R. WAVRE

Sur la méthode de M. Kellog et l'itération d'une opération fonctionnelle linéaire à noyau singulier

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 199-204
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__199_0>

SUR LA MÉTHODE DE M. KELLOG ET L'ITÉRATION D'UNE OPÉRATION FONCTIONNELLE LINÉAIRE A NOYAU SINGULIER;

PAR M. ROLIN WAVRE.

Dans un article fort intéressant *On the existence and closure of sets of caracteristic functions* (*Math. Annalen*, B. 86 H $\frac{1}{2}$, avril 1922), M. O. D. Kellog établit l'existence des fonctions caractéristiques d'une équation de Fredholm à noyau symétrique $N(x, y)$, en faisant sur ce dernier les hypothèses suivantes :

I. On peut intervertir l'ordre des intégrations dans l'expression

$$\int_a^b \int_a^b \alpha(x) N(x, y) \beta(y) \, dx \, dy,$$

$\alpha(x)$ et $\beta(y)$ étant deux fonctions de carré sommable.

II. On a, quel que soit x,

$$\int_a^b N^2(x, y) \, dy < B^2,$$

B désignant une constante.

III. Étant donné ε, on peut choisir δ tel que l'inégalité

$$| x_2 - x_1 | < \delta$$

entraîne la suivante

$$\left| \int_a^b N(x_2, y) \psi(y) \, dy - \int_a^b N(x_1, y) \psi(y) \, dy \right| < \varepsilon$$

quelle que soit la fonction $\psi(y)$ de carré sommable (dont, bien entendu, δ ne dépend pas).

M. Kellog forme la suite $[f_i(x)]$ des fonctions ainsi définies :

$$n_i^2 = \int_a^b f_i^2(x) \, dx, \qquad f_{i+1}(x) = \int_a^b N(x, y) \frac{f_i(y)}{n_i} dy \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

ainsi que la relation

$$n_i n_{i+1} = \int_a^b f_i(x) f_{i+2}(x)\, dx \leq n_i n_{i+2}$$

qui montre que les normes n_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) ne sont jamais décroissantes. On tirerait de l'hypothèse II qu'elles sont toutes inférieures à un même nombre, de sorte qu'elles tendent vers une limite n.

Les hypothèses II et III impliquent que les fonctions $f_i(x)$ sont également continues et inférieures en valeur absolue à un nombre fixe quels que soient x et i.

M. Kellog invoque ensuite le théorème d'Ascoli suivant lequel on peut extraire de la suite $[f_i(x)]$ une suite

$$[f_l(x)], \qquad l = n_1, n_2, n_3, \ldots$$

qui converge uniformément vers une fonction limite $f(x)$.

Les deux suites $[f_{l+1}(x)]$ et $[f_{l+2}(x)]$ convergent alors uniformément vers deux fonctions $g(x)$ et $h(x)$, et puisque

$$\int_a^b [f_{l+2}(x) - f_l(x)]^2\, dx$$

tend vers zéro on a

$$h(x) = f(x),$$

alors

$$g(x) = \frac{1}{n}\int_a^b N(x, y) f(y)\, dy$$

$$f(x) = \frac{1}{n}\int_a^b N(x, y)\, g(y)\, dy$$

et les deux fonctions, dont l'une peut se réduire à zéro :

$$f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) - g(x),$$

sont fonctions caractéristiques pour les valeurs $\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n}$ du paramètre de Fredholm.

* * *

Or, le développement classique d'un noyau régulier en série de fonctions fondamentales, développement que l'on pourrait reconstruire par la méthode de M. Kellog, montre que les deux suites

$$S : [f_{2i}(x)], \qquad [f_{2i+1}(x)] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

convergent uniformément, de sorte que, *si l'on a soin d'itérer toujours doublement, l'extraction d'une suite, possible en vertu du théorème d'Ascoli, est pratiquement inutile.* Cette remarque nous a suggéré l'idée d'élargir et d'approfondir l'étude de M. Kellog.

Mettons en évidence le produit infini :

$$\pi = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n} \cdot \frac{n_3}{n} \cdot \ldots$$

des quotients des normes par leur limite, qui paraît dominer l'étude des itérées dans le cas de noyaux symétriques très singuliers.

Montrons que s'il existe une fonction d'accumulation, pour la convergence en moyenne, il y en a au plus deux, à savoir, les limites des itérées d'indice pair et des itérées d'indice impair.

Ainsi, lorsqu'un théorème purement existentiel garantira l'existence d'une fonction d'accumulation, les deux suites des itérées de même parité seront convergentes.

* * *

Faisons sur le noyau symétrique $N(x, y)$ les hypothèses suivantes :

I'. Requérons le droit d'intervertir l'ordre des intégrations dans l'expression

$$\int_a^b \int_a^b \alpha(x) N(x, y) \beta(y) \, dx \, dy,$$

$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ étant deux fonctions quelconques de carré sommable.

II'. Supposons que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b N^2(x, y) \, dx \, dy$$

ait un sens.

La condition I' est identique à I, II' est plus large que II et la condition III n'est pas requise.

Nous ne chercherons pas dans quelle mesure les hypothèses I′ et II′ sont indépendantes.

Posons

$$\varphi_i(x) = \frac{f_i(x)}{n_i}, \qquad n_i^2 = \int_a^b f_i^2(x)\,dx,$$
$$f_{i+1}(x) = \int_a^b \mathrm{N}(x.y)\,\varphi_i(y)\,dy,$$

d'où l'on déduit en invoquant l'hypothèse I′ et l'inégalité de Schwartz

$$\frac{n_{i+1}}{n_{i+2}} = \int_a^b \varphi_{i+2}(x)\,\varphi_1(x)\,dx \leqq 1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

de sorte que $n_{i+1} \leqq n_{i+2}$. D'autre part l'inégalité de Schwartz nous donne

$$\int_a^b f_{i+1}^2(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_a^b \mathrm{N}(x, y)\,\varphi_i(y)\,dy\right]^2 dx$$
$$\leqq \int_a^b \int_a^b \mathrm{N}^2(x, y)\,dx\,dy,$$

de sorte que les normes n_i sont bornées supérieurement. Elles tendent donc vers une limite $\lim\limits_{i \to +\infty} n_i = n$. Jusqu'à maintenant nous n'avons fait que suivre les démarches de M. Kellog.

Cherchons à former le critère de Cauchy pour la convergence en moyenne des fonctions itérées.

L'hypothèse I′ permet d'établir facilement la relation

$$(1) \qquad \cos(\varphi_{i+2p}, \varphi_i) = \int_a^b \varphi_{i+2p}(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \frac{n_{i+1}}{n_{i+p+1}} \times \ldots \times \frac{n_{i+p}}{n_{i+2p}}$$

et la suivante s'en déduit

$$(2) \qquad \cos(\varphi_{i+q+2p}, \varphi_{i+q}) = \cos(\varphi_{i+2p}, \varphi_i)$$
$$\times \frac{n_{i+p+1}}{n_{i+1}} \times \ldots \times \frac{n_{i+q+p}}{n_{i+q}} \times \frac{n_{i+p+1}}{n_{i+2p+1}} \times \ldots \times \frac{n_{i+q+p}}{n_{i+q+2p}}.$$

Lorsque p augmente indéfiniment, le cosinus des deux fonctions φ_{i+2p} et φ_i ne peut que décroître en vertu de la relation (1), sa limite existe toujours; posons donc

$$(3) \qquad \mathrm{E}_i = \lim_{p \to +\infty} \cos(\varphi_{i+2p}, \varphi_i) \qquad (0 \leqq \mathrm{E}_i \leqq 1).$$

Les relations (2) et (3) donnent lieu aux suivantes :

$$(4) \qquad E_{i+q} = E_i \frac{n}{n_{i+1}} \times \ldots \times \frac{n}{n_{i+q}},$$

$$(5) \qquad E_i = \lim_{p \to +\infty} \frac{n_{i+1}}{n} \times \ldots \times \frac{n_{i+p}}{n} \times \frac{n}{n_{i+p+1}} \times \ldots \times \frac{n}{n_{i+2p}}.$$

L'équation (4) montre que les limites E_i sont toutes nulles ou toutes différentes dc zéro. Elle prouve de plus que si E_0 est différent de zéro, le produit infini

$$(6) \qquad \pi = \frac{n_1}{n} \frac{n_2}{n} \frac{n_3}{n} \ldots$$

est non nul.

Inversement, si ce produit est non nul, les limites E_i sont différentes de zéro, la relation (5) le montre; et l'on a de toute façon

$$(7) \qquad E_i = \frac{n_{i+1}}{n} \frac{n_{i+2}}{n} \ldots, \qquad E = \lim_{i \to +\infty} E_i = < \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}.$$

Ainsi, deux cas seulement sont possibles :

$$(a) \qquad \pi = 0, \qquad E_0 = E_1 = E_2 = \ldots = E = 0,$$

$$(b) \qquad \pi \neq 0, \qquad 0 < E_0 \leqq E_1 \leqq E_2 \leqq \ldots; \qquad E = 1.$$

Calculons le carré $\delta(\varphi_{i+2p}, \varphi_i)$ de la distance de deux itérées de même parité

$$(8) \quad \delta(\varphi_{i+2p}, \varphi_i) = \int_a^b [\varphi_{i+2p}(x) - \varphi_i(x)]^2 \, dx = 2[1 - \cos(\varphi_{i+2p}, \varphi_i)].$$

Les limites suivantes existent donc toujours avec nos hypothèses I′ *et* II′ :

$$(9) \qquad \lim_{p \to +\infty} \delta(\varphi_{i+2p}, \varphi_i) = 2[1 - E_i],$$

$$(10) \qquad \lim_{i \to +\infty} \lim_{p \to +\infty} \delta(\varphi_{i+2p}, \varphi_i) = 2[1 - E].$$

S'il existe une suite $\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}, \ldots$ qui converge en moyenne, on peut extraire de la suite des indices $n_1, n_2, \ldots$ une nouvelle suite $m_1, m_2, \ldots$ d'indice de même parité et l'on peut choisir les nombres i et $i + 2p$ parmi les indices $m_1, m_2, \ldots$, de sorte que pour cette dernière suite

$$\lim_{i \to +\infty} \lim_{p \to +\infty} \delta(\varphi_{i+2p}, \varphi_i) = 0$$

et l'on se trouve dans l'éventualité b, car $E = 1$. Alors les deux suites

$$S : [\varphi_{2i}] \quad \text{et} \quad [\varphi_{2i+1}] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

qui convergent en moyenne.

Ainsi, de deux choses l'une :

a. $\pi = 0$. *Il n'existe aucune suite extraite de la suite* $[\varphi_i]$ *converge en moyenne.*

b. $\pi \neq 0$. *Les deux suites* S *convergent en moyenne.*

En d'autres termes :

Sous nos conditions I′ et II′, il ne peut exister plus de deux fonctions d'accumulation de l'ensemble des φ_i.

Remarques. — 1° On a $\pi = 0$ ou $\pi \neq 0$ suivant que la série $\sum_{i=0}^{\infty} (n - n_i)$ diverge ou converge.

2° Si $n_{i+1} = n_{i+2}$, on a $n_{i+1} = n_{i+2} = n_{i+3} = \ldots = n$,

$$E_i = E_{i+1} = \ldots = E = 1,$$

$$\varphi_i = \varphi_{i+2} = \varphi_{i+4} = \ldots, \qquad \varphi_{i+1} = \varphi_{i+3} = \varphi_{i+5} = \ldots;$$

on le vérifie aisément.

3° La circonstance exceptionnelle 2° mise à part, on a dans le cas *b*

$$0 < E_0 < E_1 < E_2 < \ldots,$$

et la relation (8) montre que la distance ainsi que l'angle d'une fonction φ_i et de ses itérées φ_{i+2p}, $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ augmentent toujours; la relation (9) dans le cas *b* montre que la distance et l'angle d'une fonction φ_{2i} ou φ_{2i+1} à la limite de la suite S à laquelle elle appartient diminuent toujours lorsque i augmente.

4° Les fonctions $\varphi_i = \sqrt{2i+1}\, x^i$ de norme unité sur l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ donneraient lieu à la circonstance *a*. En effet :

$$\cos(\varphi_{1+2p}, \varphi_i) = \frac{\sqrt{2i+1}\,\sqrt{2i+4p+1}}{2i+2p+1} \qquad \text{et} \qquad E_i = 0$$

mais cela ne veut pas dire qu'il existe un noyau singulier symétrique donnant lieu à cette éventualité.

5° Avec les hypothèses I, II, III de M. Kellog, l'existence d'une suite qui converge uniformément, donc aussi en moyenne, était assurée par le théorème d'Ascoli et c'est la circonstance *b* qui se présentait