quel que soit le nombre h qui sert à définir ces couronnes. J'avais cru pouvoir démontrer que, lorsque cette dernière circonstance se présente (¹), $z G(z)$ vérifie une inégalité conduisant au théorème I, et c'est ce qui m'avait fourni l'énoncé, peut-être erroné, de ma note aux *Comptes rendus* signalée au début.

(¹) C'est ce qui arrive dans le premier des deux cas signalés ci-dessus.