BULLETIN DE LA S. M. F.

G. BOULIGAND

# Quelques théorèmes sur les fonctions métaharmoniques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 53 (1925), p. 55-59
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__55_1>

## QUELQUES THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS MÉTAHARMONIQUES ;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. Par fonction *métaharmonique*, nous entendons une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \lambda U \tag{1}$$

continue ainsi que ses dérivées. Nous dirons pour abréger que la fonction est *épiharmonique* lorsque la constante $\lambda$ est positive, *hypoharmonique* lorsqu'elle est négative.

Posons-nous la question suivante :

*Soit* D *un domaine s'étendant à l'infini, et dont la frontière* $\Sigma$ *n'offre à distance finie aucune pointe ou arête* (pour simplifier). *Soit* U(M) *une fonction métaharmonique dans* D, *continue dans* D *et sur* $\Sigma$, *nulle sur* $\Sigma$. *Quelle condition faut-il imposer à* U(M), *lorsque le point* M *s'éloigne indéfiniment* *dans* D, *pour pouvoir affirmer que l'on a, dans* D

$$U(M) = o\,?$$

2. Supposons d'abord $\lambda$ positif et soit $\lambda = \omega^2$. Nous allons établir le théorème suivant :

*En désignant par* O *un point fixe intérieur au domaine* D, *par* $r$ *la distance* OM, *il suffit d'adjoindre aux hypothèses faites sur* U(M) *la condition*

$$\lim_{r=\infty} r e^{-\omega r} U(M) = o \tag{2}$$

*pour entraîner l'annulation identique de* U(M) *dans* D.

En effet, de M comme centre, décrivons une sphère de rayon R arbitrairement grand. Appelons S la portion de sa surface intérieure à D, $\Sigma_1$ la portion de $\Sigma$ intérieure à la sphère, $\Delta$ le domaine délimité par S et $\Sigma_1$. Considérons la fonction épiharmonique dans toute la sphère, qui prend sur sa surface la valeur $\mathfrak{M}(R)$, maximum de $|U|$ sur la sphère de centre M et de rayon R. En tout point intérieur à la sphère, distant de $\rho$ du centre, cette fonction auxiliaire sera

$$V = \mathfrak{M}(R)\frac{\operatorname{sh}\omega\rho}{\omega\rho}\,\frac{\omega R}{\operatorname{sh}\omega R}.$$

En particulier, au centre M,

$$V_M = \mathfrak{M}(R)\frac{\omega R}{\operatorname{sh}\omega R}.$$

Les fonctions $V - U$ et $V + U$, épiharmoniques et positives sur S et sur $\Sigma_1$, le sont dans la totalité du domaine $\Delta$. Nous avons donc

$$|U(M)| < \mathfrak{M}(R)\frac{\omega R}{\operatorname{sh}\omega R}. \tag{3}$$

Or, on tire de la condition (2)

$$\lim_{R=\infty} r e^{-\omega r}\mathfrak{M}(R) = o$$

ou indifféremment

$$\lim_{R=\infty} R e^{-\omega R}\mathfrak{M}(R) = o,$$

en remarquant que $r$ et R jouent le rôle d'infiniment grands équivalents. En écrivant l'inégalité (3) sous la forme

$$[U(M)] < \omega[\mathfrak{M}(R)\, R e^{-\omega R}] \frac{e^{\omega R}}{\operatorname{sh} \omega r},$$

inégalité qui a lieu quelque grand que soit R, on obtient bien

$$U(M) = 0$$

pour tout point M de D. C. Q. F. D.

3. Il convient de faire une remarque : la démonstration de ce théorème ne met en jeu aucune hypothèse sur la forme à l'infini du domaine D. En faisant certaines hypothèses de cette nature, on pourrait espérer obtenir des résultats plus précis encore que l'énoncé du théorème précédent.

Il en est bien ainsi dans l'exemple suivant :

Soit un domaine D qui présente une branche infinie cylindrique; autrement dit, à l'extérieur d'une certaine sphère, nous supposons que la frontière Σ est un cylindre à section droite fermée. Prenons l'axe $Oz$ parallèle aux génératrices du cylindre. Pour assurer l'annulation identique de U(M), il suffit d'introduire la condition suivante, analogue à (2), mais moins restrictive

$$\lim_{z=\infty} e^{-\sqrt{\omega^2+\alpha_1^2}\, z}\, U(M) = 0, \tag{4}$$

où $\alpha_1$ désigne, comme dans ma Thèse de doctorat [1], le premier terme d'une suite caractéristique liée à la section droite du cylindre. Il nous suffira d'indiquer que ce résultat est une conséquence immédiate de l'analyse développée aux n^os^ **17**, **18** et **19** de ce travail.

Si l'on remplace la branche cylindrique par une branche conique, une méthode de recherche analogue s'applique. Soit O le sommet de la branche. Désignons encore par $r$ la distance OM. L'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rU) + \frac{\Delta_2(rU)}{r^2} - \omega^2 r U = 0,$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 42, 1914 : lire spécialement de la page 191 à la page 195.

où $\Delta_2$ est l'opérateur de Beltrami pous la sphère de centre O et de rayon 1. Toute fonction du point M, qui pour $r > r_0$ est épiharmonique dans la branche étudiée et s'annule sur sa frontière, peut se développer en une série absolument et uniformément convergente

$$\gamma_1(r)\,\mathfrak{V}_1 + \gamma_2(r)\,\mathfrak{V}_2 + \ldots + \gamma_k(r)\,\mathfrak{V}_k + \ldots,$$

où les $\mathfrak{V}_k$ sont des fonctions d'un point de la section droite par la sphère de rayon 1, s'annulant sur son contour et vérifiant des équations du type

$$\Delta_2 \mathfrak{V} + \beta^2 \mathfrak{V} = 0.$$

A cet effet, on doit choisir les $\beta$ parmi les termes d'une suite caractéristique. Les $\mathfrak{V}_k$ sont les fonctions fondamentales correspondantes. Quant aux $\gamma_k(r)$, ils vérifient les équations différentielles

$$(5) \qquad \frac{d^2}{dr^2}(r\gamma_k) - \left(\omega^2 + \frac{\beta_n^2}{r^2}\right) r\gamma_k = 0.$$

On a donc, conformément aux notations du *Traité d'Analyse* de Jordan et de l'*Encyclopédie*

$$\sqrt{r}\,\gamma_k(r) = c\,\mathrm{J}_n(i\omega r) + c'\,\mathrm{J}_{-n}(i\omega r),$$

$c$ et $c'$ désignant deux constantes arbitraires et $n$ un nombre défini en fonction de $\beta_k$ par

$$n = \sqrt{\beta_k^2 + \frac{1}{4}}.$$

Des expressions asymptotiques des fonctions $\mathrm{J}_n$, on conclut que, pour $r$ infini, chaque coefficient $\gamma(r)$ est un infiniment grand équivalent à une expression de la forme

$$a\,\frac{e^{\omega r}}{r}.$$

Notre conclusion est alors la suivante :

*L'hypothèse d'une branche conique n'apporte à la question étudiée aucun complément au théorème général.*

Dans le cas des fonctions harmoniques, il en est tout autrement. Il faut alors, dans l'énoncé du théorème général, remplacer la condition (2) par la suivante :

$$\lim_{r=\infty} U(M) = 0, \tag{6}$$

D'autre part, dans le cas d'une branche conique, l'annulation de $\omega$ substitue à l'équation (5) une équation du type d'Euler. La condition (6) peut alors être remplacée par cette autre moins restrictive

$$\lim_{r=\infty} r^{-\alpha} U(M) = 0, \tag{7}$$

en désignant par $\alpha$ la racine positive de l'équation

$$\alpha(\alpha+1) - \beta_1^2 = 0,$$

laquelle dépend de la section droite. J'ai signalé pour la première fois ces effets de croissance aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (février 1921).

**4.** Passons maintenant aux fonctions hypoharmoniques en faisant, dans l'équation (1), $\lambda = -\omega^2$. Il est alors difficile d'obtenir un théorème aussi général que celui du n° **2**. Cependant, la méthode de recherche du n° **3** continue à s'appliquer et conduit au résultat suivant :

Pour un domaine, offrant une branche infinie conique, la fonction U(M) sera identiquement nulle, si aux hypothèses de l'énoncé du n° **1**, on adjoint la condition

$$\lim_{r=\infty} r U(M) = 0, \tag{8}$$

et si l'on suppose que la limite est uniformément atteinte.

En particulier, ce nouveau théorème s'applique lorsque le domaine D est la région de l'espace extérieure à un ou plusieurs solides, situés tout entiers à distance finie. On peut même supposer que D comprend tout l'espace. La relation (8) donne alors une généralisation d'un théorème bien connu de Liouville sur les fonctions harmoniques.