Bulletin de la S. M. F.

A. Bloch

Démonstration arithmétique de l'équivalence des différentes expressions classiques du nombre π

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 205-213
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__205_0>

DÉMONSTRATION ARITHMÉTIQUE DE L'ÉQUIVALENCE DES DIFFÉRENTES EXPRESSIONS CLASSIQUES DU NOMBRE π.

Par M. A. Bloch.

1. On sait de quelle utilité est le théorème de Liouville dans la théorie moderne des fonctions elliptiques; la relation entre la fonction pu et sa dérivée, par exemple, en est une conséquence immédiate. Le même théorème permet d'ailleurs d'édifier, de manière absolument parallèle la théorie des fonctions circulaires (¹), considérées comme fonctions simplement périodiques se comportant à l'infini d'une manière particulière.

Mais on peut aussi chercher à se passer de ce théorème d'analyse générale, et à construire les théories en question de manière purement algébrique; l'intérêt de ces considérations est qu'elles conduisent à des propositions en termes finis d'où se déduisent par passage à la limite les propositions relatives aux fonctions transcendantes; ce qui justifie une fois de plus le principe : *Nil est in infinito quod non prius fuerit in finito.* Deux méthodes se présentent dans cet ordre d'idées, différant par la nature des fonctions algébriques qui deviennent à la limite circulaires ou elliptiques; dans la première elles ressemblent aux transcendantes dont elles sont une approximation plutôt par leurs propriétés que par leur forme; dans la seconde elles leur ressemblent plutôt par leur forme que par leurs propriétés. Nous allons indiquer succinctement ces deux méthodes; l'une et l'autre ne sont, au fond, pas nouvelles; la manière dont Euler a établi pour la première fois les développements en produits infinis et en séries de fractions des fonctions circulaires relève de la première; l'étude faite par plusieurs géomètres (²) de la fonction pu, indépendamment du théorème de Liouville, est probablement voisine de la seconde.

(¹) Méray, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale*, t. II.

(²) *Cf.* par exemple, Eisenstein, *Mathematische Abhandlungen*, p. 213; R. Garnier, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications* par P. Appell et E. Lacour, deuxième édition,

2. Première méthode. — Considérons le groupe à une période, engendré par la substitution $|x, x+a|$; il s'obtient, par un procédé bien connu, à partir du groupe cyclique engendré par $|x, \alpha x|$, α étant une racine $m^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, lorsqu'on fait croître m indéfiniment. On peut donc, pour arriver aux propriétés des fonctions circulaires, commencer par étudier les fractions rationnelles en x, invariantes dans le groupe cyclique en question. Ces fractions ne sont autres que les fractions symétriques en $\frac{x}{\alpha_1}, \ldots, \frac{x}{\alpha_i}, \ldots, \frac{x}{\alpha_m}$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m$ sont les m racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et ce sont aussi tout simplement les fractions rationnelles en x^m. L'ordre d'une fraction invariante par le groupe est le nombre de fois qu'elle prend la même valeur dans un secteur d'angle $\frac{2\pi}{m}$ ayant l'origine pour sommet; c'est aussi son degré en x^m; deux fractions d'ordres respectifs μ et ν sont liées par une relation algébrique qui est généralement de degré ν par rapport à la première, de degré μ par rapport à la seconde; ces degrés peuvent toutefois s'abaisser dans des cas particuliers.

Nous allons considérer des sommes d'éléments simples [1]; on pourrait aussi de la même manière considérer des produits ou des fonctions symétriques quelconques en $\frac{x}{\alpha_1}, \ldots, \frac{x}{\alpha_m}$.

On a

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{\frac{x}{\alpha_i} - 1} = \frac{m}{x^m - 1}, \qquad \sum \frac{\frac{x}{\alpha_i} + 1}{\frac{x}{\alpha_i} - 1} = m \frac{x^m + 1}{x^m - 1}.$$

Soit ε la racine carrée d'une racine $m^{\text{ième}}$ primitive de l'unité. On a de même

$$(2) \qquad \sum \frac{1}{\frac{\varepsilon x}{\alpha_i} + 1} = \frac{m}{x^m + 1}, \qquad \sum \frac{\frac{\varepsilon x}{\alpha_i} - 1}{\frac{\varepsilon x}{\alpha_i} + 1} = m \frac{x^m - 1}{x^m + 1}.$$

On peut, comme on sait, en posant $x = 1 + \frac{2it}{m}$ et faisant croître m indéfiniment, obtenir comme conséquences de ces relations les développements en séries de fractions des fonctions

---

[1] La méthode actuelle serait peut-être de quelque utilité dans la théorie de la ofnction $\zeta(s)$ de Riemann.

circulaires, supposées définies au moyen de la fonction exponentielle. Mais ici, nous ne nous occupons pas de la fonction exponentielle, ni même des fonctions circulaires, nous avons seulement pour objet la comparaison directe des sommes ou des séries.

Nous avons par exemple

$$(3) \qquad \sum \frac{\frac{x}{\alpha_i}+1}{\frac{x}{\alpha_i}-1} \times \sum \frac{\frac{\varepsilon x}{\alpha_i}-1}{\frac{\varepsilon x}{\alpha_i}+1} = m^2.$$

En effectuant sur x une substitution linéaire convenable et faisant croître m indéfiniment, on obtient, en s'appuyant sur les propriétés les plus simples des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité,

$$(4) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u-n} \times \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2}-u-n} = \text{const.} = 16\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ldots\right)^2.$$

Les $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}$ sont étendues aux valeurs entières de n, de $-\infty$ à $+\infty$; la sommation est effectuée simultanément vers $-\infty$ et $+\infty$, à partir d'un terme central déterminé; ceci évite l'adjonction de la fraction $\frac{1}{n}$ destinée à assurer la convergence.

De (1) l'on déduit en dérivant :

$$(5) \qquad \sum \frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\left(\frac{x}{\alpha_i}-1\right)^2} = \frac{m^2 x^{m-1}}{(x^m-1)^2},$$

d'où résulte, eu égard à (1),

$$(6) \qquad \sum \left(\frac{\frac{x}{\alpha_i}+1}{\frac{x}{\alpha_i}-1}\right)^2 = -m(m-1)+\left[m\,\frac{x^m+1}{x^m-1}\right]^2$$
$$= -m(m-1)+\left(\sum \frac{\frac{x}{\alpha_i}+1}{\frac{x}{\alpha_i}-1}\right)^2$$

Il n'y a pas de difficulté à déduire de cette formule, par passage à la limite, la relation

$$(7) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-n)^2} - \left(\sum \frac{1}{u-n}\right)^2$$
$$= \text{const.} = -8\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots\right).$$

La valeur de la constante s'obtient en faisant $u = \frac{1}{2}$. Si l'on fait ensuite $u = \frac{1}{4}$, on trouve :

$$(8) \qquad 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)^2.$$

Posons $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)^q} = T_q$; la relation (8) s'écrit : $T_2 = 2(T_1)^2$. En dérivant $q-2$ fois la relation (7), on obtient l'expression de $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(u-n)^q}$ sous forme d'un polynome entier en $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u-n}$ (expression que l'on peut aussi obtenir directement en commençant par dériver $q-1$ fois la relation (1)).

Si l'on pose

$$1 + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^q} + \dots + \frac{1}{n^q} + \dots + = S_q,$$

on a

$$S_{2r} = \frac{2^{2r}}{2^{2r}-1} T_{2r}.$$

T_q est d'après ce qui précède le produit de $(T_1)^q$ par un nombre rationnel. S_{2r} est donc le produit de $(T_1)^{2r}$ par un nombre rationnel.

On peut développer pour les fonctions elliptiques une théorie analogue à celle qui vient d'être esquissée pour les fonctions circulaires. Il convient à cet effet, étant donnée la surface de Riemann d'une courbe de genre un, de supposer exécuté sur elle un quadrillage convenable déterminant sa division en $m_1 \times m_2$ régions, ces régions étant congruentes par $m_1 \times m_2$ transformations birationnelles de la courbe en elle-même, transformations appartenant non plus comme précédemment à un groupe cyclique, mais à un groupe abélien de rang deux; la question se trouve ainsi liée au problème de la transformation et à celui de la division des périodes;

il n'y a pas de difficulté théorique à la traiter directement (sans parler de fonctions elliptiques) de manière analogue à la précédente, mais seulement de légères complications matérielles supplémentaires, dues à la nécessité de considérer, au lieu d'une seule variable, les deux coordonnées du point de la cubique normale de genre un. De même que l'on avait tout à l'heure des fractions rationnelles approximations des fonctions circulaires, on a ici des fonctions algébriques très voisines des fonctions elliptiques, tant au point de vue quantitatif que par leurs propriétés fonctionnelles; et ces considérations pourraient être étendues à la fonction modulaire. Le point à signaler ici, c'est que l'on sera conduit de la sorte à la relation algébrique entre la série pu et la série $p'u$, et aux expressions des sommes des inverses des puissances $q^{\text{ièmes}}$ des périodes en fonction des deux premières.

3. Deuxième méthode. — La méthode précédente est la plus intéressante au point de vue fonctionnel; par contre, comportant l'introduction de nombres irrationnels et imaginaires, elle ne donne pas une vision arithmétique simple et directe des propriétés à établir; ce dernier avantage est obtenu, à l'exclusion du premier, par une seconde méthode, que nous nous bornerons ici à appliquer aux fonctions circulaires.

Posons

$$\Pi(n, z) = \frac{\left(1+\frac{2z}{2n-1}\right)\cdots\left(1+\frac{2z}{1}\right)\left(1-\frac{2z}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{2z}{2n-1}\right)}{\left(1+\frac{z}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{1}\right)z\left(1-\frac{z}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n}\right)};$$

le numérateur a $2n$ termes, le dénominateur $2n+1$; la décomposition en éléments simples est donc

$$(9)\quad \Pi(n, z) = \frac{1}{z} + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2p-1}{(2n-2p+1)(2n-2p+3)\ldots(2n-1)} \times \frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\left[\frac{1}{z-p}+\frac{1}{z+p}\right].$$

En faisant croître n indéfiniment, on trouve

$$(10)\quad \lim_{n=\infty} \Pi(n, z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-p}.$$

Il est aisé, par la même voie, de prouver l'équivalence de l'expression de $\frac{\pi}{2}$ par la formule de Wallis et celle de $\frac{\pi}{4}$ par la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$. On a en effet, directement

$$(11) \qquad \Pi\left(n, \frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{2.2\ldots 2n \times 2n}{1.3\ldots(2n-1)\,2n+1)} \times \frac{2n+1}{4n+1}.$$

Donc, d'après (9),

$$(12) \qquad \begin{aligned} &\frac{2.2\ldots 2n \times 2n}{1.3\ldots(2n-1)(2n+1)} \times \frac{2n+1}{4n+1} \\ &= 1 - \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(2+1)(2n+3)\ldots(2n+2p-1)}{(2n-2p+1)(2n-2p+3)\ldots(2n-1)} \\ &\quad \times \frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots n)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}\left(\frac{1}{4p-1} - \frac{1}{4p+1}\right) \\ &= 1 - \frac{2n+1}{2n-1}\,\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \\ &\quad - \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n-3)(2n-1)}\,\frac{(n-1)n}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \ldots \\ &\quad - \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(4n-1)}{1.3\ldots)(2n-1)} \\ &\quad \times \frac{1.2\ldots n}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right) \end{aligned}$$

Cette formule en termes finis, d'ailleurs aisée à vérifier directement, donne bien, lorsque n croît indéfiniment, l'égalité en question.

Passons à la comparaison des séries de fractions entre elles. Considérons la différence

$$\left(\frac{1}{z+n} + \ldots + \frac{1}{z-n}\right)^2 - \left(\frac{1}{(z+n)^2} + \ldots + \frac{1}{(z-n)^2}\right).$$

Sa décomposition en éléments simples ne comprend que des fractions du premier degré, et pas de terme constant. Le coefficient de $\frac{1}{z-p}$ est

$$2\left[\frac{1}{n-p+1} + \frac{1}{n-p+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right];$$

le coefficient de $\frac{1}{z+p}$ est égal et de signe contraire; on a donc

$$(13)\qquad \left(\frac{1}{z+n}+\ldots+\frac{1}{z-n}\right)^2-\left[\frac{1}{(z+n)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-n)^2}\right]$$
$$=4\sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1}{n-p+1}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\frac{p}{z^2-p^2}.$$

Nous allons voir que, pour n infini, le second membre a une limite indépendante de z. Faisons à cet effet par exemple $z=0$ dans cette égalité et retranchons membre à membre l'égalité obtenue de la précédente; il vient

$$6\left[\frac{1}{1^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right]+\left(\frac{1}{z+n}+\ldots+\frac{1}{z-n}\right)^2-\left[\frac{1}{(z+n)^2}+\ldots+\frac{1}{(z-n)^2}\right]$$
$$=4\sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1}{n-p+1}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\frac{z^2}{p(z^2-p^2)}.$$

Prouvons que le second membre est nul pour n infini; z étant donné, on peut trouver A tel que, quel que soit p entier positif, l'on ait

$$\left|\frac{z^2}{p(z^2-p^2)}\right|=|u_p|<\frac{A}{p(p+1)}=A\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right].$$

Alors

$$\left|\sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1}{n-p+1}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right)\frac{z^2}{p(z^2-p^2)}\right|$$
$$=\left|\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)(u_1+\ldots u_n)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+2}\right)(u_2+\ldots+u_n)+\ldots+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2n}\right)u_n\right|,$$

$$(14)\quad <2A\left[\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$
$$=\frac{2A}{n+1}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Or

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<\frac{q-1}{n}+\frac{1}{q}<\frac{2}{\sqrt{n}},$$

q étant un entier quelconque positif et inférieur à n, supposé ensuite compris entre $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n}+1$. Ainsi

$$(15)\qquad \left|\sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1}{n-p+1}+\dots+\frac{1}{n+p}\right)\frac{z^2}{p(z^2-p^2)}\right|<\frac{4A}{\sqrt{n}},$$

ce qui justifie notre assertion. On obtient donc bien la relation (7).

Pour trouver une relation en termes finis analogue à la relation (12), on peut utiliser le calcul précédent; on peut aussi le reprendre en faisant $z=\frac{1}{2}$ dans l'égalité (13), il vient

$$\begin{aligned} 8\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]&+\left(\frac{1}{z+n}+\dots+\frac{1}{z-n}\right)^2 \\ -\left[\frac{1}{(z+n)^2}+\dots+\frac{1}{(z-n)^2}\right]& \\ =4\sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1}{n-p+1}+\dots+\frac{1}{n+p}\right)&\frac{p\left(\frac{1}{4}-z^2\right)}{(z^2-p^2)\left(\frac{1}{4}-p^2\right)}; \end{aligned}$$

d'où, en faisant $z=\frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} (16)\qquad -\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{(4n+1)^2}\right)&+2\left(1-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{4n+1}\right)^2 \\ =\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+3)^2}+\dots&+\frac{1}{(4n+1)^2} \\ +\frac{3}{32}\sum_{p=1}^{p=n}\left(\frac{1}{n-p+1}+\dots+\frac{1}{n+p}\right)&\frac{p}{\left(p^2-\frac{1}{16}\right)\left(p^2-\frac{1}{4}\right)} \end{aligned}$$

et le second membre de cette égalité, comme d'ailleurs celui de la précédente, est nul pour n infini. On a, de plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots&+\frac{1}{(4n+2)^2} \\ =\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{(2n+1)^2}\right]&+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{(4n+1)^2}. \end{aligned}$$

4. Nous allons indiquer succinctement, pour terminer, d'autres moyens, probablement inédits, eux aussi, pour obtenir les développements en produits infinis, ou en séries de fractions, des fonctions trigonométriques. Rappelons, à titre documentaire, qu'il a été publié depuis Euler de nombreux moyens pour les obtenir, ils s'appliquent aussi au calcul de T_q; pour le calcul de T_q, le plus pratique consiste à intégrer terme à terme à plusieurs reprises la série de Fourier $\frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x \ldots.$

A. On démontre aisément la formule

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos}{\sin} 2ux \sin^{2m} x \, dx = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \frac{\sin \pi u \frac{\cos}{\sin} \pi u}{(m-u)\ldots(1-u)u(1+u)\ldots(m+u)}$$

et l'on en déduit sans peine une démonstration du développement en produit de $\sin \pi u$ analogue à une démonstration classique de la formule de Wallis.

B. On a

$$\int_0^{\infty} e^{-ux} \cos nx \, dx = \frac{u}{u^2 + n^2};$$

le second membre est l'élément simple du développement de $\frac{\pi}{2}$ cth πu; le calcul auquel on est conduit est simple et intéressant.

C. Voici un moyen élémentaire et rapide pour calculer S_2 par intégrales définies :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda \, dx}{1+\lambda^2 x^2},$$

$$\frac{\pi}{2(1+\lambda^2)} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda \, dx}{(1+\lambda^2)(1+\lambda^2 x^2)},$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{dt \, dx}{2(1+t)(1+x^2 t)} = \int_0^{\infty} \frac{\log x^2}{2(x^2-1)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\log x^2}{x^2-1} dx = \int_0^1 \frac{2 \log x}{x-1} dx - \int_0^1 \frac{\log x^2}{x^2-1} x \, dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = \frac{3}{2} S_2.$$

Donc

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Il serait sans doute possible et intéressant d'étendre ce procédé de calcul à la démonstration de l'équation différentielle du développement en série de fractions de π cot. πu.