

# BULLETIN DE LA S. M. F.

R. TAMBS LYCHE

## Une formule d'itération

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 55 (1927), p. 102-113

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1927\\_\\_55\\_\\_102\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__102_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE FORMULE D'ITÉRATION;

PAR M. R. TAMBS LYCHE

[Trondhjem (Norvège)].

1. REMARQUES PRÉLIMINAIRES. — Soit  $z_1 = \varphi(z)$  une substitution holomorphe dans le voisinage d'un point double, que nous supposons, pour plus de simplicité, à l'origine, et posons

$$\varphi(z) = sz + a_2 z^2 + \dots + a_p z^p + \dots$$

Alors on a dans un certain cercle  $|z| < \rho_n$ ,

$$z_n = \varphi_n(z) = \varphi[\varphi_{n-1}(z)] = s^n z + a_2^{(n)} z^2 + \dots + a_p^{(n)} z^p + \dots,$$

où le coefficient  $a_p^{(n)}$  s'exprime en fonction de  $s, a_2, \dots, a_p$ . Il ne semble pas qu'on ait trouvé l'expression de ce coefficient sur une forme assez simple pour le pouvoir étudier directement et en tirer des conséquences de quelque importance; or je vais donner pour  $a_p^{(n)}$  une formule très simple et qui montre surtout la structure de  $a_p^{(n)}$  en fonction de  $s$  et de  $n$ , propriété qui semble être d'une certaine importance quand il s'agit d'étudier le cas encore très peu connu où  $s = e^{i\alpha}$ ,  $\alpha$  étant incommensurable à  $\pi$ . Il s'ensuit par exemple immédiatement qu'il existe dans ce cas une quantité positive  $g_p$  dépendant de  $p, s, a_2, \dots, a_p$  seulement, telle qu'on a, quel que soit  $n$ ,  $|a_p^{(n)}| < g_p$ . Je terminerai ces pages en donnant comme d'autres applications de la formule, d'une part le développement en série entière de la fonction  $K(z)$  de M. Kœnigs et d'autre part le développement en série entière de la fonction inverse de  $\varphi(z)$ .

2. FORMULE POUR  $a_p^{(n)}$  EN FONCTION DES  $a_2, \dots, a_p$ . — En remplaçant dans

$$z_{n-1} = s^{n-1} z + a_2^{(n-1)} z^2 + \dots + a_p^{(n-1)} z^p + \dots$$

$z$  par  $z_1$  et en égalant ensuite des deux côtés le coefficient de  $z^p$

on trouve d'abord la formule

$$(1) \quad a_p^{(n)} = s^{n-1} a_p + a_2^{(n-1)} K_{p,2} + \dots + a_q^{(n-1)} K_{p,q} + \dots + a_p^{(n-1)} s^p$$

en posant

$$K_{p,q} = \sum_{(\alpha)} \frac{q!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!} s^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_p^{\alpha_p} \quad (q = 2, 3, \dots, p),$$

la somme étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives des  $\alpha$  satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p &= q, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + p\alpha_p &= p. \end{aligned}$$

Attribuons à  $a_r$  le poids  $r - 1$  ; on verra sans peine que tous les termes de  $K_{p,q}$  auront le même poids  $p - q$ , d'où il suit qu'en supposant que  $a_q^{(n-1)}$  ait le poids  $q - 1$ ,  $a_p^{(n)}$  aura le poids  $p - 1$  ; or, pour  $n = 1$  on a  $a_p^{(1)} = a_p$ , donc le résultat est général. On a ainsi pour  $a_p^{(n)}$  une expression de la forme

$$(2) \quad a_p^{(n)} = \sum_{(\mu)_p} b_{\mu_1, \dots, \mu_p}^{(n)} a_2^{\mu_2} \dots a_p^{\mu_p},$$

la somme étant étendue à tout système  $(\mu)_p$  des nombres entiers non négatifs  $\mu$  satisfaisant à la condition

$$\mu_2 + 2\mu_3 + \dots + (p-1)\mu_p = p - 1.$$

En portant cela dans la formule (1) on trouve

$$(3) \quad \sum_{(\mu)_p} b_{\mu_1, \dots, \mu_p}^{(n)} a_2^{\mu_2} \dots a_p^{\mu_p} = s^{n-1} a_p + \sum_{q=2}^p \sum_{(\mu)_q} b_{\mu_1, \dots, \mu_q}^{(n-1)} a_2^{\mu_2} \dots a_q^{\mu_q} K_{p,q}.$$

Soit alors  $\lambda_2, \dots, \lambda_p$  un système quelconque de nombres entiers non négatifs tels que

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 + \dots + (p-1)\lambda_p = p - 1$$

et égalons dans (3) des deux côtés le coefficient de  $a_2^{\lambda_2} \dots a_p^{\lambda_p}$ . Désignons pour abrégier par  $[\mu]_q$  un système quelconque de nombres  $\mu_2, \dots, \mu_q$  satisfaisant à la fois aux conditions

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \mu_2 + 2\mu_3 + \dots + (q-1)\mu_q &= q - 1, \\ 0 \leq \mu_2 \leq \lambda_2, \quad \dots, \quad 0 \leq \mu_q \leq \lambda_q, \\ \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_q &\geq \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_p - q. \end{aligned} \right.$$

Chaque fois qu'il existe un tel système de nombres  $\mu$  on aura dans (3) un terme de coefficient

$$b_{\mu_2, \dots, \mu_q}^{(n-1)} \frac{q!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!} s^{\alpha},$$

en  $\alpha_2^{\lambda_2} \dots \alpha_p^{\lambda_p}$ , provenant du terme en  $K_{p,q}$ ; on a encore

$$\alpha_2 = \lambda_2 - \mu_2, \quad \dots, \quad \alpha_q = \lambda_q - \mu_q, \quad \alpha_{q+1} = \lambda_{q+1}, \quad \dots, \quad \alpha_p = \lambda_p, \\ \alpha_1 = q + (\mu_2 + \dots + \mu_q) - (\lambda_2 + \dots + \lambda_p).$$

En particulier, on a, pour  $q = p$  en vertu de (4),

$$\mu_2 = \lambda_2, \quad \dots, \quad \mu_p = \lambda_p$$

comme seul système  $[\mu]_p$ , donc le seul terme à droite dans (3) contenant un coefficient à  $p - 1$  indices est le terme  $b_{\lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(n-1)} s^p$ . On aura donc les formules

$$(5) \quad b_{\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0}^{(n)} = s^p b_{\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0}^{(n-1)} + \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!} s^{\alpha} b_{\mu_2, \dots, \mu_q}^{(n-1)}$$

dans le cas  $\lambda_p = 0$ , et

$$(5 \text{ bis}) \quad b_{0, \dots, 0, 1}^{(n)} = s^p b_{0, \dots, 0, 1}^{(n-1)} + s^{n-1}$$

si  $\lambda_p = 1$ .

3. LE SYMBOLE  $\left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]$ . — Avant de tirer des équations (5) et (5 bis) la forme des coefficients  $b_{\lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(n)}$ , il sera commode d'introduire un symbole que je désignerai, à cause de ses analogies avec le coefficient binome  $\binom{n}{r}$  (auquel il se réduit d'ailleurs si l'on fait tendre  $s$  vers 1), par  $\left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]$ ; posons par définition

$$\left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] = \frac{(s^n - 1)(s^{n-1} - 1) \dots (s^{n-r+1} - 1)}{(s - 1)(s^2 - 1) \dots (s^r - 1)}, \quad \left[ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$$

pour des nombres  $n$  et  $r$  entiers et non négatifs. On a évidemment

$$\left[ \begin{matrix} n \\ n-r \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right], \quad r = 0, 1, \dots, n-1, \\ \left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] = 0 \quad \text{pour } r > n.$$

Démontrons encore les deux identités suivantes qui nous seront

utiles dans ce qui suit :

$$(6) \quad \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r \\ n-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix} \quad (r \leq n),$$

$$(7) \quad \sum_{i=0}^{p-r-1} (-1)^i s^{-(n-r)+\frac{i(i+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r+i \\ r \end{bmatrix} \\ = (-1)^{p-r-1} s^{-(p-r-1)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} \quad (r < p).$$

Montrons d'abord que la formule (6) est vraie dans le cas  $r = n$ , c'est-à-dire que

$$(6 \text{ bis}) \quad \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} = 1.$$

En effet, la formule (6) est bien exacte pour  $n = 1$ ; cherchons donc la différence

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ n-i+1 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} \\ = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} \left( \frac{s^{n+1}-1}{s^{n-i+1}-1} - 1 \right) + (-1)^n s^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2} + n+1-i} \begin{bmatrix} n \\ n-i+1 \end{bmatrix} + (-1)^n s^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i s^{\frac{i(i+1)}{2} + n-i} \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} + (-1)^n s^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ = s^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} + (-1)^n s^{\frac{n(n+1)}{2}} + s^n - s^n (-1)^n s^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Si donc nous supposons la formule (6 bis) vraie pour la valeur  $n$  cette différence se réduit à zéro, ce qui montre l'exactitude de la formule pour la valeur  $n + 1$ ; étant vraie pour  $n = 1$  elle est générale.

Supposons alors la formule (6) vraie pour la valeur  $n$  et  $r \leq n$ ;

alors, changeons  $n$  en  $n + 1$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} s^{\frac{i(i-1)}{2}} \left[ \frac{n+1}{n-i+1} \right] \left[ \frac{n-i+1}{n-r+1} \right] \\ &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \frac{s^{n+1}-1}{s^{n+1-r}-1} \left[ \begin{matrix} n \\ n-i \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} n-i \\ n-r \end{matrix} \right] \\ &= \frac{s^{n+1}-1}{s^{n-r+1}-1} \left[ \begin{matrix} n \\ n-r \end{matrix} \right] \\ &= \left[ \begin{matrix} n+1 \\ n+1-r \end{matrix} \right]. \end{aligned}$$

La formule sera donc vraie pour la valeur  $n + 1$  et  $r \leq n$ ; mais, d'après la formule (6 bis) elle est encore vraie pour  $n + 1$  et  $r = n + 1$ ; donc elle est générale.

Passons à la formule (7); en la supposant vraie pour  $n$  quelconque et une certaine valeur de  $p$ , changeons  $p$  en  $p + 1$ ; on trouve alors

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{p-r} (-1)^i s^{-i(n-r)+\frac{i(i+1)}{2}} \left[ \begin{matrix} n \\ r+i \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} r+i \\ r \end{matrix} \right] \\ &= (-1)^{p-r-1} s^{-(p-r-1)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{matrix} \right] \\ & \quad + (-1)^{p-r} s^{-(p-r)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r+1)}{2}} \left[ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] \\ &= (-1)^{p-r-1} s^{-(p-r)(n-r)+\frac{(p-r)(p-r+1)}{2}} \\ & \quad \times \left( s^{n-p} \left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{matrix} \right] - \left[ \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] \right). \end{aligned}$$

Or, la quantité entre les parenthèses se trouve égale à

$$\begin{aligned} & \frac{(s^n-1) \dots (s^{n-r+1}-1) \cdot (s^{n-r-1}-1) \dots (s^{n-p+1}-1)}{(s-1) \dots (s^r-1) \cdot (s-1) \dots (s^{p-r-1}-1)} \left( s^{n-p} - \frac{s^{n-r}-1}{s^{p-r}-1} \right) \\ &= - \left[ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} n-r-1 \\ p-r \end{matrix} \right], \end{aligned}$$

ce qui démontre la formule (7) en général; car, étant toujours vraie pour  $r = p - 1$  elle est exacte pour la valeur  $p + 1$  et  $r < p + 1$  si elle l'est pour la valeur  $p$  et  $r < p$ ; et elle est vraie pour  $p = 1$ ,  $r = 0$ .

4. LE COEFFICIENT  $b_{0, \dots, 0, 1}^{(n)}$ . — Revenons à la formule (5 bis),

qui donne d'une manière simple

$$b_{0, \dots, 0, 1}^{(n)} = s^{n-1} \frac{s^{n(p-1)} - 1}{s^{p-1} - 1}.$$

Il convient de donner à cette expression une autre forme en posant

$$(8) \quad s^{n-1} \frac{s^{n(p-1)} - 1}{s^{p-1} - 1} = A_1 s^n \begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix} + A_2 s^{2n} \begin{bmatrix} n \\ p-2 \end{bmatrix} + \dots + A_{p-1} s^{(p-1)n} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix},$$

les  $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}$  étant à déterminer. En faisant dans (8)  $n = k$  où  $1 \leq k \leq p-1$ , on trouve

$$s^{k-1} \frac{s^{k(p-1)} - 1}{s^{p-1} - 1} = A_{p-k} s^{k(p-k)} \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} + \dots + A_{p-1} s^{k(p-1)} \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}.$$

On aura donc pour  $k = 1$ ,  $A_{p-1} s^{p-1} = 1$ ; pour  $k = 2$ ,

$$A_{p-2} s^{2(p-2)} = s(s^{p-1} + 1) - A_{p-1} s^{2(p-1)}(s + 1),$$

et en continuant ainsi on trouve de proche en proche pour les  $A_{p-k}$  des expressions telles que  $A_{p-k} s^{k(p-k)}$  est un polynome en  $s$  dont le degré sera au plus égal à  $(k-1)p$ .

Tous les  $A_1, \dots, A_{p-1}$  ainsi déterminés rendent l'équation (8) identique; en effet, divisons les deux membres de cette équation par  $s^n$  et mettons ensuite  $s^n = x$ ; on aura une équation en  $x$  de la forme

$$\frac{x^{p-1} - 1}{s^{p-1} - 1} = A_1 \frac{(x-1)(xs^{-1}-1) \dots (xs^{-p+1}-1)}{(s-1)(s^2-1) \dots (s^{p-1}-1)} + \dots + A_{p-1} x^{p-2} \frac{x-1}{s-1},$$

donc une égalité entre deux polynomes de degré  $p-1$ ; cette égalité étant vérifiée, d'après ce qui précède, pour  $x = 1; s, s^2, \dots, s^{p-1}$ , elle est bien identique en  $x$ ; donc il en est de même pour l'équation (8).

5. LE COEFFICIENT  $b_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{(n)}$ . — Je dis qu'on a encore pour le coefficient général  $b_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{(n)}$  une expression de la forme que nous venons de trouver pour  $b_{0, \dots, 0, 1}^{(n)}$ , soit

$$(9) \quad b_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{(n)} = A_1^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} s^n \begin{bmatrix} n \\ p-1 \end{bmatrix} + A_2^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} s^{2n} \begin{bmatrix} n \\ p-2 \end{bmatrix} + \dots + A_{p-1}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} s^{(p-1)n} \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix},$$

où les  $A_{p-k}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_p)}$ , multipliés par  $s^{k(p-k)}$ , sont encore des polynomes en  $s$  de degré au plus égal à  $(k-1)p$ . En effet, portons l'expression (9) dans la formule (5). On aura, puisque  $\lambda_p = 0$ , d'où nécessairement  $p > 2$ ,

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{in} \begin{bmatrix} n \\ p-i \end{bmatrix} \\ = s^p \sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{i(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ p-i \end{bmatrix} \\ + \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!} s^{\alpha_1} \sum_{i=1}^{q-1} A_i^{(\mu_2, \dots, \mu_q)} s^{i(n-1)} \begin{bmatrix} n-1 \\ q-i \end{bmatrix},$$

d'où, en posant  $n = k$ ,  $i \leq k \leq p-1$ ,

$$(11) \quad \sum_{i=p-k}^{p-1} A_i^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{ik} \begin{bmatrix} k \\ p-i \end{bmatrix} \\ = s^p \sum_{i=q-k+1}^{p-1} A_i^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ p-i \end{bmatrix} \\ + \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!} s^{\alpha_1} \sum_{i=q-k+1}^{q-1} A_i^{(\mu_2, \dots, \mu_q)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ q-i \end{bmatrix}.$$

Cette équation donne d'abord pour  $k = 1$

$$A_{p-1}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{p-1} = 0,$$

et alors, pour  $k = 2$ ,

$$A_{p-2}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{2(p-2)} + A_{p-1}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{2(p-1)} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ = s^p A_{p-1}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{p-1} + \sum_{q=2}^{p-1} \sum_{[\mu]_q} \frac{q!}{\alpha_1! \dots \alpha_p!} s^{\alpha_1} A_{q-1}^{(\mu_2, \dots, \mu_q)} s^{q-1}.$$

D'après ce qui a déjà été trouvé l'expression à droite est au plus de degré  $p$  en  $s$ , donc  $A_{p-2}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{2(p-2)}$  est un polynome en  $s$  de degré  $p$  au plus.

Or, supposons qu'on ait déjà trouvé de l'équation (11) tous les  $A_i^{(\mu_2, \dots, \mu_n)}$  pour  $q < p$  et  $i \leq q - k + 1$ , ainsi que  $A_i^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)}$  pour  $i \leq p - k + 1$  et supposons que, pour tous ces coefficients on ait trouvé le degré en  $s$  du produit  $A_{p-k}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_p)} s^{k(p-k)}$  au plus égal à  $(k-1)p$ . Alors l'équation (11) donne  $A_{p-k}^{(\lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{k(p-k)}$  linéai-



rement en ces coefficients.\* Or  $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$  est en général un polynome en  $s$  de degré  $r(n - r)$ , d'où il suit que le terme

$$s^p A_i^{(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, 0)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ p-i \end{bmatrix}$$

aura le degré  $(k-1)p$  au plus pour  $i = p - k + 1, \dots, p - 1$ ; et le terme

$$s^\alpha A_i^{(\mu_1, \dots, \mu_q)} s^{i(k-1)} \begin{bmatrix} k-1 \\ q-i \end{bmatrix}$$

aura le degré  $\alpha_1 + (k-2)q$  au plus, donc, puisque  $\alpha_1 \leq q, q < p$  son degré sera inférieur à  $(k-1)p$ ; donc  $A_{p-k}^{(\lambda_1, \dots, \lambda_q)} s^{k(p-k)}$  est toujours un polynome en  $s$  de degré  $(k-1)p$  au plus.

En supposant ainsi tous les  $A_i^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)}$  déterminés, ils rendent l'équation (10) identique; en effet, en divisant par  $s^n$  les deux membres de (10) et en mettant ensuite  $s^n = x$  on obtient comme tout à l'heure une égalité entre deux polynomes en  $x$  de degré  $p - 1$  qui est vérifiée pour  $x = s, s^2, \dots, s^{p-1}$  avec le même coefficient de  $x^{p-1}$ .

On a donc, en résumé, pour le coefficient  $\alpha_p^{(n)}$  la formule

$$\alpha_p^{(n)} = \sum_{(\lambda)_p} b_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{(n)} \alpha_2^{\lambda_2} \dots \alpha_p^{\lambda_p} \quad (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + (p-1)\lambda_p = p-1),$$

les  $b_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{(n)}$  ayant la forme

$$b_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{(n)} = \sum_{i=1}^{p-1} A_i^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} s^{in} \begin{bmatrix} n \\ p-i \end{bmatrix},$$

où  $A_i^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)} s^{i(p-i)}$  est un polynome en  $s$  de degré  $p(p-i-1)$  au plus, et qui se détermine par l'équation (11).

6. AUTRE FORME DE LA FORMULE POUR  $\alpha_p^{(n)}$ . — Étant démontrée l'existence des coefficients  $A_i^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)}$  vérifiant l'équation (9), cherchons à les exprimer d'une manière plus commode. Mettons, à cet effet, dans (9) successivement  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ce qui permet d'en tirer les  $A_i^{(\lambda_1, \dots, \lambda_p)}$  en fonction des  $b_{\lambda_1, \dots, \lambda_p}^{(n)}$ ; pour simplifier l'écriture supprimons les indices  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  communs pour tous les  $A$  et  $b$  dans ce qui va suivre. On trouve d'abord, pour  $n = 1$ ,

$$s^{p-1} A_{p-1} = b^{(1)}$$

et pour  $n = 2$

$$s^{2(p-2)} A_{p-2} = b^{(2)} - s^{p-1} b^{(1)}.$$

Supposons qu'on ait trouvé, en continuant ainsi, jusqu'à une certaine valeur de  $k$

$$(12) \quad s^{k(p-k)} A_{p-k} = \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r s^{r(p-k) + \frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k \\ k-r \end{bmatrix} b^{(k-r)}.$$

Alors on aura, en faisant dans (9)  $n = k + 1$ ,

$$b^{(k+1)} = s^{(p-k-1)(k+1)} A_{p-k-1} \\ + s^{(p-k)(k+1)} \begin{bmatrix} k+1 \\ k \end{bmatrix} A_{p-k} + \dots + s^{(p-1)(k+1)} \begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix} A_{p-1},$$

d'où

$$s^{(k+1)(p-k-1)} A_{p-k-1} \\ = b^{(k+1)} - \sum_{t=0}^{k-1} s^{(k+1)(p-k-t)} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} A_{p-k+t} \\ = b^{(k+1)} - \sum_{t=0}^{k-1} \sum_{r=0}^{k-t-1} (-1)^r s^{(t+r+1)(p-k+t) + \frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-t-r \end{bmatrix} b^{(k-t-r)} \\ = b^{(k+1)} - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{t=0}^r (-1)^{r-t} s^{(r+1)(p-k+t) + \frac{(r-t)(r-t+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-r \end{bmatrix} b^{(k-r)} \\ = b^{(k+1)} - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r s^{(r+1)(p-k) + \frac{r(r+1)}{2}} b^{(k-r)} \sum_{t=0}^r (-1)^t s^{\frac{t(t+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-r \end{bmatrix}.$$

Or, la formule (6) donne pour  $n = k + 1$ , en changeant  $r$  en  $r + 1$  et en mettant  $t + 1$  au lieu de  $i$ ,

$$\sum_{t=0}^r (-1)^t s^{\frac{t(t+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-t \\ k-r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+1 \\ k-r \end{bmatrix},$$

done on aura

$$s^{(k+1)(p-k-1)} A_{p-k-1} = b^{(k+1)} - \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r s^{(r+1)(p-k) + \frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k-r \end{bmatrix} b^{(k-r)} \\ = \sum_{r=0}^k (-1)^r s^{r(p-k-1) + \frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} k+1 \\ k+1-r \end{bmatrix} b^{(k+1-r)},$$

ce qui montre l'exactitude de la formule (12) en général.

Portons ensuite l'expression (12) dans la formule (9), nous

trouvons

$$\begin{aligned}
 b^{(n)} &= \sum_{l=1}^{p-1} A_{p-l} s^{(p-l)n} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{l=1}^{p-1} s^{(p-l)n} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} s^{-l(p-l)} \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^r s^{r(p-l) + \frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} l \\ l-r \end{bmatrix} b^{(l-r)} \\
 &= \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^r s^{(p-l)(n-l+r) + \frac{r(r+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ l-r \end{bmatrix} b^{(l-r)} \\
 &= \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-r-1} (-1)^k s^{(p-k-r)(n-r) + \frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+r \\ r \end{bmatrix} b^{(r)} \\
 &= \sum_{r=1}^{p-1} s^{(p-r)(n-r)} b^{(r)} \sum_{k=0}^{p-r-1} (-1)^k s^{-k(n-r) + \frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k+r \\ r \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

donc, en vertu de la formule (7),

$$b^{(n)} = \sum_{r=1}^{p-1} s^{(p-r)(n-r)} b^{(r)} (-1)^{p-r-1} s^{-(p-r-1)(n-r) + \frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix}$$

ou enfin

$$(13) \quad b_{\lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(n)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r + \frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} b_{\lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(r)}.$$

Portons cette expression des  $b_{\lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(n)}$  dans la formule (2), il vient

$$\begin{aligned}
 a_p^{(n)} &= \sum_{(\lambda)_p} \left( \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r + \frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} b_{\lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(r)} \right) a_2^\lambda \dots a_p^{\lambda_p} \\
 &= \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r + \frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} \sum_{(\lambda)_p} b_{\lambda_2, \dots, \lambda_p}^{(r)} a_2^{\lambda_2} \dots a_p^{\lambda_p},
 \end{aligned}$$

donc enfin la formule énoncée

$$(14) \quad a_p^{(n)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{n-r + \frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} a_p^{(r)},$$

formule qui exprime le coefficient de  $z^p$  dans l'itérée  $z_n$  d'ordre quelconque linéairement par les coefficients de  $z^p$  dans  $z_1, z_2, \dots, z_{p-1}$ . Tirons-en quelques conséquences immédiates.

7. DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION DE M. KÖENIGS. — Dans le cas où  $|s| < 1$  la fonction  $K(z)$  de M. Köenigs est définie par

$$K(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{s^n}.$$

Or, nous avons posé

$$z_n = s^n z + \alpha_2^{(n)} z^2 + \dots + \alpha_p^{(n)} z^p + \dots$$

et, en vertu de la formule (14), on a

$$\frac{\alpha_p^{(n)}}{s^n} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{-r + \frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{bmatrix} \alpha_p^{(r)},$$

quantité qui tend pour  $p$  fixe vers

$$\beta_p = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} \frac{s^{-r + \frac{(p-r)(p-r-1)}{2}}}{(1-s) \dots (1-s^r)(1-s) \dots (1-s^{p-r-1})} \alpha_p^{(r)}$$

lorsque  $n$  croît indéfiniment; or, la série pour  $z_n$  converge, quel que soit  $n$  à l'intérieur d'un certain cercle  $\Gamma$  de centre à l'origine; donc la série

$$S(z) = z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_p z^p + \dots$$

converge dans le même cercle; et elle aura pour somme la fonction  $K(z)$ ; on trouve, en effet,

$$(15) \quad \left| S(z) - \frac{z_n}{s^n} \right| \leq \left| \left( \beta_2 - \frac{\alpha_2^{(n)}}{s^n} \right) z^2 + \dots + \left( \beta_p - \frac{\alpha_p^{(n)}}{s^n} \right) z^p \right| \\ + \left| \beta_{p+1} z^{p+1} + \dots \right| + \left| \frac{1}{s^n} (\alpha_{p+1}^{(n)} z^{p+1} + \dots) \right|$$

Les séries pour  $\frac{z_n}{s^n}$  et  $S(z)$  convergeant uniformément dans un cercle  $\Gamma'$  intérieur à  $\Gamma$ , prenons  $p$  assez grand pour que les restes de ces deux séries soient inférieurs à  $\frac{\varepsilon}{3}$  en module,  $\varepsilon > 0$  étant donné arbitrairement; choisissons ensuite  $n$  assez grand pour que le premier terme à droite dans (15) soit inférieur à  $\frac{\varepsilon}{3}$ , il suit alors  $\left| S(z) - \frac{z_n}{s^n} \right| < \varepsilon$ , donc

$$K(z) = z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_p z^p + \dots$$

8. DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION INVERSE DE  $\varphi(z)$ . — Le symbole  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right]$  étant défini d'abord pour  $n$  entier et positif, on étendra immédiatement la définition au cas de  $n$  quelconque. Or, l'égalité (1) étant vérifiée identiquement en  $n$  pour les  $\alpha_p^{(n)}$  tirés de (14); il en sera de même si l'on remplace  $n$  par une quantité quelconque. Il s'ensuit qu'en posant

$$\alpha_p^{(-1)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r-1} s^{-1+r+\frac{(p-r)(p-r-1)}{2}} \left[ \begin{smallmatrix} -1 \\ r \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} -2-r \\ p-r-1 \end{smallmatrix} \right] \alpha_p^{(r)},$$

on trouve une série

$$z_{-1} = s^{-1}z + \alpha_2^{(-1)}z^2 + \dots + \alpha_p^{(-1)}z^p + \dots$$

qui satisfait formellement à la condition  $\varphi(z_{-1}) = z$ ; et cette équation définissant, pour  $s \neq 0$ , une fonction inverse  $z_{-1} = \varphi_{-1}(z)$ , holomorphe autour de l'origine et se réduisant à zéro pour  $z = 0$ , on aura, en effet,

$$\varphi_{-1}(z) = s^{-1}z + \alpha_2^{(-1)}z^2 + \dots + \alpha_p^{(-1)}z^p + \dots,$$

où les  $\alpha_p^{(-1)}$  se réduisent d'ailleurs à la forme plus simple

$$\alpha_p^{(-1)} = \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^r s^{-(r+1)\left(\frac{p-r}{2}\right)} \left[ \begin{smallmatrix} p \\ p-r-1 \end{smallmatrix} \right] \alpha_p^{(r)}.$$

9. UNE REMARQUE SUR LE CAS D'EXCEPTION  $s = e^{i\alpha}$ ,  $\alpha$  INCOMMENSURABLE A  $\pi$ . — Puisqu'on a dans ce cas  $|s^r| = 1$  pour  $r$  quelconque, il suit immédiatement

$$\left| \left[ \begin{smallmatrix} n \\ r \end{smallmatrix} \right] \right| < \frac{2^n}{|(s-1)\dots(s^r-1)|} \left| \left[ \begin{smallmatrix} n-r-1 \\ p-r-1 \end{smallmatrix} \right] \right| < \frac{2^{p-r-1}}{|(s-1)\dots(s^{p-r-1}-1)|},$$

donc, quel que soit  $n$ ,

$$|\alpha_p^{(n)}| < g_p = 2^{p-1} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{|\alpha_p^{(r)}|}{|(s-1)\dots(s^{r+1}-1)(s-1)\dots(s^{p-r-1}-1)|},$$

quantité qui ne dépend que de  $p, s, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ .