BULLETIN DE LA S. M. F.

B. GAMBIER

Sur quelques formules déduites de la théorie des cubiques planes

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 38-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__38_0>

SUR QUELQUES FORMULES DÉDUITES DE LA THÉORIE DES CUBIQUES PLANES ;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. M. Hadamard a publié une Note très courte au tome 51, 1923, p. 295-296 du *Bulletin de la Société mathématique de France;* il y exprime le désir de voir déduire divers théorèmes, concernant la fonction p, de l'étude géométrique des cubiques planes.

M. Hadamard signale que, si l'on pose pour abréger

$$f(u) \equiv \frac{p'u + p'2u}{pu - p2u} \equiv \frac{p''u}{p'u}, \tag{1}$$

la constance du rapport anharmonique des quatre tangentes issues d'un point de la cubique

$$x = pu, \qquad y = p'u \tag{2}$$

à cette courbe entraîne la formule

$$\frac{f(u) - f(u+\omega_1)}{f(u) - f(u+\omega_2)} : \frac{f(u+\omega_3) - f(u+\omega_1)}{f(u+\omega_3) - f(u+\omega_2)} = \text{const} = \frac{p\omega_2 - p\omega_3}{p\omega_1 - p\omega_3}. \tag{3}$$

La valeur constante se détermine immédiatement en prenant le point d'inflexion à l'infini de la cubique.

Je me propose ici : d'abord de démontrer *analytiquement* la formule (3), par un moyen plus simple que celui suggéré par M. Hadamard, puis de retrouver *géométriquement* les diverses formules auxiliaires : la démonstration analytique n'aura en effet d'autre but que de signaler les expressions analytiques que le géomètre doit essayer d'étudier directement. J'essaierai ensuite, suivant le vœu de M. Hadamard, de déterminer les propositions générales auxquelles peut se rattacher la formule (3).

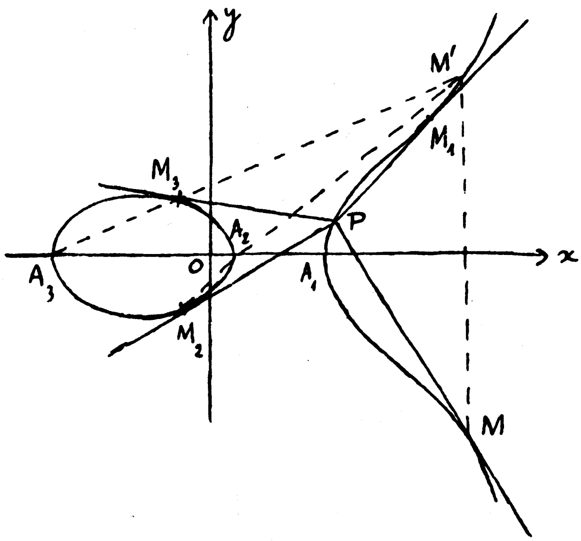
2. Je fais la figure 1 dans le cas où les périodes 2ω, $2\omega'$ sont l'une 2ω réelle, l'autre $2\omega'$ imaginaire pure et j'adopte les notations du Traité d'Appell et Lacour.

Soit P le point d'où l'on mène les tangentes PM, PM_1, PM_2, PM_3 à la courbe; je prends pour argument des divers points

P	M	M_1	M_2	M_3	A_1	A_2	A_3
$-2u$	u	$u+\omega$	$u+\omega+\omega'$	$u+\omega'$	ω	$\omega+\omega'$	ω'

Si nous considérons le point M′ symétrique de M par rapport à Ox, les droites $M'A_1$, $M'A_2$, $M'A_3$ coupent respectivement la

Fig. 1.



cubique aux points M_1, M_2, M_3 associés au point M. La figure est faite en supposant $0 < u < \omega$. On remarquera que si P est choisi sur la branche infinie, on a quatre tangentes réelles, car cela revient à prendre pour $-2u$ une quantité réelle quelconque, comprise par exemple entre 0 et 2ω; mais si P est choisi sur l'ovale, il n'y a plus de tangentes réelles; en effet $-2u$ est cette fois égal à $t+\omega'$ où t est réel compris entre 0 et 2ω.

M. Hadamard prend comme expression analytique de la pente de PM la fraction $\dfrac{p'u+p'2u}{pu-p2u}$; il est plus simple, puisque PM est tangente en M, de prendre $\dfrac{p''u}{p'u}\cdot$ On remarquera précisément qu'en évaluant une fonction elliptique sous forme de fraction rationnelle en pu et $p'u$, on a l'inconvénient de faire apparaître des valeurs parasites de u, zéros du numérateur et dénominateur ou pôles; l'expression $pu - p2u$ est d'ordre 8, $p'u + p'2u$ d'ordre 12 et chacune admet pour zéros parasites les huit points d'inflexion à distance finie; l'expression $\frac{p''u}{p'u}$ est plus simple, puisqu'elle est le quotient d'une fonction d'ordre 4 par une fonction d'ordre 3; il n'y a plus de zéro parasite; p'' et p' ont le pôle commun $u = 0$, quadruple pour p'' et triple pour p'.

Partons de la formule classique

$$(pu - e_1)(p\overline{u+\omega} - e_1) = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3). \tag{1}$$

La dérivation logarithmique donne

$$\frac{p'u}{pu - e_1} + \frac{p'\overline{u+\omega}}{p\overline{u+\omega} - e_1} = 0 \tag{2}$$

ou

$$\frac{p'u}{p'\overline{u+\omega}} = -\frac{pu - e_1}{p\overline{u+\omega} - e_1}. \tag{2'}$$

Une nouvelle dérivation logarithmique donne

$$\frac{p''u}{p'u} - \frac{p''\overline{u+\omega}}{p'\overline{u+\omega}} = \frac{p'u}{pu - e_1} - \frac{p'\overline{u+\omega}}{p'\overline{u+\omega} - e_1} = \frac{2p'u}{pu - e_1}. \tag{3}$$

N'oublions pas, qu'avec les notations de ce paragraphe, la formule à démontrer est

$$\frac{[f(u) - f(u+\omega)][f(u+\omega') - f(u+\omega+\omega')]}{[f(u) - f(u+\omega+\omega')][f(u+\omega') - f(u+\omega)]} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \tag{4}$$
$$= (e_1 e_2 \infty e_3).$$

Le rapport anharmonique étudié ici est donc $P(M_1 M_2 M M_3)$. Nous allons constater que, *non seulement l'expression* (4) *est constante, mais que ses numérateur et dénominateur sont séparément constants.*

En effet la différence

$$f(u) - f(u+\omega) = \frac{2p'u}{p - e_1}$$

admet comme zéros et pôles simples

Zéros	$\omega + \omega'$	ω'
Pôles	ω	0

Le multiplicateur

$$f(u+\omega') - f(u+\omega+\omega')$$

s'obtient en remplaçant dans la différence précédente u par $u+\omega'$, de sorte que la nouvelle différence a pour zéros et pôles simples

Zéros...........................	ω	0
Pôles...........................	$\omega+\omega'$	ω'

La proposition est donc établie. Quant au dénominateur il est évidemment constant pour la même raison, car cela revient au fond à permuter le rôle des demi-périodes ω_1, ω_2, ω_3 (appelées ici ω, $\omega+\omega'$, ω') : on permute ω_1 et ω_2 sans toucher à ω_3.

Calculons les valeurs constantes en jeu. Le numérateur de (4) est devenu

$$4 \cdot \frac{p'u}{pu-e_1} \cdot \frac{p'\overline{u+\omega'}}{p\overline{u+\omega'}-e_1}.$$

La formule (1) donne la formule semblable

$$(pu-e_3)(p\overline{u+\omega'}-e_3) = (e_3-e_1)(e_3-e_2), \tag{5}$$

d'où par calcul simple

$$p\overline{u+\omega'}-e_1 = (e_3-e_1)\frac{p-e_2}{p-e_3}, \tag{6}$$

puis par dérivation logarithmique

$$\frac{p'\overline{u+\omega'}}{p\overline{u+\omega'}-e_1} = \frac{p'}{p-e_2} - \frac{p'}{p-e_3} = \frac{(e_2-e_3)p'}{(p-e_2)(p-e_3)}.$$

Le numérateur de (4) est donc

$$\frac{4(e_2-e_3)p'^2}{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)} = 16(e_2-e_3).$$

Le dénominateur est donc $16(e_1-e_3)$. *La formule signalée par M. Hadamard est donc complètement établie.*

3. Je vais montrer que les formules

$$(pu-e_1)(p\overline{u+\omega}-e_1) = (e_1-e_2)(e_1-e_3), \tag{I}$$

$$\frac{p'u}{pu-e_1} + \frac{p'\overline{u+\omega}}{p\overline{u+\omega}-e_1} = 0, \tag{II}$$

$$\frac{p\overline{u+\omega'}-e_1}{e_3-e_1} = \frac{p-e_2}{p-e_3}, \tag{III}$$

$$\frac{p'u}{pu-e_1} \cdot \frac{p'\overline{u+\omega'}}{p\overline{u+\omega'}-e_1} = 4(e_2-e_3) \tag{IV}$$

se lisent sur la figure. A ces formules il n'y a plus qu'à joindre la dernière

$$\text{(V)} \qquad \frac{p''u}{p'u} - \frac{p''\overline{u+\omega}}{p'\overline{u+\omega}} = \frac{2p'u}{pu - e_1}$$

dont l'interprétation géométrique est simple, mais dont je n'ai pas aperçu une démonstration géométrique simple. Le paragraphe 2 ne contient pas d'autre formule que les formules (I) à (V).

On remarque d'abord que, si par le point A_1, on mène deux sécantes symétriques par rapport à Ox, A_1M_1M' et $A_1\ MM'_1$, les deux cordes parallèles à Oy, MM' et $M_1M'_1$ se correspondent involutivement; si ξ et ξ_1 sont leur distance à A_1, ξ devient nul si ξ_1 devient infini; donc $\xi\xi_1$ est une constante, que l'on détermine avec la sécante particulière $A_1A_2A_3$: la formule (I) est donc démontrée.

A_1M et A_1M_1 sont symétriquement inclinés sur Ox, donc (II) en résulte.

Nous avons vu que (III) est une conséquence simple, de calcul, de (I). Mais il est intéressant de la démontrer géométriquement. Pour cela remarquons que le rapport anharmonique des quatre valeurs de ξ est égal au rapport anharmonique des quatre valeurs de ξ_1 : marquons les valeurs de ξ et ξ_1, ou plus simplement de x et x_1, suivantes :

x	e_2	e_1	pu	∞
x_1	e_3	∞	$p(u+\omega)$	e_1

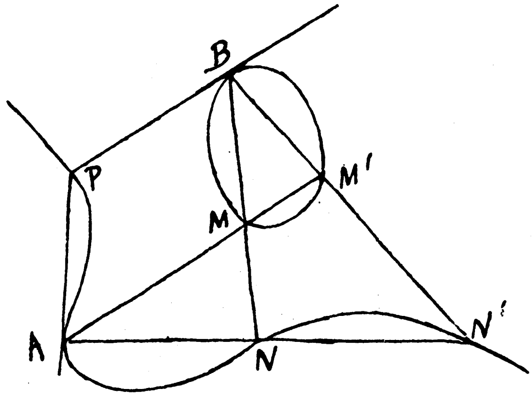
L'égalité du rapport anharmonique donne

$$\text{(III')} \qquad \frac{p\overline{u+\omega} - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{p - e_2}{p - e_1}.$$

Il suffit de permuter ω avec ω', e_1 avec e_3, sans toucher à e_2 (ou encore de raisonner sur le couple A_3 et $u = 0$) pour transformer (III') en (III).

Nous démontrons (IV) en généralisant très simplement la propriété d'involution qui précède. Soit sur une cubique quelconque (*fig.* 2) deux points A, B *cotangentiels* (tels que les tangentes en A et B concourent en P sur la cubique); (A, A) et (B, B) ont donc un résiduel commun P, donc tout résiduel de l'un des couples (A, A) ou (B, B) est aussi résiduel de l'autre. Je mène par A la sécante AMM′, puis de B les sécantes BMN et BM′N′ : N et N′ sont alignés avec A, car (M, M′, N, N′) est résiduel de (B, B),

Fig. 2.



donc de (A, A). Or la conique circonscrite à A, M, M′, N, N′ et tangente en A à la cubique se décompose nécessairement, puisque A, M, M′ sont en ligne droite, et ceci démontre la proposition. A et B restant fixes, la figure AMM′NN′B dépend d'un unique paramètre de forme, les côtés AMM′ et ANN′ se correspondent involutivement et de même BMN et BM′N′. Dans ce qui précède, on a appliqué cette proposition pour A confondu avec A_1 et B avec le point d'inflexion à l'infini. Pour obtenir (IV), il suffit de mettre A en A_1 et B en A_3 ; A_1M_3 et A_1M_1M' se correspondent involutivement; leurs pentes sont donc liées par une relation involutive; or si M_3 vient en A_3, M′ s'éloigne à l'infini, donc o et ∞ sont deux valeurs correspondantes dans cette involution de sorte que le produit des pentes est constant : c'est ce qu'exprime (IV). Il est très facile de trouver la valeur de la constante. Pour cela, permutons les rôles de A_1 et A_3 et calculons la valeur constante du produit des pentes de A_3M_3M' et A_3M_1 ; du point A_1 menons une tangente $A_1\overline{M_1}$ à la courbe : le produit est le carré de la pente de $A_3\overline{M_1}$; prenons pour abscisse de $\overline{M_1}$ la valeur

$$e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$$

obtenue en nous rappelant la constance du produit $\xi\xi_1$; l'ordonnée de $\overline{M_1}$ se calcule par la formule

$$\begin{aligned} y^2 &= 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) \\ &= 4\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\left[e_1-e_2+\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\right] \\ &\quad\times\left[e_1-e_3+\sqrt{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\right] \\ &= 4(e_1-e_2)(e_1-e_2)\left[\sqrt{e_1-e_2}+\sqrt{e_1-e_3}\right]^2. \end{aligned}$$

Le carré de la pente de $A_3\overline{M_1}$ est

$$\frac{y^2}{(x-e_3)^2} = \frac{4(e_1-e_2)(e_1-e_3)\left[\sqrt{e_1-e_2}+\sqrt{e_2-e_3}\right]^2}{(e_1-e_3)\left[\sqrt{e_1-e_2}+\sqrt{e_2-e_3}\right]^2} \equiv 4(e_1-e_2).$$

Donc:

$$\text{pente de } A_3M_3 \times \text{pente de } A_3M_1 = 4(e_1-e_2),$$
$$\text{pente de } A_1M_3 \times \text{pente de } A_1M_1 = 4(e_3-e_2).$$

C'est le résultat précis exprimé par (IV).

La formule (V) exprime qu'en retranchant de la pente de la tangente en M la pente de la tangente en M_1 on obtient deux fois la pente de la droite A_1M.

4. Je signale maintenant une propriété intéressante de la figure 2 : le fait que les cordes MN et M′N′ se coupent sur la cubique en B entraîue que (B, B) est résiduel de (M, N, M′, N′), mais alors (A, A) est un autre résiduel de (M, N, M′N′) de sorte que A et B sont cotangentiels; céci vaut pour M et N′ ou encore pour M′, N. On a donc un quadrilatère complet inscrit dans la cubique et ce théorème de géométrie : *sur toute cubique circonscrite à un quadrilatère complet, les trois couples de sommets opposés sont des cotangentiels.* Nous avons un résultat plus précis en indiquant les paramètres des divers points,

A	B	M	M′	N	N′
u_0	$u_0+\omega$	u	$-u-u_0$	$-u-u_0-\omega$	$u+\omega$

Nous avons vu en effet qu'un point M a trois cotangentiels d'espèce différente, obtenus en ajoutant, soit ω, soit $\omega+\omega'$, soit ω' à l'argument de u. Ici A et B, M et N′, M′ et N sont *trois couples cotangentiels de la même catégorie.* Lès tangentes en M et N′

concourent en P_1 sur la cubique, les tangentes en M′ et N en P_2 et les arguments de P, P_1, P_2 sont

$$\begin{array}{ccc} P & P_1 & P_2 \\ -2u_0 & -2u & 2u+2u_0 \end{array}$$

on voit que P, P_1, P_2 *sont en ligne droite.* La figure ABMNM′N′ dépend bien de deux paramètres : position de P et orientation de AM. Réciproquement à une droite PP_1P_2 correspondent douze quadrilatères de la nature indiquée ici : en effet P étant donné, il y a six façons d'accoupler deux points de contact des tangentes issues de P; ce choix précise ω, de sorte qu'en passant à P_1 il n'y a plus que deux couples à choisir et le choix permet d'achever la figure. Il y a donc une série de théorèmes intéressants à énoncer sur les douze points de contact des tangentes issues de P, P_1, P_2 : en particulier celui-ci : un point de contact relatif à P, un point de contact relatif à P_1 sont en ligne droite avec un point de contact relatif à P_2.

5. Nous devons maintenant, avec M. Hadamard, nous demander à quelles propositions générales se rattache la formule de départ; or il me semble bien qu'il ne doit pas exister de propriété distincte de l'invariance du rapport anharmonique des quatre tangentes issues d'un point de la cubique : ce rapport ρ est susceptible, comme on sait, de six valeurs suivant l'ordre où l'on prend les tangentes; c'est le seul *invariant projectif absolu* de la cubique; on évite un invariant irrationnel en prenant l'expression

$$R = \frac{(2-\rho)^2(1-2\rho)^2(1+\rho)^2}{\rho^2(1-\rho)^2}.$$

L'égalité de R, pour deux cubiques différentes, est la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient transformées projectives l'une de l'autre et cela revient purement et simplement à constater que les valeurs de ρ (en associant convenablement les tangentes) sont les mêmes.

L'étude de la figure 1 nous a donné des propriétés *métriques* [formules (I), (II), (III,) (IV) du paragraphe 3] : nous avons indiqué au cours de la démonstration comment on doit opérer pour leur donner un caractère *projectif* [1] : nous avons alors des invariants *relatifs*, mais non *absolus*.

Il est intéressant de chercher comment on doit déterminer la fonction $f(u)$ doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$ de façon que l'expression

$$I = \frac{[f(u) - f(u+\omega)][f(u+\omega') - f(u+\omega+\omega')]}{[f(u) - f(u+\omega+\omega')][f(u+\omega') - f(u+\omega)]}$$

soit constante : cette valeur constante est nécessairement un invariant, tout au moins *relatif*, car en donnant à u une valeur telle que $\omega, \frac{\omega}{2}, \ldots$, on obtient la constante exprimée uniquement au moyen des périodes ω, ω'. L'étude faite ici prouve que l'expression

$$f(u) \equiv \frac{\mathrm{A}p''u + \mathrm{B}p'u}{\mathrm{C}p''u + \mathrm{D}p'u},$$

où A, B, C, D sont des constantes, répond aux conditions voulues et donne même un invariant *absolu*. Il n'est pas absolument évident que ce soit la seule forme possible de $f(u)$, mais c'est assez probable [2]. L'hypothèse particulière $\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$ entraîne même que l'expression

$$\mathrm{E} \equiv [f(u) - f(u+\omega)][f(u+\omega') - f(u+\omega+\omega')]$$

reste constante.

6. Nous rencontrons les propriétés analytiques suivantes : si $f(u)$ est une fonction doublement périodique quelconque $(2\omega, 2\omega')$, l'expression $f(u)f(u+\omega')$ est doublement périodiqne $(2\omega, \omega')$; l'expression $f(u)+f(u+\omega')$ aussi; l'expression $f(u)-f(u+\omega)$ change de signe si u augmente de ω; l'expression E est doublement périodique (ω, ω'). Signalons les conditions moyennant lesquelles on obtient les résultats suivants :

A. Trouver une fonction $\psi(u)$ doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$ telle que $\psi(u)\psi(u+\omega')$ soit constant.

---

(1) On a associé un couple variable de deux rayons en involution aux rayons doubles de l'involution.

(2) Au point de vue purement analytique, on peut négliger la substitution $(u;\ \alpha u + \beta)$ où α et β sont des constantes. Au point de vue géométrique, pour α entier et en particulier $\alpha = \pm 1$, c'est facile à interpréter.

B. Trouver une fonction $\varphi(u)$ doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$ telle que $\varphi(u+\omega) \equiv \varphi(u)$.

C. Trouver une fonction $\varkappa(u)$ doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$ telle que $\varkappa(u+\omega)+\varkappa(u) \equiv 0$.

7. Pour le résultat (A) il est nécessaire et suffisant que les zéros et pôles de ψ soient donnés par la loi

zéros............	a_1	a_2	...	a_n
Pôles............	$a_1+\omega'$	$a_2+\omega'$	...	$a_n+\omega'$

et puisque la somme des pôles doit être congrue mod $(2\omega, 2\omega')$ à celles des zéros, il faut que *n soit pair*. On peut donc choisir a_1, a_2, ... a_n arbitrairement et la fonction ψ en résulte à un facteur numérique près.

8. Pour le résultat (B) il est nécessaire et suffisant que les zéros et pôles de $\varphi(u)$ soient donnés par la loi

Zéros.........	a_1	a_2	...	a_n	$a_1+\omega$	...	$a_n+\omega$
Pôles.........	b_1	b_2	...	b_n	$b_1+\omega$	...	$b_n+\omega$

$$\sum_1^n a_i = \sum_1^n b_i.$$

On a aussitôt

$$\varphi(u) \equiv A \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_1-\omega)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_n-\omega)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_1-\omega)\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_n-\omega)}.$$

L'expression

$$\varphi_1(u) = \sqrt{A}\, \frac{\sigma(u-a_1-\omega)\sigma(u-a_2-\omega)\ldots\sigma(u-a_n-\omega)}{\sigma(u-b_1-\omega)\sigma(u-b_2-\omega)\ldots\sigma(u-b_n-\omega)}$$

est doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$ et l'on a

$$\varphi(u) \equiv \varphi_1(u)\varphi_1(u+\omega).$$

Les nombres a_1, $a_2, \ldots, a_n$ peuvent être d'ailleurs distincts ou non. On constate que la décomposition en éléments simples de φ est de la forme (en admettant des pôles multiples ou non)

$$\begin{aligned}\varphi(u) \equiv D_0 &+ B_1[Z(u-b_1)+Z(u-b_1-\omega)]\\ &+ B'_1[Z'(u-b_1)+Z'(u-b_1-\omega)]+\ldots\\ &+ B_2[Z(u-b_2)+Z(u-b_2-\omega)]\\ &+ B'_2[Z'(u-b_2)+Z'(u-b_2-\omega)]+\ldots\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Si donc on pose

$$f(u) \equiv \frac{D_0}{2} + B_1 Z(u - b_1 - \omega) + B'_1 Z'(u - b_1 - \omega) + \dots$$
$$+ B_2 Z(u - b_2 - \omega) + B'_2 Z'(u - b_2 - \omega) + \dots$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

on aura

$$\varphi(u) \equiv f(u) + f(u + \omega),$$

la fonction $f(u)$ étant doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$, car on a *nécessairement*

$$B_1 + B_2 + \dots + B_n = 0.$$

On remarquera que si $f_1(u)$ est une fonction doublement périodique *arbitraire* $(2\omega, 2\omega')$ et si l'on pose

$$F(u) \equiv f(u) + f_1(u) - f_1(u + \omega),$$

on aura encore

$$\varphi(u) \equiv F(u) + F(u + \omega).$$

Il y a donc une infinité de décompositions de $\varphi(u)$ en une somme $F(u) + F(u + \omega)$. Il y a de même une infinité de décompositions de $\varphi(u)$ en un produit $\varphi_1(u)\varphi_1(u + \omega)$, car nous savons, d'après (A), trouver une infinité de fonctions $\psi(u)$ telle que $\psi(u)\psi(u + \omega)$ soit constante et égale à 1 : on peut remplacer $\varphi_1(u)$ par $\varphi_1(u)\psi(u)$.

9. Pour le résultat (C), il est nécessaire et suffisant que la loi des zéros et pôles de $\chi(u)$ soit

Zéros.........	a_1	a_2	...	a_n	$a_1 + \omega$	...	$a_n + \omega$
Pôles.........	b_1	b_2	...	b_n	$b_1 + \omega$	...	$b_n + \omega$

$$\sum_1^n b_i = \sum_1^n a_i + \omega'.$$

On a

$$\chi(u) \equiv A e^{-2\eta' u} \frac{\sigma(u - a_1)\sigma(u - a_1 - \omega)\sigma(u - a_2)\dots\sigma(u - a_n - \omega)}{\sigma(u - b_1)\sigma(u - b_1 - \omega)\sigma(u - b_2)\dots\sigma(u - b_n - \omega)}.$$

On a la décomposition en éléments simples (en laissant indéterminée la multiplicité des pôles)

$$\chi(u) \equiv B_1[Z(u - b_1 - \omega) - Z(u - b_1)]$$
$$+ B'_1[Z'(u - b_1 - \omega) - Z'(u - b_1)] + \dots$$
$$+ B_2[Z(u - b_2 - \omega) - Z(u - b_2)]$$
$$+ B'_2[Z'(u - b_2 - \omega) - Z'(u - b_2)] + \dots$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Cette fois la somme $B_1 + B_2 + \ldots + B_n$ peut être nulle ou non. Calculons le nombre C par la formule

$$C = -\frac{1}{2}(B_1 + B_2 + \ldots + B_n)$$

et remarquons que, la fonction Z ayant la période 2ω, l'expression

$$C[Z(u-c-\omega) - Z(u-c)] + C[Z(u-c-2\omega) - Z(u-c-\omega)]$$

est identiquement nulle, quelles que soient les constantes C et c. On définit la fonction doublement périodique $f(u)$ par la formule

$$\begin{aligned} f(u) \equiv\ & C[Z(u-c-\omega) + Z(u-c-2\omega)] \\ & + B_1 Z(u-b_1-\omega) + B'_1 Z'(u-b_1-\omega) + \ldots \\ & + B_2 Z(u-b_2-\omega) + B'_2 Z'(u-b_1-\omega) + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et l'on a

$$\varkappa(u) \equiv f(u) - f(u+\omega).$$

On peut comme plus haut remplacer $f(u)$ par une infinité de fonctions $F(u)$

$$F(u) \equiv f(u) + f_1(u) + f_1(u+\omega)$$

où la fonction $f_1(u)$, doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$, est arbitraire.

Comme exemple, nous pouvons prendre celui que nous avons rencontré plus haut

$$\frac{2p'u}{pu-e_1} = \frac{p''u}{p'u} - \frac{p''\overline{u+\omega}}{p'\overline{u+\omega}} = -4Zu + 4Z\overline{u+\omega},$$

$$\frac{p''u}{p'u} = -3Zu \qquad + Z\overline{u+\omega} + Z\overline{u+\omega+\omega'} + Z\overline{u+\omega'},$$

$$\frac{p''\overline{u+\omega}}{p'\overline{u+\omega}} = -3Z\overline{u+\omega} + Zu \qquad + Z\overline{u+\omega'} \qquad + Z\overline{u+\omega+\omega'}.$$

On généraliserait sans peine, soit en échangeant les rôles de ω et ω', soit en examinant le cas d'une fonction doublement périodique $(2\omega, 2\omega')$ dont les zéros s'associent par groupes de quatre, a_1, $a_1+\omega$, $a_1+\omega+\omega'$, $a_1+\omega'$ et de même les pôles par groupes analogues de quatre, b_1, $b+\omega$, $b_1+\omega+\omega'$, $b_1+\omega'$: on trouve alors au lieu de deux hypothèses telles que B et C, quatre hypothèses s'excluant mutuellement. On remarquera l'analogie avec ce qui se passe pour les fonctions pu, $p2u$, $\sqrt{p2u-e_1}$, $\sqrt{p2u-e_2}$, $\sqrt{p2u-e_3}$.

10. Il est facile maintenant de retrouver toutes les fonctions $f(u)$ doublement périodiques $(2\omega, 2\omega')$ telles que le produit

$$(1)\qquad [f(u)-f(u+\omega)][f(u+\omega')-f(u+\omega+\omega')]$$

se réduit à une constante : il n'y a qu'à rassembler les conclusions obtenues pour (A) et (C).

Le premier facteur admet les zéros et les pôles

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{zéros}\ldots\ldots\ldots & a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n \quad a_1+\omega \quad \ldots \quad a_n+\omega \\ \text{pôles}\ldots\ldots\ldots & b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n \quad b_1+\omega \quad \ldots \quad b_n+\omega \end{cases}$$

avec

$$(3)\qquad b_1+b_2+\ldots+b_n=a_1+a_2+\ldots+a_n+\omega'.$$

Le second facteur admet les zéros et les pôles

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{Zéros}\ldots & a_1+\omega' \quad a_2+\omega' \quad \ldots \quad a_n+\omega' \quad a_1+\omega+\omega' \quad \ldots \quad a_n+\omega+\omega' \\ \text{Pôles}\ldots & b_1+\omega' \quad b_2+\omega' \quad \ldots \quad b_n+\omega' \quad b_1+\omega+\omega' \quad \ldots \quad b_n+\omega+\omega' \end{cases}$$

Si $n=1$, il n'y a rien à ajouter; nous avons

$$(5)\qquad \begin{cases} f(u)-f(u+\omega)=\dfrac{2\,A\,p'(u-a_1+\omega')}{p(u-a_1+\omega')-e_1}, \\ f(u)\equiv\dfrac{A\,p''(u-a_1+\omega')}{p'(u-a_1+\omega')}, \end{cases}$$

d'après ce que nous avons vu aux paragraphes 2 et 3.

Si n surpasse 1, il est nécessaire et suffisant que les pôles (4) soient congruents aux zéros (2) : on peut numéroter les b de sorte que l'on ait pour chaque valeur de i comprise entre 1 et n

$$(6)\qquad b_i+\omega'=a_i+\varepsilon_i\omega+2\lambda_i\omega+2\mu_i\omega',$$

ε_i désignant 0 ou 1, λ_i et μ_i étant des entiers $\gtrless 0$. La relation (3) entraîne

$$(7)\qquad \begin{cases} \Sigma\varepsilon_i+2\,\Sigma\lambda_i=0, \\ 2\Sigma\mu_i=1+n. \end{cases}$$

Donc l'entier n est impair. Les ε non nuls sont en nombre pair; si $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, on remplace les couples

$$(8)\qquad (b_1,\ b_1+\omega),\quad (b_2,\ b_2+\omega)$$

par

$$(9) \qquad (b'_1,\ b'_1+\omega),\quad (b'_2,\ b'_2+\omega)$$

avec

$$(10) \qquad b'_1 = b_1+\omega, \qquad b'_2 = b_2-\omega$$

et alors b'_1 est congru à a_1 et non plus $a_1+\omega$, b'_2 à a_2 et la somme $b'_1+b'_2$ est égale à b_1+b_2, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ avec les nouveaux pôles b'_1, b'_2 : supprimons les accents et supposons donc tous les ε nuls.

De même si l'on pose $b_1=b'_1+2\lambda_1\omega$, $b_2=b'_2-2\lambda_2\omega$ la formule (6) montre qu'avec les nouveaux pôles b'_1 et b'_2 l'entier λ_1 est devenu nul, mais λ_2 remplacé par $\lambda_1+\lambda_2$; supprimons les accents de b'_1 et b'_2 et continuons; on peut annuler $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ de proche en proche, λ_n se trouvant remplacé par $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$, résultat nul d'après (7).

De même on annule $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ et μ_n se calcule par la relation (7), donc $2\mu_n = 1+n$. La fonction $\varkappa$ admet pour zéros et pôles

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{llllll} \text{Zéros.} & b_1+\omega' & b_2+\omega' & \ldots & b_{n-1}+\omega' & b_n+n\omega' \\ \text{Zéros.} & b_1+\omega+\omega' & \ldots\ldots & \ldots & b_{n-1}+\omega+\omega' & b_n+\omega-n\omega' \\ \text{Pôles.} & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ \text{Pôles.} & b_1+\omega & \ldots & \ldots & b_{n-1}+\omega & b_n+\omega \end{array}\right.$$

où $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont arbitraires et n impair : mais alors les résultats des paragraphes **2** et **3** nous montrent que

$$(12)\quad \varkappa(u) \equiv A\,\frac{p'(u-b_1)}{p(u-b_1)-e_1}\cdot\frac{p'(u-b_2)}{p'(u-b_2)-e_1}\cdots\cdot\frac{p'(u-b_n)}{p'(u-b_n)-e_1}$$

La condition n impair est nécessaire pour que $\varkappa(u+\omega)$ et $\varkappa(u)$ soient égales et de signe contraire; n pair conduirait au contraire à l'égalité.

Cet exemple de fonction $\varkappa(u)$ donné par (12) se prête assez aisément à la détermination de l'une des fonctions f correspondantes : en effet on écrira

$$(13)\qquad \frac{p'(u-b_1)}{p(u-b_1)-e_1} = \frac{p''(u-b_1)}{p'(u-b_1)} - \frac{p''\overline{u-b_1+\omega}}{p'\overline{u-b_1+\omega}}$$

et égalités analogues : multiplions les seconds membres et appelons $f(u)$ la somme des termes précédés du signe $+$; la somme des autres est évidemment $f(u+\omega)$ et l'on a

$$\text{(14)} \qquad \varkappa(u) \equiv \mathrm{A}[f(u) - f(u+\omega)].$$

Par exemple, si l'on suppose $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $n = 3$, on aura

$$\text{(15)} \qquad f(u) \equiv \left(\frac{p''u}{p'u}\right)^2 + 3\,\frac{p''u}{p'u}\,\frac{p''\overline{u+\omega}}{p'\overline{u+\omega}}.$$

Si l'on cherche une fonction φ rendant constante l'expression

$$\text{(16)} \qquad [\varphi(u) - \varphi(u+\omega+\omega')][\varphi(u+\omega') - \varphi(u+\omega)],$$

il n'y a qu'à remplacer dans ce qui précède ω par $\omega + \omega'$ sans toucher à ω'; en particulier, on peut associer à la fonction $f(u)$ définie par (15) la fonction

$$\text{(17)} \qquad \varphi(u) \equiv \left(\frac{p''u}{p'u}\right)^3 + 3\,\frac{p''u}{p'u}\,\frac{p''\overline{u+\omega+\omega'}}{p'\overline{u+\omega+\omega'}}$$

et l'expression correspondante

$$\frac{[f(u) - f(u+\omega)][f(u+\omega') - f(u+\omega+\omega')]}{[\varphi(u) - \varphi(u+\omega+\omega')][\varphi(u+\omega') - \varphi(u+\omega)]}$$

se réduirait au cube du rapport anharmonique ρ : nous avons vu que les fonctions f et φ peuvent être remplacées par

$$\mathrm{F}(u) \equiv f(u) + f_1(u) + f_1(u+\omega)$$

et

$$\Phi(u) \equiv \varphi(u) + \varphi_1(u) + \varphi_1(u+\omega+\omega');$$

mais on ne peut arriver ici à choisir f_1 et φ_1 de façon à faire coïncider $\mathrm{F}(u)$ et $\Phi(u)$, comme dans le cas où l'on suppose $n = 1$.