BULLETIN DE LA S. M. F.

G. JULIA

Sur le domaine d’existence d’une fonction implicite définie par une relation entière $G(x, y) = 0$

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 26-37
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__26_0>

SUR LE DOMAINE D'EXISTENCE D'UNE FONCTION IMPLICITE DÉFINIE PAR UNE RELATION ENTIÈRE $G(x, y) = 0$;

Par M. Gaston Julia.

1. Le but du présent Mémoire est de donner quelques indications sur les bornes du domaine d'existence d'une fonction $y(x)$ définie par une relation irréductible $G(x, y) = 0$, où G est une fonction *entière* des deux variables x et y. Lorsque G est simplement linéaire en x, on sait par le théorème classique de M. Picard que la fonction $y(x)$, alors fonction inverse d'une fonction méromorphe, est définie dans tout le plan x, sauf en deux points au plus : la surface de Riemann R_x, sur laquelle $y(x)$ est uniforme, laisse donc au plus deux points du plan x à découvert et ces deux points sont d'ailleurs des points frontière de R_x. Relativement au cas où G est un polynome en x, dont les coefficients sont des fonctions entières de y, M. Remoundos a montré que la surface de Riemann R_x ne peut laisser à découvert qu'un *nombre fini* de points x, nombre dépendant du degré de G par rapport à x.

Envisageant ici le cas où G est entière à la fois par rapport à x et à y, on verra que l'ensemble E des points x pour lesquels y n'est pas défini, c'est-à-dire pour lesquels l'équation $G(x, y) = 0$, n'admet pas de racine en y, peut être un ensemble infini dénombrable, mais *ne peut certainement pas comporter un continu.* Pour abréger, on appellera points exceptionnels les points x de l'ensemble E.

Ces points, que la surface de Riemann R_x laisse à découvert, sont toujours des points frontière de cette surface, et lorsque x tend vers un de ces points en restant intérieur à R_x, $y(x)$ tend vers l'infini.

Dans le premier paragraphe on montre que E peut contenir une infinité dénombrable de points; dans le deuxième, on établit que $y(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers un point frontière quelconque de R_x, en restant intérieur à R_x. Et à l'aide de cette propriété on établit aisément (troisième paragraphe) que la surface R_x

ne peut laisser à découvert un continu du plan x, d'où suit la propriété de E signalée plus haut. Resterait à voir si cet ensemble E, sans être continu, peut avoir la puissance du continu.

Dans un dernier paragraphe, on donnera quelques indications sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des points x pour lesquels *$y(x)$ n'a qu'un nombre fini de déterminations*. Et l'on montrera sur un exemple que cet ensemble peut être *dénombrable et dense dans tout le plan*.

I. — L'ensemble E peut être un ensemble dénombrable quelconque ayant l'infini pour seul point limite.

2. On va le prouver en construisant une fonction entière $G(x, y)$, qui pour $x = x_i (i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *se réduira à une fonction entière en y du type exponentiel $\Phi_i(y) = e^{\varphi_i(y)}$ où φ_i est fonction entière de y*. L'ensemble E des x_i sera un ensemble dénombrable ayant l'infini pour seul point limite, et par ailleurs quelconque. On assujettira en outre $G(x, y)$ à cette autre condition : pour $x = x_0$, $G(x_0, y)$ sera une fonction entière de y, $\Phi_0(y)$, et l'on supposera que $\Phi_0(y)$ *a une infinité de zéros*. De cette façon, il sera clair que l'équation $G(x, y) = 0$ déterminera une fonction $y(x)$, qui aura une infinité de déterminations pour $x = x_0$, et par conséquent, en général, tandis qu'elle n'a aucune valeur finie pour x appartenant à l'ensemble E.

3. Soit $F(x)$ un produit canonique de facteurs primaires admettant pour zéros simples tous les points de E et en outre le point x_0. On pourra supposer que les points de E sont rangés dans un ordre tel que $|x_n|$ croît et devient infini avec n.

La fonction

$$F_i(x) = \frac{1}{F'(x_i)} \frac{F(x)}{x - x_i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

admet les points $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots,$ pour zéros simples et en outre

$$F_i(x_i) = 1.$$

Formons la série

$$G(x, y) = F_0(x)\Phi_0(y) + \sum_1^\infty \frac{F_i(x)\Phi_i(y)}{A_i}, \tag{1}$$

les A_i étant des constantes que l'on va choisir convenablement.

En supposant qu'elle converge uniformément dans le domaine

$$|x| \leqq r, \qquad |y| \leqq R$$

[quels que soient r et R] elle définira une fonction entière $G(x, y)$, qui, pour $x = x_0$, se réduira bien à $\Phi_0(y)$ et pour $x = x_i$ se réduira à $\frac{\Phi_i(y)}{A_i}$, c'est-à-dire à une fonction entière en y, de type exponentiel, jamais nulle; $G(x, y)$ aura les propriétés réclamées.

4. On va choisir les A_i de manière à assurer la convergence de

$$\sum_1^\infty \frac{F_i(x)\,\Phi_i(y)}{A_i}. \tag{2}$$

Désignons par $M(r)$ le maximum du module de $|F(x)|$ sur le cercle $|x| = r$. Il est clair que, r étant donné, on aura pour $i \geqq i_0$, dès que $|x_i|$ sera $> r + \delta$,

$$|F_i(x)| \leqq \frac{M(r)}{|F'(x_i)|\,\delta} \qquad \text{lorsque} \qquad |x| \leqq r.$$

Soit d'autre part $\mu_i(R)$ le maximum du module de

$$\Phi_i(y) \qquad (i = 1, \ldots, \infty)$$

sur le cercle $|y| = R$.

On va choisir les $|A_i|$ de façon à assurer la convergence de

$$\sum_1^\infty \frac{|F_i(x)|\,|\Phi_i(y)|}{|A_i|} \tag{3}$$

quels que soient x et y.

Donnons-nous r et R, d'ailleurs quelconques positifs, et considérons seulement les termes de (2) pour lesquels $|x_i| \geqq r + \delta$; (3) est alors majorée par la série

$$\sum_1^\infty \frac{M(r)\,\mu_i(R)}{|A_i|\,|F'(x_i)|\,\delta}, \tag{4}$$

si donc (4) converge, quels que soient r et R, on sera sûr que (2) converge uniformément quels que soient r et R.

Il suffit pour cela de choisir les $A_i F'(x_i) = \alpha_i$ de manière que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu_i(R)}{|\alpha_i|} \tag{5}$$

converge quel que soit R.

Or, pour un indice i déterminé, $\mu_i(R)$ croît avec R. Choisissons une suite de rayons $R_1 < R_2 < R_3 < \ldots < R_n < \ldots$ croissant indéfiniment et tendant vers l'infini avec l'indice n. On pourra toujours choisir la suite des nombres α_i de manière que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu_i(R_i)}{|\alpha_i|} \tag{6}$$

soit convergente. Il en résulte que la série (5) est convergente quel que soit R, puisque, à partir d'un certain rang i, on a $R < R_i$ et par suite $\mu_i(R) < \mu_i(R_i)$. Donc la série (4) convergera, par suite (2) convergera uniformément et $G(x, y)$ aura bien les propriétés requises, sous la seule condition que la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\mu_i(R_i)}{|A_i F'(x_i)|} \tag{6}$$

soit convergente. L'ensemble E était d'ailleurs quelconque et la seule condition à laquelle soient assujettis les $|A_i|$ est une condition de croissance.

II. — Allure de $y(x)$ aux points frontière de R_x.

5. Soit x_0 une valeur quelconque de x; $G(x_0, y) = 0$ ne peut avoir que des racines *isolées* $y_1^0, y_2^0, y_n^0, \ldots$ (¹) dont le seul point limite est l'∞, et qui d'ailleurs pourraient ne pas exister.

De l'origine comme centre, dans le plan y, décrivons un cercle C de rayon R arbitrairement grand *ne passant par aucun des points* y_n^0. Ce cercle contiendra les points $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$; à l'extérieur de C seront les points $y_{n+1}^0, \ldots$.

L'ensemble des déterminations de $y(x)$, prenant la valeur y_i^0 pour $x = x_0$, constitue une fonction algébroïde de x dans un

(¹) Les y_i^0 sont supposées distinctes, chacune pouvant être racine multiple de l'équation $G(x_0, y) = 0$.

certain cercle γ de centre x_0, et qui n'a dans ce cercle qu'un point critique algébrique au plus le point x_0. Lorsque x décrit ce cercle la détermination considérée décrit une petite aire entourant le point y_i^0. On peut trouver un cercle γ_ρ de centre x_0, de rayon ρ, tel que les déterminations de $y(x)$ prenant les valeurs $y_1^0, \ldots, y_n^0$ pour $x = x_0$ décrivent des aires toutes intérieures à C, et extérieures deux à deux, lorsque x décrira γ_ρ; en outre les déterminations de $y(x)$ prenant les valeurs $y_{n+1}^0, \ldots$, pour $x = x_0$, décriront des aires *extérieures* à C.

Que l'on puisse trouver un cercle γ_ρ tel que les déterminations de $y(x)$ égales à $y_1^0, \ldots, y_n^0$ en x_0 décrivent des aires intérieures à C et deux à deux extérieures, cela est évident d'après le théorème général sur les fonctions implicites. En ce qui concerne les déterminations *extérieures à* C, il ne serait impossible de trouver γ_ρ que si, quelque petit que soit ρ, l'aire décrite par une de ces déterminations *rencontrait* C, ce qui équivaudrait à dire que pour toute valeur ρ_i de ρ on pourrait trouver sur C un point Y_i et dans le cercle $|x - x_0| \leqq \rho_i$ un point X_i tels que

$$G(X_i, Y_i) = 0.$$

Lorsque ρ_i tend vers zéro, les points x_i tendent vers x_0; les points Y_i situés sur C ont au moins un point limite Y. Au point (x_0, Y) la fonction $G(x, y)$ est holomorphe. Les points (X_i, Y_i) admettent pour point limite le point $(x_0 Y)$, et l'on sait que $G(X_i, Y_i) = 0$. On aurait donc $G(x_0, Y) = 0$. Par conséquent, le cercle C passerait par une des racines y_i^0 de $G(x_0, y) = 0$ contrairement à l'hypothèse. On conclut de là que, si l'on entoure $y_1^0, \ldots, y_n^0$ de cercles $C_1^0, \ldots, C_n^0$ intérieurs à C et de rayons μ arbitrairement petits, et si l'on choisit ρ assez petit, la fonction $G(x, y)$ ne s'annulera jamais lorsque y décrira l'intérieur et le contour de l'aire Δ intérieure à C et extérieure aux C_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et x l'aire du cercle γ_ρ de centre x_0. Dans le domaine ainsi défini par le point (x, y), on aura $|G(x, y)| > \varepsilon$. Si, pour $x = x_0$, l'équation $G(x, y) = 0$ n'avait pas de racines, ce qu'on vient de dire s'appliquerait au domaine (x, y) défini par l'intérieur du cercle γ_ρ pour x et l'intérieur du cercle C pour y, ce qui revient en somme à dire qu'en ce cas, au voisinage de x_0, toutes les valeurs de $y(x)$ sont en valeur absolue arbitrairement grandes [$|y(x)| > R$, aussi grand que soit R] pourvu que x soit suffisamment voisin de x_0, c'est-à-dire $|x - x_1| < \rho$, ρ assez petit.

6. Partons maintenant d'un point x_1 de la surface de Riemann R_x, avec la détermination correspondante de $y(x_1)$. Nous choisirons ensuite le rayon R de C supérieur à la valeur absolue de cette détermination de $|y(x_1)|$ et d'ailleurs *arbitrairement grand* et nous pouvons toujours supposer $y(x_1)$ différent des valeurs $y_1^0, \ldots, y_n^0$. ρ et μ pourront dès lors être choisis suffisamment petits pour que la valeur $y(x_1)$ soit intérieure au domaine Δ du n° 5, c'est-à-dire extérieure aux cercles C_i^0 ($i = 1, 2, \ldots, n$) et intérieure au cercle C.

Faisons décrire à la variable x un chemin allant, sur R_x, du point x_1 au point x_0, à condition bien entendu que le point x_0 soit un point intérieur ou un point frontière de cette surface. x_0 sera point intérieur à un feuillet de R_x si, en opérant le prolongement analytique de $x(y)$ à partir de x_1 et de la détermination considérée, on peut atteindre x_0 au bout d'un nombre fini d'opérations, le nombre des déterminations obtenues en x_0 par tous les modes possibles de prolongement analytique représentera le nombre des feuillets de R_x sur lesquels x_0 est un point intérieur. x_0 sera point frontière de R_x si, en opérant par prolongement analytique à partir de x_1, on peut atteindre des points arbitrairement voisins de x_0, sans jamais atteindre x_0. Que x_0 soit point intérieur ou point frontière de R_x, on va voir que lorsque x tend vers x_0, $y(x)$ a toujours une limite *déterminée* qui est *soit une des racines de l'équation* $G(x_0, y) = 0$ (alors x_0 est intérieur à R_x, sur un des feuillets), soit *l'infini* (alors x_0 est point frontière de R_x). En effet, partant de x_1 on pourra toujours approcher aussi près qu'on voudra de x_0 en restant sur R_x; la valeur de $y(x)$ partant de $y(x_1)$ décrira un chemin continu dans le plan des y. La valeur initiale $y(x_1)$ appartient au domaine Δ intérieur à C et extérieur aux cercles C_i^0, mais dès que x pénètre dans le cercle γ_ρ, $|x - x_0| < \rho$, le point $y(x)$ correspondant ne pourra plus appartenir à Δ, puisque dans Δ $|G(x, y)| > \varepsilon$. Le chemin décrit par $y(x)$, partant de $y(x_1)$: ou bien aura donc pénétré dans un des cercles C_i^0, dont il ne pourra désormais plus sortir, ou bien franchit la circonférence du cercle C pour ne plus rentrer dans C;

en d'autres termes on aura dès que $|x - x_0| < \rho$, ou bien

$$|y(x) - y_i^0| < \eta \qquad (i \text{ ayant une certaine valeur}),$$

ou bien

$$|y(x)| > \mathrm{R}.$$

Les nombres η et R ayant été choisis arbitrairement (petit et grand) cela montre que, x tendant vers x_0, *y tend vers une des racines y_i^0 de $\mathrm{G}(x_0, y) = 0$ ou vers l'infini*. Dans le premier cas, comme le point (x_0, y_i^0) est, point ordinaire pour $\mathrm{G}(x, y)$, il est clair que la détermination finale de $y(x)$ sera algébroïde en x_0 et coïncidera avec l'une des déterminations égales à y_i^0 en x_0. Le point x_0, alors un point intérieur de R_x, sera point simple ou point critique algébrique de $y(x)$.

Dans le deuxième cas x_0 considéré est un point frontière. Il se peut d'ailleurs qu'en suivant un autre chemin pour aller de x_1 à x_0 on ait pu *atteindre* effectivement x_0, parce que x_0 peut être point frontière sur un ou plusieurs feuillets, et point intérieur sur d'autres, c'est ce qui arrivera par exemple si l'équation $\mathrm{G}(x_0, y) = 0$ n'a qu'un *nombre fini de racines*. En suivant certains chemins à partir de x_1, on pourra atteindre x_0 avec des déterminations de $y(x)$ égales à ces racines, et en suivant d'autres chemins $y(x)$ tendra vers l'infini quand x tendra vers x_0. Si enfin $\mathrm{G}(x_0, y) = 0$ n'a pas de racines et si cependant elle en a pour des points infiniment voisins de façon qu'on puisse s'approcher indéfiniment de x_0 par prolongement analytique, x_0 sera point frontière sur tous les feuillets de R_x. Quel que soit le chemin suivi pour aller de x_1 en x_0 sur R_x, la détermination de $y(x)$ tendra vers l'infini quand x tendra vers x_0.

7. En définitive, si x décrit un chemin *aboutissant à un point accessible de la frontière de la surface de Riemann* R_x, *$y(x)$ tend toujours vers l'infini.*

On remarquera l'analogie de l'analyse précédente avec celle de M. Iversen [1] pour le cas où $\mathrm{G}(x, y)$ *est linéaire en* x [$y(x)$, fonction inverse de fonction méromorphe].

---

[1] F. Iversen, *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes* (*Thèse*, Helsingfors, 1914).

On remarquera en outre que l'analyse précédente repose sur ce double fait :

1° Le chemin que décrit x admet x_0 pour limite et x_0 seulement;

2° $y(x)$ décrit un chemin *continu* qui dès lors s'enferme dans un C_i^0 ou sort de C. On ne peut donc affirmer la conclusion que si x_0 est point *frontière accessible* de R_x de façon qu'il existe sur R_x des chemins continus ayant x_0 pour point limite unique.

Le point $x = \infty$ lui-même est un point frontière de R_x. Sur les chemins de R_x qui aboutissent à $x = \infty$, l'allure de $y(x)$ est moins simple que celle de $y(x)$ au voisinage des points accessibles de la frontière de R_x à distance finie. Ici $y(x)$ peut n'avoir pas de limite déterminée car la ligne $x = \infty$ est une ligne singulière essentielle pour la fonction $G(x, y)$. Mais, si par exemple la surface de Riemann R_y du plan y, sur laquelle est uniforme la fonction $x(y)$ définie par $G(x, y) = 0$, a des points frontière accessibles, chacun de ces points frontière sera la limite atteinte par $y(x)$ quand x tend vers l'infini sur R_x par un chemin convenable; on le verrait de la même façon que précédemment on a vu que $y(x)$ tendait vers l'infini quand x tendait par un chemin continu vers un point frontière accessible de R_x. En ce sens on peut dire que les points frontière accessibles de R_x *sont les valeurs asymptotiques de la fonction $x(y)$ quand y tend vers l'infini* par des chemins convenables de R_y, et inversement.

III. — La surface R_x ne peut laisser a découvert un continu du plan x.

8. En définitive $y(x)$ est une fonction holomorphe *sur* R_x, et telle que si x tend par un chemin continu (ligne de Jordan ou chemin formé par exemple d'une suite dénombrable de segments de droite) vers un point frontière accessible de R_x, $y(x)$ *tend vers l'infini*. Les zéros de $y(x)$ sur R_x correspondent aux x racines de l'équation

$$G(x, 0) = 0,$$

ce sont des points $x_1^0, \ldots, x_n^0, \ldots$ qui sont en nombre limité ou bien ont pour seul point limite $x = \infty$. La fonction $Y(x) = \frac{1}{y(x)}$ est *uniforme et analytique sur* R_x, et sur R_x elle ne peut admettre comme singularité que des pôles aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ci-dessus; de plus sur chacun des chemins de R_x tendant vers un point frontière accessible, elle tend VERS ZÉRO.

Dans ces conditions on peut appliquer le théorème suivant :

« *Si une fonction* $w = f(z)$ *est analytique et uniforme sur une surface de Riemann* R *du plan* z, *qui laisse à découvert un certain continuum de valeurs et si* $f(z)$ *converge vers zéro sur toute ligne de Jordan qui tend vers un point frontière accessible de* R, *alors* $f(z)$ *est identiquement nulle.* »

Ce théorème, énoncé par M. Zoretti dans son Livre *Leçons sur le Prolongement analytique* n'y est pas démontré d'une façon satisfaisante. La question a été reprise par M. W. Gross dans un Mémoire des *Math. Annalén*, t. 78, intitulé *Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten* où l'on trouvera énoncées quelques objections qu'on peut faire à la démonstration de M. Zoretti. La démonstration donnée par M. Gross aux nos 2, 3, 4 de son Mémoire ne laisse rien à désirer. Elle s'applique aussitôt à notre fonction $Y(x)$ après les quelques précautions suivantes nécessitées par les pôles de $Y(x)$.

Supposons que R_x laisse à découvert un certain continu $\mathfrak{F}$. On a vu que, pour que $y(x)$ fût nul il fallait que x eût l'une des valeurs $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \ldots$. Si l'on raisonne dans le plan x comme on a raisonné aux nos 5 et 6 du présent Mémoire dans le plan y, et inversement, on pourra tracer dans le plan x un cercle Γ de centre O, de rayon R arbitrairement grand, ne passant par aucun des x_i^0 et autour des x_i^0 *intérieurs à* Γ, des cercles γ_i^0 de rayon η arbitrairement petits de façon que lorsque $|y|$ restera $< \rho$, ρ étant choisi assez petit, les racines $x(y)$ de $G(x, y) = 0$ restent ou bien intérieures aux cercles γ_i^0 ou extérieures à Γ. C'est-à-dire lorsque x sera extérieur aux γ_i^0 et intérieur à Γ, $y(x)$ définie par $G(x,y) = 0$ devra nécessairement être en valeur absolue $> \rho$. Il suffit alors de considérer la partie de R_x qui se projette dans le domaine Δ intérieur à Γ extérieur aux γ_i^0, η et $\frac{1}{R}$ étant arbitrairement petits, il y aura toujours une partie de $\mathfrak{F}$ dans Δ; dans la partie de R_x intérieure à Δ on aura $|y| > \rho$ et par conséquent $|Y(x)| < \frac{1}{\rho}$, il n'y aura dès lors qu'à appliquer mot pour mot la démonstration du n° 4 du Mémoire de M. Gross pour conclure que $Y(x)$ devrait être identiquement nul. La contradiction à laquelle on arrive démontre bien que l'on ne peut admettre l'existence d'un continu $\mathcal{F}$ en tout point duquel l'équation $G(\xi, y) = 0$ n'aurait pas de racine en y.

9. L'ensemble E des x pour lesquels $y(x)$ n'a pas de valeur finie ne peut être un continu. Remarquons, ce qui est presque évident, que E EST FERMÉ, parce que si en un point x_0, $y(x)$ a une valeur finie, il en sera de même dans un certain cercle de centre x_0. Mais E peut contenir des points isolés [par exemple pour

$$G(x, y) = x - e^y = 0,$$

où E compte seulement le point $x = 0$ à distance finie]. E se décompose donc en un *ensemble dénombrable et en un ensemble parfait qui devra être nul ou discontinu*. Le cas d'un ensemble parfait discontinu est-il possible effectivement, ou bien faut-il admettre que E est nécessairement dénombrable, il serait intéressant de le décider.

IV. — Sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des points x pour lesquels $y(x)$ n'a qu'un « nombre fini » de déterminations.

10. L'ensemble $\mathcal{E}$ de points x, pour lesquels $y(x)$ n'a qu'un *nombre fini* de déterminations peut être d'une nature variée. Un tel point sera évidemment point frontière sur une infinité de feuillets de R_k et point intérieur sur les feuillets en nombre fini qui correspondent aux déterminations finies de $y(x)$. On va examiner une partie intéressante de l'ensemble $\mathcal{E}$: l'ensemble $\mathcal{E}'$ des valeurs de x, pour lesquelles la fonction $G(x, y)$, entière en y, *se réduit à un polynome en y.*

On peut toujours développer G suivant les puissances de y

$$G(x, y) = \sum_0^\infty g_n(x) y^n,$$

les coefficients $g_n(x)$ sont des fonctions entières de x. Une valeur ξ de $\mathcal{E}'$ annule tous les g_n à partir d'un certain rang. Elles appartiennent donc à l'ensemble constitué par les zéros de tous les g_n. Cet ensemble est dénombrable. $\mathcal{E}'$ *est dénombrable*. On va voir qu'*il peut être dense dans tout le plan x*.

11. On considérera pour cela *un ensemble dénombrable quelconque*, dense dans tout le plan des x et soient $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ ces points dans l'ordre adopté pour l'énumération.

Posons

$$g_0(x) = a_0(x - x_0),$$
$$g_1(x) = a_1(x - x_0)(x - x_1),$$

et, en général,

$$g_i(x) = a_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_i) = a_i \prod_0^i (x - x_i),$$

les a_i étant des constantes convenables.

On peut choisir les a_k de façon que la série

$$\sum_\infty^0 g_k(x)\,y^k$$

converge *uniformément* dans tout domaine

$$|x| \leqq r, \qquad |y| \leqq \mathrm{R},$$

quels que soient r et R, et représente dans ce domaine une fonction entière de x et y.

Il faut et il su(fit pour cela que

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} |g_n|^{\frac{1}{n}} = 0,$$

dans tout domaine $|x| \leqq r$.

Désignons par $\mathrm{M}_n(r)$ le maximum de $\prod_{k=0}^n |x - x_k|$ sur le cercle $|x| = r$; la condition à remplir sera

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{A}_n^{\frac{1}{n}}[\mathrm{M}_n(r)]^{\frac{1}{n}} = 0 \qquad [|a_n| = \mathrm{A}_n].$$

Or, $\mathrm{M}_n(r)$, pour n fixe, croît avec r.

Procédant comme au n° 4 on choisira une suite croissante de rayons r_n tendant vers l'infini avec n, et l'on choisira les A_n de façon que

$$\lim_{n=\infty} A_n^{\frac{1}{n}}[M_n(r_n)]^{\frac{1}{n}} = 0, \tag{3}$$

ce qui pourra toujours être réalisé avec des A_n convergeant assez rapidement *vers zéro*.

On aura alors la relation (2) pour toute valeur finie de r et par suite la relation (1) uniformément dans tout domaine $|x| \leqq r$ d'où l'on conclut la convergence uniforme de

$$G(x, y) = \sum_{0}^{\infty} g_k(x) y^k$$

dans tout domaine $|x| \leqq r$, $|y| \leqq R$.

Lorsque x est égal à x_i, $G(x, y)$ se réduit à un polynome de degré $(i-1)$ puisque $G_k(x_i) = 0$ pour $K = i, i+1, \ldots, \infty$. L'ensemble $\mathcal{E}'$, pour la fonction entière $G(x, y)$, se réduit à l'ensemble des x_i. Le nombre des déterminations finies de y pour $x = x_i$ croissant indéfiniment avec i nous prouve que la surface de Riemann R_x de $y(x)$ a bien un nombre *infini de feuillets*, c'est-à-dire que pour les valeurs *générales de x*, $y(x)$ aura une infinité de déterminations.

L'exemple actuel prouve que les projections sur le plan x des points frontière de R_x peuvent remplir tout le plan puisque ceux de ces points frontière qui appartiennent à $\mathcal{E}'$ forment un ensemble dénombrable partout dense. On avait déjà des exemples, dus à MM. Gross, Iversen, de fonctions $y(x)$, inverses de fonctions entières $[G(x, y)$ linéaire en $x]$ pour lesquels *tout point de plan x* est projection d'un point frontière de R_x, c'est-à-dire où toute *valeur x est valeur asymptotique de la fonction entière $x(y)$ lorsque y* tend vers l'infini sur un chemin convenable (¹).

(¹) W. Gross, *Gine ganze Funktion, für die jede Komplexe Zahl Konvergenzwert ist* (*Math. Annalen*, t. 79).