Bulletin de la S. M. F.

Th. Varopoulos

Sur les involutions exceptionnelles et les valeurs exceptionnelles des algébroïdes

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 151-162
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__151_0>

SUR LES INVOLUTIONS EXCEPTIONNELLES ET LES VALEURS EXCEPTIONNELLES DES ALGÉBROÏDES ;

PAR M. THÉODORE VAROPOULOS.

1. Considérons une algébroïde d'ordre $\nu = 3$, pour simplifier l'écriture, définie par une équation de la forme

$$f(x, u) \equiv u^3 + f_1(x)\, u^2 + f_2(x)\, u + f_3(x) = 0$$

et supposons qu'elle admette deux involutions exceptionnelles (1) du premier type

$$G_1 \equiv \lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \equiv P_1(x),$$
$$G_2 \equiv \mu_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 \equiv P_2(x),$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ étant des polynomes. Nous allons faire voir que *l'algébroïde admet* $\nu - 1$ *valeurs exceptionnelles du premier type*, c'est-à-dire deux valeurs $u = u_0$ telles que

$$f(x, u) \equiv \text{polynome ou constante.}$$

A cet effet, remarquons que l'expression

$$\alpha G_1 + \beta G_2 + \gamma \equiv G,$$

α, β, γ étant des constantes, est aussi une combinaison exceptionnelle.

Or,

$$G \equiv (\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0 + \gamma) + (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1) f_1$$
$$+ (\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2) f_2 + (\alpha\lambda_3 + \beta\mu_3) f_3 \equiv \alpha P_1(x) + \beta P_2(x) + \gamma,$$

et, pour que la valeur u_0 soit exceptionnelle du premier type, il

(1) *Voir* P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1927) et *Sur les familles complexes et leurs applications* (*Acta mathematica*, t. 49, 1926, p. 115-161).

suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} \alpha\lambda_1 + \beta\mu_1 \quad\quad &= \rho u_0^2, \\ \alpha\lambda_2 + \beta\mu_2 \quad\quad &= \rho u_0, \\ \alpha\lambda_3 + \beta\mu_3 \quad\quad &= \rho, \\ \alpha\lambda_0 + \beta\mu_0 + \gamma &= \rho u_0^3, \end{aligned}$$

et, comme on peut toujours supposer $\rho = 1$, la valeur u_0 doit vérifier l'équation

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & u_0^2 \\ \lambda_2 & \mu_2 & u_0 \\ \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} \equiv A u_0^2 + B u_0 + C = 0;$$

les involutions G_1, G_2 étant distinctes, les nombres A, B, C ne sont pas tous nuls; par conséquent, nous aurons deux valeurs de u_0, en général distinctes, qui sont exceptionnelles du premier type.

2. On peut arriver au même résultat de la manière suivante : Considérons maintenant une algébroïde quelconque d'ordre ν, non entière, définie par l'équation

$$(1) \qquad f_0(x)u^\nu + f_1(x)u^{\nu-1} + f_2(x)u^{\nu-2} + \ldots + f_\nu(x) = 0$$

et supposons qu'elle admette ν combinaisons exceptionnelles distinctes du premier type

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv \lambda_0^1 f_0(x) + \lambda_1^1 f_1(x) + \ldots + \lambda_\nu^1 f_\nu(x) \equiv P_1(x), \\ G_2 &\equiv \lambda_0^2 f_0(x) + \lambda_1^2 f_1(x) + \ldots + \lambda_\nu^2 f_\nu(x) \equiv P_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_\nu &\equiv \lambda_0^\nu f_0(x) + \lambda_1^\nu f_1(x) + \ldots + \lambda_\nu^\nu f_\nu(x) \equiv P_\nu(x); \end{aligned}$$

comme les déterminants d'ordre ν extraits du tableau

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0^1 & \lambda_1^1 & \ldots & \lambda_\nu^1 \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \ldots & \lambda_\nu^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_0^\nu & \lambda_1^\nu & \ldots & \lambda_\nu^\nu \end{Vmatrix}$$

ne sont pas tous nuls, nous pouvons définir les ν fonctions : f_1, f_2, ..., f_ν par exemple, en changeant au besoin l'ordre des termes, en fonction linéaire de f_0.

Soient

$$f_i(x) = \alpha_i f_0(x) + p_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

α_i étant des constantes et $p_i(x)$ des polynomes. L'équation (1) devient

$$f_0(x)(u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \alpha_2 u^{\nu-2} + \ldots + \alpha_\nu)$$
$$+ p_1(x) u^{\nu-1} + p_2(x) u^{\nu-2} + \ldots + p_\nu(x) = 0,$$

et l'on voit que les zéros du polynome $u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ sont bien des valeurs exceptionnelles du premier type; par conséquent, nous aurons, en général, ν valeurs de u qui sont exceptionnelles.

3. Je vais étudier maintenant le cas où l'équation en u

$$u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu = 0,$$

a une racine $u = u_0$ multiple d'ordre $k \leqq \nu$.

L'équation (1) s'écrit

$$F(x, u) = f_0(x)\varphi(u) + \Phi(x, u) = 0,$$

$\varphi(u)$ étant un polynome en u à coefficients constants de degré ν et $\Phi(x, u)$ un polynome en u de degré $\nu - 1$ dont les coefficients sont des polynomes en x.

Or,

$$\begin{aligned} F'_u(x, u) &= f_0(x)\varphi'(u) + \Phi'_u(x, u), \\ F''_{u^2}(x, u) &= f_0(x)\varphi''(u) + \Phi''_{u^2}(x, u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(k-1)}_{u^{k-1}}(x, u) &= f_0(x)\varphi^{(k-1)}(u) + \Phi^{(k-1)}_{u^{k-1}}(x, u), \end{aligned}$$

et comme

$$\varphi'(u_0) = \varphi''(u_0) = \ldots = \varphi^{(k-1)}(u_0) = 0,$$

on voit que la valeur $u = u_0$ est une valeur exceptionnelle d'ordre k, au sens de M. Paul Montel (1).

Nous obtenons la proposition suivante :

Théorème. — *Si une algébroïde d'ordre ν admet ν involutions exceptionnelles du premier type au sens de M. Montel, elle admet aussi ν valeurs exceptionnelles du premier type.*

4. Supposons que les involutions $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ soient du

(1) P. Montel, *Sur les familles complexes et leur applications* (*Acta mathematica*, 1926, p. 155).

second type, c'est-à-dire que

$$G_i \equiv P_i(x)\, e^{\varphi_i(x)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

$P_i(x)$ étant des polynomes et $\varphi_i(x)$ des fonctions entières non constantes, les $f_i(x)$ seront alors de la forme

$$f_i(x) = \alpha_i f_0(x) + p_i(x)\, e^{\varphi_i(x)},$$

et, en mettant l'équation (1) sous la forme

$$\begin{aligned} & f_0(x)(u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu) \\ & \quad + p_1(x)\, e^{\varphi_1(x)} u^{\nu-1} + p_2(x)\, e^{\varphi_2(x)} u^{\nu-2} + \ldots + p_\nu(x)\, e^{\varphi_\nu(x)} = 0, \end{aligned}$$

on voit que les zéros du polynome $u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ sont des valeurs exceptionnelles généralisées, au sens de M. Rémoundos (¹); on arrive alors à l'énoncé suivant :

Théorème. — *Si une algébroïde d'ordre ν admet ν involutions exceptionnelles du second type, elle admet aussi ν valeurs exceptionnelles généralisées.*

Si une valeur $u = u_0$ est une racine multiple d'ordre k de l'équation

$$u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu = 0,$$

elle sera nécessairement exceptionnelle généralisée d'ordre k pour l'algébroïde.

5. Nous allons maintenant considérer une algébroïde entière, d'ordre $\nu = 3$, par exemple,

$$f(x, u) \equiv u^3 + q_1(x)\, u^2 + q_2(x)\, u + q_3(x) = 0,$$

et supposer qu'elle admette une seule involution exceptionnelle du premier type. Nous allons voir que l'algébroïde n'aura pas, en général, de valeurs exceptionnelles.

L'algébroïde $u(x)$ admet, par hypothèse, la seule involution exceptionnelle du premier type :

$$G \equiv \lambda_0 + \lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x) \equiv P(x),$$

(¹) G. Rémoundos, *Sur quelques points de la théorie des nombres* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1926).

$P(x)$ désignant un polynome; si elle admettait une valeur exceptionnelle du premier type $u = u_0$, on aurait, puisqu'il n'existe pas deux combinaisons exceptionnelles distinctes,

$$(2)\qquad \begin{aligned} & u_0^3 + q_1(x)\,u_0^2 + q_2(x)\,u_0 + q_3(x) \\ & \equiv k[\lambda_0 + \lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x)] + l, \end{aligned}$$

d'où, en identifiant,

$$\begin{aligned} u_0^3 &= k\lambda_0 + l, \\ u_0^2 &= k\lambda_1, \\ u_0 &= k\lambda_2, \\ 1 &= k\lambda_3; \end{aligned}$$

on en déduit la condition

$$\lambda_2^2 = \lambda_1\lambda_3.$$

Cette condition est suffisante : le système précédent admet alors, si $\lambda_3 \neq 0$, la solution

$$u_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \qquad k = \frac{1}{\lambda_3}, \qquad l = \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3}{\lambda_3^2},$$

donc

$$f(x, u_0) \equiv \frac{1}{\lambda_0}\,P(x) + \frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3}{\lambda_3^2}.$$

Étudions à part le cas de $\lambda_3 = 0$. L'identité (2) montre alors que $q_3(x)$ doit se réduire à une constante. Il y a deux valeurs exceptionnelles du premier type 0 et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

6. Nous allons nous occuper maintenant du cas général : on a vu que, pour une algébroïde d'ordre ν, l'existence de ν involutions exceptionnelles du premier type entraîne celle de ν valeurs exceptionnelles du premier type.

On sait que, lorsqu'il existe k involutions exceptionnelles du premier type pour une algébroïde, il en est de même pour toute algébroïde de la même classe. Traitons à ce sujet le problème suivant proposé par M. P. Montel : *Étudier les cas dans lesquels ces involutions entraînent l'existence de $k' \leqq k$ valeurs exceptionnelles.*

Soient d'abord les algébroïdes d'ordre $\nu = 2$; elles sont définies par l'équation

$$(3)\qquad f_0(x)\,u^2 + f_1(x)\,u + f_2(x) = 0.$$

Supposons que cette algébroïde admette deux involutions exceptionnelles du premier type

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \equiv P_1(x),$$
$$G_2 \equiv \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 = P_2(x).$$

Si f_0, f_1, f_2 désignent les coordonnées homogènes d'un point du plan, l'équation (3) représente une droite dépendant du paramètre u, tangente à la conique

$$f_1^2 - 4 f_0 f_2 = 0.$$

Dire que la valeur $u = u_0$ est exceptionnelle, c'est dire que la combinaison exceptionnelle $f_0 u_0^2 + f_1 u_0 + f_2$ correspond à une droite tangente à la conique, tandis que, en général, une combinaison exceptionnelle correspond à une droite arbitraire du plan

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Quand il y a deux combinaisons exceptionnelles G_1, G_2, les combinaisons $\alpha G_1 + \beta G_2$ correspondent aux droites passant par l'intersection de

$$G_1 = 0, \quad \text{et} \quad G_2 = 0;$$

l'expression $\alpha G_1 + \beta G_2$, α, β étant des constantes, est exceptionnelle. Donc, si l'algébroïde $u(x)$ admet deux combinaisons exceptionnelles, nous avons deux droites G_1 et G_2 qui se coupent en M, et, comme de ce point on peut mener deux tangentes à la conique, on en conclut que l'existence de deux involutions exceptionnelles entraîne celle de deux valeurs exceptionnelles faciles à calculer.

Exemple : Prenons les algébroïdes

$$5 \sin x\, u^2 + 5(x - 5 \sin x)\, u + (x^2 - 6x + 30 \sin x) = 0,$$

on a

$$G_1 \equiv 5 f_0 + f_1 \equiv x,$$
$$G_2 \equiv 6 f_1 + 5 f_2 \equiv x^2;$$

les deux droites G_1, G_2 ont pour équations

$$5 f_0 + f_1 = 0 \quad \text{et} \quad 6 f_1 + 5 f_2 = 0,$$

le point M a pour coordonnées $f_0 = 1$, $f_1 = -5$, $f_2 = 6$; par conséquent, les valeurs u_0, u'_0 sont les racines de l'équation

$$u^2 - 5u + 6 = 0;$$

ces valeurs, 2 et 3, sont bien exceptionnelles du premier type; on a en effet :

$$4f_0 + 2f_1 + f_2 \equiv \frac{4x + x^2}{5} \equiv \frac{1}{5}(4G_1 + G_2),$$

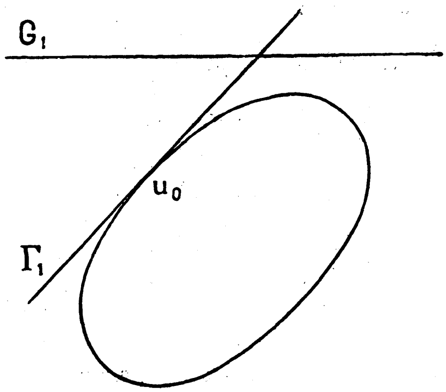
$$9f_0 + 3f_1 + f_2 \equiv \frac{9x + x^2}{5} \equiv \frac{1}{5}(9G_1 + G_2).$$

7. Supposons maintenant qu'il n'y ait qu'une involution exceptionnelle

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \equiv P_1(x),$$

correspondant à la droite G_1 (*fig.* 1); considérons une valeur $u = u_0$, et la tangente correspondante Γ_1 à la conique $Y^2 - 4XZ = 0$; il

Fig. 1.



existe une transformation homographique, dépendant de six paramètres,

$$f_0 = \alpha_0 F_0 + \beta_0 F_1 + \gamma_0 F_2,$$
$$f_1 = \alpha_1 F_0 + \beta_1 F_1 + \gamma_1 F_2,$$
$$f_2 = \alpha_2 F_0 + \beta_2 F_1 + \gamma_2 F_2,$$

qui fait coïncider G_1 et Γ_1 et alors nous avons, dans la même classe que u, des algébroïdes

$$F_0 u^2 + F_1 u + F_2 = 0,$$

possédant une valeur exceptionnelle u_0 : ces algébroïdes dépendent de 7 paramètres.

Exemple : Considérons les algébroïdes

$$f_0 u^2 + f_1 u + f_2 = 0,$$

admettant une involution exceptionnelle

$$G_1 \equiv f_0 + 2f_1 + 3f_2 \equiv x,$$

et cherchons, dans la même classe, les algébroïdes admettant la valeur u_0 comme valeur exceptionnelle. Faisons la transformation

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha_0 F_0 + \beta_0 F_1 + \gamma_0 F_2, \\ f_1 &= \alpha_1 F_0 + \beta_1 F_1 + \gamma_1 F_2, \\ f_2 &= \alpha_2 F_0 + \beta_2 F_1 + \gamma_2 F_2, \end{aligned}$$

la relation devient

$$G'_1 \equiv (\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2) F_0 + (\beta_0 + 2\beta_1 + 3\beta_2) F_1 + (\gamma_0 + 2\gamma_1 + 3\gamma_2) F_2 \equiv x;$$

pour que u_0 soit une valeur exceptionnelle du premier type, il faut que la droite

$$u_0^2 F_0 + u_0 F_1 + F_2 = 0$$

coïncide avec

$$G'_1 = 0;$$

donc

$$\begin{aligned} \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= k u_0^2, \\ \beta_0 + 2\beta_1 + 3\beta_2 &= k u_0, \\ \gamma^0 + 2\gamma_1 + 3\gamma_2 &= k. \end{aligned}$$

Si nous prenons arbitrairement les paramètres α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, u_0, k, nous aurons ainsi α_0, β_0, γ_0; l'algébroïde transformée dépend de 8 paramètres homogènes α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, u_0, k; en réalité de 7 paramètres, puisque cette algébroïde ne dépend que des rapports de ses coefficients.

8. Les valeurs exceptionnelles que nous avons calculées ci-dessus ne dépendent pas des seconds membres $P_1(x)$, $P_2(x)$ et si, à la place des polynomes, il y a des exponentielles, nous aurons des valeurs exceptionnelles généralisées.

9. Examinons maintenant les algébroïdes d'ordre $\nu = 3$, définies par l'équation

$$f_0 u^3 + f_1 u^2 + f_2 u + f_3 = 0.$$

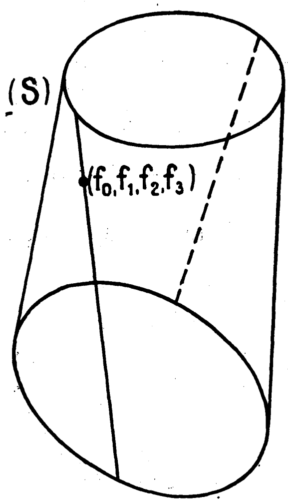
Si f_0, f_1, f_2, f_3 désignent les coordonnées homogènes d'un point de l'espace, cette équation représente un plan tangent à une surface développable (S) (*fig.* 2) : à toute combinaison linéaire des coefficients correspond un plan (P) qui devient tangent à la développable lorsque cette combinaison est relative à une valeur exceptionnelle.

Supposons que nous ayons trois involutions exceptionnelles du premier type

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \equiv P_1(x),$$
$$G_2 \equiv \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 \equiv P_2(x),$$
$$G_3 \equiv \nu_0 f_0 + \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 + \nu_3 f_3 \equiv P_3(x);$$

il leur correspond trois plans qui se coupent en un point M, si les

Fig. 2.



combinaisons sont distinctes. Chaque plan passant par le point M est représenté par une équation de la forme

$$\alpha G_1 + \beta G_2 + \gamma G_3 = 0$$

dont le premier membre est une combinaison exceptionnelle du premier type. Or, par le point M, on peut mener à la surface (S) trois plans tangents, donc : *Il existe trois valeurs exceptionnelles du premier type pour l'algébroïde.* Ces valeurs se calculent facilement.

Exemple : Soit l'algébroïde

$$f_0 u^3 + f_1 u^2 + f_2 u + f_3 = 0,$$

avec

$$f_0 = e^x, \qquad f_1 = x - x^2 - e^x, \qquad f_2 = -x + 2x^2 + e^x,$$
$$f_3 = x - 2x^2 + x^3 - e^x.$$

Il existe trois involutions exceptionnelles distinctes

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv f_0 + 2f_1 + f_2 \equiv x, \\ G_2 &\equiv f_1 + f_2 \equiv x^2, \\ G_3 &\equiv f_2 + f_3 \equiv x^3. \end{aligned}$$

Les trois plans

$$\begin{aligned} f_0 + 2f_1 + f_2 &= 0, \\ f_1 + f_2 &= 0, \\ f_2 + f_3 &= 0 \end{aligned}$$

ont un point commun $(-1, -1, 1, 1)$.

Les trois plans tangents à la surface (S) menés par ce point correspondent aux valeurs de u racines de l'équation

$$-u^3 + u^2 - u + 1 = 0,$$

qui nous fournit les valeurs exceptionnelles de l'algébroïde : $1, i, -i$.

En effet,

$$\begin{aligned} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 &\equiv x - x^2 + x^3, \\ -if_0 - f_1 + if_2 + f_3 &\equiv x^3 - x^2 + i(2x^2 - x), \\ if_0 - f_1 - if_2 + f_3 &\equiv x^3 - x^2 - i(2x^2 - x). \end{aligned}$$

10. Supposons maintenant qu'il existe deux involutions exceptionnelles distinctes

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = P_1(x), \\ G_2 &\equiv \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = P_2(x); \end{aligned}$$

l'expression $\alpha G_1 + \beta G_2$, α, β désignant des constantes, est une combinaison exceptionnelle. Les deux plans correspondant à G_1, G_2 se coupent suivant une droite (D), puisque les combinaisons sont distinctes. Donnons-nous maintenant deux valeurs exceptionnelles u_0 et u_1; elles correspondent à deux plans tangents à (S) qui se coupent suivant une droite (Δ). Or, il existe des transformations homographiques

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \alpha_0 F_0 + \beta_0 F_1 + \gamma_0 F_2 + \delta_0 F_3,\\
f_1 &= \alpha_1 F_0 + \beta_1 F_1 + \gamma_1 F_2 + \delta_1 F_3,\\
f_2 &= \alpha_2 F_0 + \beta_2 F_1 + \gamma_2 F_2 + \delta_2 F_3,\\
f_3 &= \alpha_3 F_0 + \beta_3 F_1 + \gamma_3 F_2 + \delta_3 F_3,
\end{aligned}
$$

qui font coïncider les deux droites (Δ) et (D); il existe donc, dans la même classe que u, des algébroïdes admettant deux valeurs exceptionnelles u_0 et u_1. Elles dépendent de 14 paramètres.

On obtient ainsi toutes les algébroïdes de la même classe qui admettent deux valeurs exceptionnelles : soit, en effet, U une algébroïde de cette classe possédant deux valeurs exceptionnelles; il existe une transformation homographique qui fait passer des coefficients de l'équation qui définit u à ceux de l'équation qui définit U. Aux deux plans tangents à (S) relatifs aux deux valeurs exceptionnelles de U, correspondent deux plans relatifs à deux involutions exceptionnelles de u et, comme cette algébroïde n'a que deux involutions exceptionnelles distinctes, ces plans ne sont autres que $G_1 = 0$ et $G_2 = 0$ ou des plans du faisceau $\alpha G_1 + \beta G_2 = 0$; donc (Δ) correspond à (D) dans la transformation homographique.

11. Passons enfin au cas où l'on a seulement une involution exceptionnelle,

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \equiv P_1(x);$$

soient un plan (P) correspondant à cette involution; $u = u_0$ une valeur de u, et (P_0) le plan tangent à (S) qui lui correspond : on peut toujours faire une transformation homographique qui amène à coïncider le plan (P) avec le plan (P_0), ce qui nous fournit une algébroïde de la même classe que u ayant la valeur exceptionnelle u_0. On obtient ainsi des algébroïdes dépendant de 13 paramètres.

On démontrerait de la même manière qu'au paragraphe précédent qu'on obtient ainsi toutes les algébroïdes de la même classe que u qui admettent une valeur exceptionnelle.

Les raisonnements que nous venons d'exposer s'appliquent à des algébroïdes d'ordre quelconque : nous n'avons qu'à considérer l'espace à ν dimensions; nous voyons ainsi que, lorsque le nombre des involutions exceptionnelles d'une algébroïde d'ordre ν est inférieur à ν, les algébroïdes peuvent ne pas avoir de valeurs exceptionnelles, mais il existe, dans la même classe, des algébroïdes qui admettent des valeurs exceptionnelles en nombre égal à celui des combinaisons exceptionnelles.

Nous pouvons donc énoncer la proposition générale suivante :

Théorème. — *Si une algébroïde d'ordre* ν *admet* $k \leqq \nu$ *involutions exceptionnelles du premier type, il existe, dans la même classe, des algébroïdes dépendant de* $\nu(\nu+1)+k$ *paramètres admettant* k *valeurs exceptionnelles du premier type.*

Lorsque $k=\nu$, *le nombre des paramètres est* $\nu(\nu+2)$: *toutes les algébroïdes de la même classe ont* ν *valeurs exceptionnelles.*

12. On aurait une proposition analogue pour les involutions du second type ; mais les valeurs exceptionnelles obtenues seraient des valeurs exceptionnelles *généralisées*.

Si $k \leqq \nu$, on peut aussi montrer qu'il existe dans la même classe des algébroïdes admettant $k' \leqq k$ valeurs exceptionnelles et $k-k'$ involutions exceptionnelles. Le cas de $k'=k$ correspond au théorème final.