BULLETIN DE LA S. M. F.

G. VALIRON

Sur les surfaces qui admettent un plan tangent en chaque point

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 190-198

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__190_0>

SUR LES SURFACES QUI ADMETTENT UN PLAN TANGENT EN CHAQUE POINT ;

PAR M. GEORGES VALIRON.

J'ai montré dans une Note récente ([1]) que les courbes continues qui admettent en chaque point une tangente orientée qui varie continûment jouissent des propriétés du premier ordre des courbes élémentaires. La proposition que je donne ici pour les surfaces simples qui admettent en chaque point un plan tangent qui varie continûment est moins complète. La définition du plan tangent ordinaire, plan tangent jouissant d'une propriété analogue à celle de la tangente orientée, s'impose d'une façon assez nette, mais je n'ai pu déduire de cette seule propriété du plan tangent la proposition que j'avais en vue, à savoir que la portion de surface voisine d'un point se projette biunivoquement sur le plan tangent en ce point. Pour arriver à ce résultat, j'ai dû supposer que par chaque point M passent deux plans normaux qui coupent la surface, dans le voisinage de M, suivant une courbe simple de Jordan. Pour les surfaces jouissant de ces propriétés, chaque point M de la surface peut être entouré d'une portion de surface dont les coordonnées sont des fonctions différentiables de deux paramètres, les différentielles étant continues.

1. Nous considérons une surface simple continue S, ensemble de points $M(x, y, z)$ défini paramétriquement par les formules

$$x = \xi(u, v), \qquad y = \eta(u, v), \qquad z = \zeta(u, v);$$

les fonctions ξ, η, ζ sont des fonctions continues des coordonnées u, v d'un point m dans un domaine W du plan des u, v, telles que à deux points distincts m, m' de W correspondent deux points distincts M, M'.

([1]) Cette Note doit paraître dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1926.

W est un domaine de Weierstrass, un ensemble de points m tous intérieurs et bien enchaînés, c'est-à-dire tels que : 1° m étant un point de W, il existe un cercle de centre m et rayon non nul dont tous les points appartiennent à W; 2° m et m' étant deux points de W, il existe une ligne polygonale joignant m à m' qui peut être recouverte complètement par une chaîne d'un nombre fini de cercles appartenant à W. La frontière f de W est l'ensemble des points n'appartenant pas à W et qui sont points limites de points de W. Les points n'appartenant ni à W ni à f sont les points extérieurs. Supposons qu'aux points de W on fasse correspondre un ensemble plan W′ de points μ tels que : 1° la correspondance soit continue (les coordonnées de μ sont fonctions continues de celles de m); 2° les points μ correspondant aux points d'un cercle $mm_0 < \varepsilon$ ($\varepsilon < \varepsilon_0$) appartenant à W forment un domaine. Dans ces conditions, W′ est un domaine dont la frontière provient uniquement des points de la frontière f de W. Si la correspondance est biunivoque, tout point de la frontière f donne un point de la frontière de W′.

Nous dirons que la surface S *possède un plan tangent* π_0 *en un point* M_0 *lorsqu'il existe un plan unique* π_0 *passant par* M_0 *jouissant de cette propriété : à chaque nombre positif* η, *on peut faire correspondre un nombre* ε *tel que l'angle de* M_0M *avec* π_0 *soit moindre que* η *dès que* $m_0m < \varepsilon$.

Cette définition n'est pas celle qui est adoptée dans certains traités. On appelle souvent plan tangent en M_0 un plan π_0 qui est unique et qui contient les tangentes à toutes les courbes de la surface passant en M_0 et admettant une tangente en ce point. Ces deux définitions ne sont pas équivalentes. Il est aisé de définir des surfaces

$$z = \varphi(x, y) \tag{1}$$

possédant un plan tangent à ce dernier point de vue et n'en ayant pas au premier. Prenons $\varphi \equiv 0$ sauf dans une suite de cercles C_n situés dans le quart de plan $x > 0$, $y > 0$, tangents à Ox, extérieurs les uns aux autres et vus de O sous un angle qui tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Dans C_n nous prenons

$$\varphi = c_n \left\{ 1 - \frac{1}{r_n^2} [(x - c_n)^2 + (y - r_n)^2] \right\},$$

r_n étant le rayon de C_n et c_n l'abscisse de son centre. On constate que toute tangente en O à une courbe de S est contenue dans le plan xOy, et même que toute droite $y = kx$ est tangente à une telle courbe. Mais il existe des points M aussi voisins de O que l'on veut pour lesquels OM fait un angle fini avec xOy.

Le plan tangent tel que nous le définissons contient évidemment toutes les tangentes aux courbes de la surface passant par le point de contact.

Pour une surface définie par une équation de la forme (1) où φ est continue, il y a identité entre l'existence du plan tangent en un point et l'existence de la différentielle de la fonction φ au sens de Stolz [1]. En tout point, possédant un plan tangent, les dérivées partielles de φ existent; si le plan tangent existe et varie continûment dans un domaine, les dérivées partielles de φ y sont continues.

2. Nous supposerons désormais que S possède un plan tangent en chaque point, et que ce plan varie continûment, c'est-à-dire que les cosinus directeurs de la normale sont des fonctions continues de (u, v) dans le domaine W. Nous supposerons, en outre, que *le plan tangent est ordinaire en chaque point* M_0, en ce sens que $D'M_0D$ étant une droite quelconque de π_0 passant par M_0, il existe des points de S aussi voisins que l'on veut de M_0 (donc pour lesquels m_0m est arbitrairement petit), tels que le segment M_0M fasse avec M_0D un angle aussi petit que l'on veut, et qu'il en soit de même lorsqu'on remplace M_0D par la demi-droite opposée M_0D'.

Pour les surfaces (1) le plan tangent est toujours ordinaire, mais il est aisé de définir des surfaces pour lesquelles il n'en est pas ainsi en certains points. Une surface simple peut admettre une droite pour arête de rebroussement et avoir un plan tangent qui varie continûment. De même pour la surface

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\psi, \qquad y = \rho\sin\psi, \qquad z = \rho^2\sin t, \\ \psi = \cos t, \\ 0 \leqq \rho < \rho_0, \qquad 0 < t \leqq 2\pi, \end{cases}$$

[1] *Voir* à ce sujet l'article de M. Fréchet, *Sur la notion de différentielle totale* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1912).

qui correspond biunivoquement à l'intérieur d'un cercle, le plan tangent est ordinaire, sauf en O, mais ne varie pas continûment en O.

Le plan tangent peut être ordinaire en tout point et la projection de la surface sur un plan tangent ne pas recouvrir tout le voisinage du point de contact lorsque le plan tangent ne varie pas continûment dans le voisinage de ce point. C'est ce qui a lieu pour la surface définie comme ci-dessus, mais avec

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0)(\cos t + 1),$$

ψ_0 et ψ_1 étant les valeurs de l'angle polaire pour les points des arcs des paraboles

$$y = x^2, \qquad y = 2x^2, \qquad x > 0,$$

situés à la distance ρ de l'origine.

Soit M_0 un point en lequel le plan tangent π_0 est ordinaire et autour duquel il y a un plan tangent ordinaire qui varie continûment, et soit D une direction de projection non parallèle à π_0. Nous allons montrer que la projection sur π_0 parallèlement à D de tout voisinage de M est un domaine contenant M_0 à son intérieur.

Désignons par α l'angle de D avec π_0. Nous prendrons d'abord $m_0 m < \varepsilon$, ε étant assez petit pour que l'angle du plan tangent en M avec π_0 soit inférieur à $\frac{1}{2}\alpha$. C'est possible en vertu de la continuité uniforme des cosinus directeurs de la normale dans tout domaine intérieur à W. Soient E l'ensemble des projections sur π_0, parallèlement à D, des points de S correspondant à l'intérieur de ce cercle de rayon ε, et e l'ensemble des projections des points de la circonférence. $E + e$ et e sont des ensembles fermés. e ne contient pas M_0 si ε a été pris assez petit, car, d'après la définition du plan tangent, le seul point projeté en M_0 est alors M_0. Soit 4γ la distance minimum de M_0 à e. Montrons que tous les points de π_0 intérieurs au cercle de centre M_0 et rayon γ appartiennent à E. Les points du cercle δ de centre M_0 et rayon 2γ, qui appartiennent à E, correspondent à des points du cercle ε formant un ensemble d complètement intérieur à ce cercle. Supposons qu'il existe dans δ des points aussi proches que l'on veut de M_0 qui n'appartiennent pas à E, ni par suite à $E + e$; soit μ l'un d'eux tel que $M_0\mu < \gamma$, et soit γ' la plus courte distance de ce point μ à l'ensemble fermé $E+e$, γ' est au plus égal à γ. Sur la circonférence C de centre μ et rayon γ' se trouve au moins un point μ' de E; μ' est la projection d'un point M′ de S correspondant à un point m' de d. En M′ il y a un plan tangent ordinaire non parallèle à D. Il existe donc des points de S aussi voisins que l'on veut de M′, donc provenant de points appartenant à d, qui se projettent sur π_0 dans un angle arbitraire de sommet μ'. En prenant cet angle intérieur à C dans le voisinage de son sommet, on arrive à une contradiction. E renferme tous les points pour lesquels $M_0\mu < \gamma$.

On vérifie aisément que lorsque D varie d'une façon continue en faisant avec π_0 un angle supérieur à un angle fixe β, la propriété démontrée a lieu uniformément.

Supposons que m décrive le cercle de rayon ε du plan des (u, v) considéré ci-dessus, chaque point μ projection sur π_0 du point M correspondant de S est centre d'un cercle dont tous les points sont encore des points μ; en appliquant la proposition rappelée au n° 1 on obtient ce résultat :

I. *Soit* M_0 *un point en lequel et autour duquel le plan tangent est ordinaire et varie continûment, et soit* D *une direction non parallèle au plan tangent* π_0 *en* M_0. *Il existe un cercle* $m_0 m < \varepsilon$ *tel que la projection sur* π_0 *parallèlement à* D *de la portion* s *de* S *correspondant à ce cercle, soit un domaine* σ *contenant* M_0, *et dont la frontière provient uniquement des points de la circonférence* $m_0 m = \varepsilon$.

Voici une autre conséquence des hypothèses faites :

II. *Dans les conditions précédentes, tout point de* σ *est la projection d'un nombre fini de points de* s.

Car, si un point μ de σ était la projection d'une infinité de points de s, ces points dont la distance à M_0 est bornée auraient un point limite M provenant d'un point m pour lequel $mm_0 \leqq \varepsilon$. Au point M, il y a un plan tangent non parallèle à D et, d'après la définition du plan tangent, il ne peut exister une suite de points M_n tendant vers M, MM_n restant parallèle à D.

D'après la proposition I, si une projetante coupe s en p points, les projetantes voisines coupent encore s en p points au moins.

Je n'ai pu reconnaître si les seules hypothèses faites jusqu'ici suffisent pour assurer que le voisinage de M_0 se projette biunivoquement sur π_0 ([1]).

3. En outre des hypothèses déjà faites, nous supposerons que *par chaque point* M_0 *de* S *passent deux plans normaux qui coupent* S *dans le voisinage de* M_0 *suivant un arc de courbe simple de Jordan*. Nous dirons qu'une surface satisfaisant à toutes ces conditions est une *surface ordinaire*.

Si P est un des plans normaux considérés en M_0, les points de S appartenant à P, et pour lesquels $m_0 m$ est assez petit, forment un arc simple J(P). En chaque point de cet arc la surface S a un plan tangent ordinaire, J(P) admet donc une tangente orientée en chaque point en vertu de la proposition I; les parallèles à une droite D de P non parallèle à π_0 menées par les points M de J(P) suffisamment proches de M_0 ne recoupent pas ce même arc ([2]).

Soient M_0 un point de S, π_0 le plan tangent en ce point, et s la portion de S correspondant à $mm_0 < \varepsilon$, ε étant assez petit pour que l'angle du plan tangent en M avec π_0 soit inférieur à β $\left(\beta < \frac{\pi}{6}\right)$, et pour que la projection orthogonale sur π_0, e, de la courbe correspondant à $mm_0 = \varepsilon$ ne contienne pas M_0. Nous allons considérer les points μ de π_0 pour lesquels $M_0\mu < \gamma$, 4γ étant la plus courte distance de M_0 à e. On a vu que tout point de ce cercle de rayon γ est projection d'un point de s. Deux cas sont possibles *a priori*.

1° Tout point du cercle γ est projection d'un seul point de s, alors μ parcourant le cercle, le point m parcourt un domaine appartenant à W qui lui correspond biunivoquement, il existe un cercle $mm_0 < \varepsilon'$, $\varepsilon' < \varepsilon$, fournissant une portion de S qui se projette biunivoquement sur π_0 suivant un domaine contenant M_0.

2° Un point μ' du cercle de rayon γ est la projection de deux

---

([1]) On sait que trois domaines sans points communs peuvent avoir la même frontière; s'il est possible d'établir une homéomorphie entre l'un d'eux et l'extérieur d'un cercle et entre chacun des deux autres et l'intérieur du cercle, de telle façon que la circonférence corresponde biunivoquement à la frontière commune, les hypothèses faites ici sont insuffisantes.

([2]) *Voir* ma Note citée.

points au moins de s. Il en est de même des points voisins d'après une remarque faite plus haut. μ' est donc le centre d'un cercle C dont tous les points sont projection de deux points au moins de s tandis qu'un point au moins μ_1 de sa circonférence est projection d'un seul point de s, le rayon de ce cercle est au plus égal à γ. Nous allons montrer que ce cas ne peut se présenter.

Soient M_1 le point unique de s projeté en μ_1, π_1 son plan tangent, et C_1 l'ellipse située dans π_1 qui se projette sur π_0 suivant le cercle C. Nous allons considérer les projections d'un point M de s sur π_1, ν_0 sera la projection perpendiculairement à π_0 et ν_1 la projection perpendiculairement à π_1. Soit P l'un des deux plans normaux à S en M_1 coupant s suivant un arc simple, il est loisible de supposer que sa trace sur π_1 n'est pas la tangente à C_1 en M_1. On peut choisir ε_1 assez petit pour que les points M de s situés dans P et vérifiant la condition $mm_1 < \varepsilon_1$ forment un arc simple coupé en un seul point par les perpendiculaires à π_1, nous appellerons J celui de ces arcs qui se projette dans C_1 et s_1 la portion de s pour laquelle $mm_1 < \varepsilon_1$. J est la seule section de P par s_1.

M étant sur J, la droite $M\nu_0$ recoupe s en un point au moins, M'. Lorsque M tend vers M_1, M' tend aussi vers M_1 puisque la droite $M_1\mu_1$ ne coupe s qu'au seul point M_1. Le segment $\nu_0 M'$ tend donc vers zéro lorsque M tend vers M_1. Dans le plan $M\nu_0\nu_1$, menons par M' les deux droites faisant un angle 2β avec le plan π_1, et soient U et V leurs points d'intersection avec $M\nu_1$, M est extérieur au segment UV. D'après la proposition I, il y a des points de s dans le triangle M'UV, et si M'' est un tel point (ou même un point de s situé sur M'U ou M'V), il existe encore dans M'UV des points de s plus proches que celui-ci de UV. Dès que MM_1 est assez petit, tous les points du triangle M'UV se projettent orthogonalement sur π_0 dans le cercle de centre M_0 et rayon 3γ (parce que $\nu_0 M'$ tend vers zéro), les points M'' du triangle appartenant à s ne peuvent avoir de point limite sur la frontière de s. On en conclut qu'il y a un point M'' sur le segment UV. Ce point tend vers M_1 avec M, il appartient à s_1 dès que M est assez proche de M_1, ce qui est impossible.

Le premier cas envisagé est donc seul réalisable, et par suite :

III. *Lorsqu'une surface* S *est ordinaire, il existe un cercle*

$mm_0 < \varepsilon(m_0)$ *ayant pour centre un point arbitraire de* W *donnant une portion* $s(M_0)$ *de* S *qui se projette biunivoquement sur le plan tangent en* M_0 *suivant un domaine simplement connexe contenant* M_0.

Nous avons considéré la projection orthogonale sur le plan tangent, mais il est clair que rien n'est changé si l'on fait une projection oblique. De même l'hypothèse sur l'existence de deux plans normaux en M_0 coupant S suivant deux courbes simples dans le voisinage de M_0 peut être remplacée par celle de l'existence de deux plans quelconques passant par M_0 et jouissant de cette propriété pourvu que ces plans se coupent suivant une droite faisant avec le plan tangent un angle qui reste uniformément supérieur à un nombre fixe.

Si l'on prend pour axes la normale en M_0 et deux tangentes rectangulaires, l'équation de la portion $s(M_0)$ de S est de la forme

$$Z = \varphi(X, Y), \tag{3}$$

et, d'après ce qui fut dit au nº 1, la fonction φ a des dérivées partielles continues. Au point de vue local, une surface ordinaire possède les propriétés du premier ordre des surfaces classiques.

4. Toute portion de $s(M_0)$ dont la projection sur le plan tangent en M_0 est quarrable est aussi quarrable. On peut passer de cette propriété locale à une propriété générale. Nous considérerons un domaine W' complètement intérieur à W. Si S' est le domaine correspondant de S, la frontière F' de S' est l'ensemble des points correspondant à la frontière f' de W'. Nous supposerons que, à chaque nombre η positif correspond un nombre fini de sphères $\Sigma(\eta)$ dont la somme des aires est au plus égale à η et qui, dans leur ensemble, renferment F' à leur intérieur, *ce que nous exprimerons en disant que* F' *a une aire nulle*. L'ensemble $W'(\eta)$ des points de W' donnant des points extérieurs aux sphères $\Sigma(\eta)$ est complètement intérieur à W' ; il existe donc un domaine W'' contenant $W'(\eta)$ à son intérieur et complètement intérieur à W'. On voit en utilisant la représentation (3) que tout point m_0 de W'' ou de sa frontière peut être entouré d'un cercle $c(m_0)$ intérieur à W' tel que : 1° m_1, m_2 et m étant trois points de ce cercle, l'angle de

la corde M_1M_2 joignant les points correspondant à m_1 et m_2 avec le plan tangent en M correspondant à m soit inférieur à un nombre donné ε; 2° la projection de la portion $s(m_0)$ de S correspondante sur le plan tangent en M se fasse biunivoquement. Soit $c'(m_0)$ le cercle concentrique à $c(m_0)$ et de rayon moitié. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, W″ peut être recouvert d'un nombre fini de ces cercles $c'(m_0)$. Soit ρ le plus petit des rayons de ces cercles. On peut faire un quadrillage de côtés inférieurs ou égaux à ρ tel que les carrés dont un point appartient à $W'(\eta)$ soient intérieurs à W″. Si c_i est un de ces carrés, m_i son centre, on peut remplacer les côtés de c_i par des arcs de courbes simples aussi voisins que l'on veut de ces côtés et tels que le carré ainsi modifié se projette sur le plan π_i tangent en M_i suivant un domaine quarrable. En effet, R_i étant un petit rectangle entourant un côté γ_i de c_i commun à c_i et c_j, les points correspondants de S se projettent sur π_i suivant un domaine, et il suffit de tracer dans ce domaine une ligne polygonale simple joignant les points correspondant aux extrémités de γ_i. Cette ligne polygonale peut être enfermée dans un nombre fini de cercles d'aire totale arbitrairement petite, la ligne correspondante de S est donc d'aire nulle en vertu de l'hypothèse faite plus haut sur les cordes, cette ligne se projette encore sur le plan tangent en M_j suivant une ligne simple d'aire nulle. Finalement $W'(\eta)$ peut être enfermé dans un domaine W‴, intérieur à W′, la portion S‴ correspondante de S étant la somme d'un nombre fini de domaines quarrables est quarrable. On peut décomposer S′ en ce domaine S‴ et en domaines respectivement intérieurs aux sphères $\Sigma(\eta)$, la somme des aires des projections de ces derniers sur les plans tangents aux centres des sphères est moindre que η. Il s'ensuit que S′ est quarrable, son aire est la limite de celle de S‴ lorsque η tend vers zéro. Ainsi :

IV. *Tout domaine situé sur une surface ordinaire et dont la frontière a une aire nulle est quarrable.*