

BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. VAROPOULOS

Sur les involutions exceptionnelles et les valeurs exceptionnelles des algébroides

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 151-162

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__151_0

© Bulletin de la S. M. F., 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES INVOLUTIONS EXCEPTIONNELLES
ET LES VALEURS EXCEPTIONNELLES DES ALGÈBROÏDES ;**

PAR M. THÉODORE VAROPOULOS.

1. Considérons une algèbroïde d'ordre $\nu = 3$, pour simplifier l'écriture, définie par une équation de la forme

$$f(x, u) \equiv u^3 + f_1(x)u^2 + f_2(x)u + f_3(x) = 0$$

et supposons qu'elle admette deux involutions exceptionnelles (1) du premier type

$$G_1 \equiv \lambda_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \equiv P_1(x),$$

$$G_2 \equiv \mu_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 \equiv P_2(x),$$

$P_1(x)$, $P_2(x)$ étant des polynomes. Nous allons faire voir que l'algèbroïde admet $\nu - 1$ valeurs exceptionnelles du premier type, c'est-à-dire deux valeurs $u = u_0$ telles que

$$f(x, u) \equiv \text{polynome ou constante.}$$

A cet effet, remarquons que l'expression

$$\alpha G_1 + \beta G_2 + \gamma \equiv G,$$

α , β , γ étant des constantes, est aussi une combinaison exceptionnelle.

Or,

$$G \equiv (\alpha\lambda_0 + \beta\mu_0 + \gamma) + (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)f_1 \\ + (\alpha\lambda_2 + \beta\mu_2)f_2 + (\alpha\lambda_3 + \beta\mu_3)f_3 \equiv \alpha P_1(x) + \beta P_2(x) + \gamma,$$

et, pour que la valeur u_0 soit exceptionnelle du premier type, il

(1) Voir P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1927) et *Sur les familles complexes et leurs applications* (*Acta mathematica*, t. 49, 1926, p. 115-161).

α_i étant des constantes et $p_i(x)$ des polynomes. L'équation (1) devient

$$f_0(x)(u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \alpha_2 u^{\nu-2} + \dots + \alpha_\nu) + p_1(x)u^{\nu-1} + p_2(x)u^{\nu-2} + \dots + p_\nu(x) = 0,$$

et l'on voit que les zéros du polynome $u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu$ sont bien des valeurs exceptionnelles du premier type; par conséquent, nous aurons, en général, ν valeurs de u qui sont exceptionnelles.

3. Je vais étudier maintenant le cas où l'équation en u

$$u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu = 0,$$

a une racine $u = u_0$ multiple d'ordre $k \leq \nu$.

L'équation (1) s'écrit

$$F(x, u) = f_0(x)\varphi(u) + \Phi(x, u) = 0,$$

$\varphi(u)$ étant un polynome en u à coefficients constants de degré ν et $\Phi(x, u)$ un polynome en u de degré $\nu - 1$ dont les coefficients sont des polynomes en x .

Or,

$$\begin{aligned} F'_u(x, u) &= f_0(x)\varphi'(u) + \Phi'_u(x, u), \\ F''_{u^2}(x, u) &= f_0(x)\varphi''(u) + \Phi''_{u^2}(x, u), \\ &\dots\dots\dots \\ F^{(k-1)}_{u^{k-1}}(x, u) &= f_0(x)\varphi^{(k-1)}(u) + \Phi^{(k-1)}_{u^{k-1}}(x, u), \end{aligned}$$

et comme

$$\varphi'(u_0) = \varphi''(u_0) = \dots = \varphi^{(k-1)}(u_0) = 0,$$

on voit que la valeur $u = u_0$ est une valeur exceptionnelle d'ordre k , au sens de M. Paul Montel (1).

Nous obtenons la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si une algèbroïde d'ordre ν admet ν involutions exceptionnelles du premier type au sens de M. Montel, elle admet aussi ν valeurs exceptionnelles du premier type.*

4. Supposons que les involutions G_1, G_2, \dots, G_ν soient du

(1) P. MONTÉL, *Sur les familles complexes et leur applications* (Acta mathematica, 1926, p. 155).

second type, c'est-à-dire que

$$G_i \equiv P_i(x) e^{\varphi_i(x)} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

$P_i(x)$ étant des polynomes et $\varphi_i(x)$ des fonctions entières non constantes, les $f_i(x)$ seront alors de la forme

$$f_i(x) = \alpha_i f_0(x) + p_i(x) e^{\varphi_i(x)},$$

et, en mettant l'équation (1) sous la forme

$$f_0(x)(u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu) + p_1(x) e^{\varphi_1(x)} u^{\nu-1} + p_2(x) e^{\varphi_2(x)} u^{\nu-2} + \dots + p_\nu(x) e^{\varphi_\nu(x)} = 0,$$

on voit que les zéros du polynome $u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu$ sont des valeurs exceptionnelles généralisées, au sens de M. Rémoundos (1); on arrive alors à l'énoncé suivant :

THÉORÈME. — *Si une algèbroïde d'ordre ν admet ν involutions exceptionnelles du second type, elle admet aussi ν valeurs exceptionnelles généralisées.*

Si une valeur $u = u_0$ est une racine multiple d'ordre k de l'équation

$$u^\nu + \alpha_1 u^{\nu-1} + \dots + \alpha_\nu = 0,$$

elle sera nécessairement exceptionnelle généralisée d'ordre k pour l'algèbroïde.

§. Nous allons maintenant considérer une algèbroïde entière, d'ordre $\nu = 3$, par exemple,

$$f(x, u) \equiv u^3 + q_1(x) u^2 + q_2(x) u + q_3(x) = 0,$$

et supposer qu'elle admette une seule involution exceptionnelle du premier type. Nous allons voir que l'algèbroïde n'aura pas, en général, de valeurs exceptionnelles.

L'algèbroïde $u(x)$ admet, par hypothèse, la seule involution exceptionnelle du premier type :

$$G \equiv \lambda_0 + \lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x) \equiv P(x),$$

(1) G. RÉMOUNDOS, *Sur quelques points de la théorie des nombres (Annales de l'École Normale supérieure, 1926)*.

$P(x)$ désignant un polynome; si elle admettait une valeur exceptionnelle du premier type $u = u_0$, on aurait, puisqu'il n'existe pas deux combinaisons exceptionnelles distinctes,

$$(2) \quad \begin{aligned} u_0^3 + q_1(x) u_0^2 + q_2(x) u_0 + q_3(x) \\ \equiv k[\lambda_0 + \lambda_1 q_1(x) + \lambda_2 q_2(x) + \lambda_3 q_3(x)] + l, \end{aligned}$$

d'où, en identifiant,

$$\begin{aligned} u_0^3 &= k\lambda_0 + l, \\ u_0^2 &= k\lambda_1, \\ u_0 &= k\lambda_2, \\ 1 &= k\lambda_3; \end{aligned}$$

on en déduit la condition

$$\lambda_2^3 = \lambda_1 \lambda_3.$$

Cette condition est suffisante : le système précédent admet alors, si $\lambda_3 \neq 0$, la solution

$$u_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \quad k = \frac{1}{\lambda_3}, \quad l = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3}{\lambda_3^2},$$

donc

$$f(x, u_0) \equiv \frac{1}{\lambda_0} P(x) + \frac{\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3}{\lambda_3^2}.$$

Étudions à part le cas de $\lambda_3 = 0$. L'identité (2) montre alors que $q_3(x)$ doit se réduire à une constante. Il y a deux valeurs exceptionnelles du premier type 0 et $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

6. Nous allons nous occuper maintenant du cas général : on a vu que, pour une algèbroïde d'ordre ν , l'existence de ν involutions exceptionnelles du premier type entraîne celle de ν valeurs exceptionnelles du premier type.

On sait que, lorsqu'il existe k involutions exceptionnelles du premier type pour une algèbroïde, il en est de même pour toute algèbroïde de la même classe. Traitons à ce sujet le problème suivant proposé par M. P. Montel : *Étudier les cas dans lesquels ces involutions entraînent l'existence de $k' \leq k$ valeurs exceptionnelles.*

Soient d'abord les algèbroïdes d'ordre $\nu = 2$; elles sont définies par l'équation

$$(3) \quad f_0(x) u^2 + f_1(x) u + f_2(x) = 0.$$

Supposons que cette algébroïde admette deux involutions exceptionnelles du premier type

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \equiv P_1(x),$$

$$G_2 \equiv \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 \equiv P_2(x).$$

Si f_0, f_1, f_2 désignent les coordonnées homogènes d'un point du plan, l'équation (3) représente une droite dépendant du paramètre u , tangente à la conique

$$f_1^2 - 4 f_0 f_2 = 0.$$

Dire que la valeur $u = u_0$ est exceptionnelle, c'est dire que la combinaison exceptionnelle $f_0 u_0^2 + f_1 u_0 + f_2$ correspond à une droite tangente à la conique, tandis que, en général, une combinaison exceptionnelle correspond à une droite arbitraire du plan

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Quand il y a deux combinaisons exceptionnelles G_1, G_2 , les combinaisons $\alpha G_1 + \beta G_2$ correspondent aux droites passant par l'intersection de

$$G_1 = 0, \quad \text{et} \quad G_2 = 0;$$

l'expression $\alpha G_1 + \beta G_2$, α, β étant des constantes, est exceptionnelle. Donc, si l'algébroïde $u(x)$ admet deux combinaisons exceptionnelles, nous avons deux droites G_1 et G_2 qui se coupent en M, et, comme de ce point on peut mener deux tangentes à la conique, on en conclut que l'existence de deux involutions exceptionnelles entraîne celle de deux valeurs exceptionnelles faciles à calculer.

EXEMPLE : Prenons les algébroïdes

$$5 \sin x u^2 + 5(x - 5 \sin x) u + (x^2 - 6x + 30 \sin x) = 0,$$

on a

$$G_1 \equiv 5f_0 + f_1 \equiv x,$$

$$G_2 \equiv 6f_1 + 5f_2 \equiv x^2;$$

les deux droites G_1, G_2 ont pour équations

$$5f_0 + f_1 = 0 \quad \text{et} \quad 6f_1 + 5f_2 = 0,$$

le point M a pour coordonnées $f_0 = 1, f_1 = -5, f_2 = 6$; par conséquent, les valeurs u_0, u'_0 sont les racines de l'équation

$$u^2 - 5u + 6 = 0;$$

ces valeurs, 2 et 3, sont bien exceptionnelles du premier type; on a en effet :

$$4f_0 + 2f_1 + f_2 \equiv \frac{4x + x^2}{5} \equiv \frac{1}{5}(4G_1 + G_2),$$

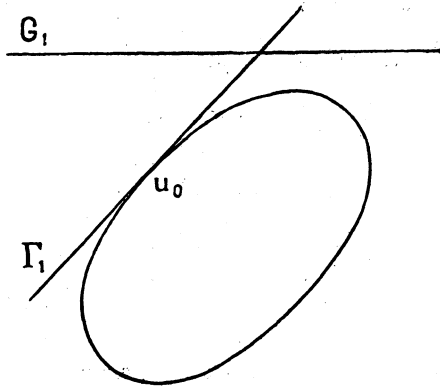
$$9f_0 + 3f_1 + f_2 \equiv \frac{9x + x^2}{5} \equiv \frac{1}{5}(9G_1 + G_2).$$

7. Supposons maintenant qu'il n'y ait qu'une involution exceptionnelle

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \equiv P_1(x),$$

correspondant à la droite G_1 (fig. 1); considérons une valeur $u = u_0$, et la tangente correspondante Γ_1 à la conique $Y^2 - 4XZ = 0$; il

Fig. 1.



existe une transformation homographique, dépendant de six paramètres,

$$f_0 = \alpha_0 F_0 + \beta_0 F_1 + \gamma_0 F_2,$$

$$f_1 = \alpha_1 F_0 + \beta_1 F_1 + \gamma_1 F_2,$$

$$f_2 = \alpha_2 F_0 + \beta_2 F_1 + \gamma_2 F_2,$$

qui fait coïncider G_1 et Γ_1 et alors nous avons, dans la même classe que u , des algébroides

$$F_0 u^2 + F_1 u + F_2 = 0,$$

possédant une valeur exceptionnelle u_0 : ces algébroides dépendent de 7 paramètres.

EXEMPLE : Considérons les algébroides

$$f_0 u^2 + f_1 u + f_2 = 0,$$

admettant une involution exceptionnelle

$$G_1 \equiv f_0 + 2f_1 + 3f_2 \equiv x,$$

et cherchons, dans la même classe, les algébroides admettant la valeur u_0 comme valeur exceptionnelle. Faisons la transformation

$$f_0 = \alpha_0 F_0 + \beta_0 F_1 + \gamma_0 F_2,$$

$$f_1 = \alpha_1 F_0 + \beta_1 F_1 + \gamma_1 F_2,$$

$$f_2 = \alpha_2 F_0 + \beta_2 F_1 + \gamma_2 F_2,$$

la relation devient

$$G'_1 \equiv (\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2) F_0 + (\beta_0 + 2\beta_1 + 3\beta_2) F_1 + (\gamma_0 + 2\gamma_1 + 3\gamma_2) F_2 \equiv x;$$

pour que u_0 soit une valeur exceptionnelle du premier type, il faut que la droite

$$u_0^2 F_0 + u_0 F_1 + F_2 = 0$$

coïncide avec

$$G'_1 = 0;$$

donc

$$\alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = k u_0^2,$$

$$\beta_0 + 2\beta_1 + 3\beta_2 = k u_0,$$

$$\gamma_0 + 2\gamma_1 + 3\gamma_2 = k.$$

Si nous prenons arbitrairement les paramètres $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, u_0, k$, nous aurons ainsi $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; l'algébroïde transformée dépend de 8 paramètres homogènes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, u_0, k$; en réalité de 7 paramètres, puisque cette algébroïde ne dépend que des rapports de ses coefficients.

8. Les valeurs exceptionnelles que nous avons calculées ci-dessus ne dépendent pas des seconds membres $P_1(x), P_2(x)$ et si, à la place des polynomes, il y a des exponentielles, nous aurons des valeurs exceptionnelles généralisées.

9. Examinons maintenant les algébroides d'ordre $\nu = 3$, définies par l'équation

$$f_0 u^3 + f_1 u^2 + f_2 u + f_3 = 0.$$

Si f_0, f_1, f_2, f_3 désignent les coordonnées homogènes d'un point de l'espace, cette équation représente un plan tangent à une surface développable (S) (fig. 2) : à toute combinaison linéaire des coefficients correspond un plan (P) qui devient tangent à la développable lorsque cette combinaison est relative à une valeur exceptionnelle.

Supposons que nous ayons trois involutions exceptionnelles du premier type

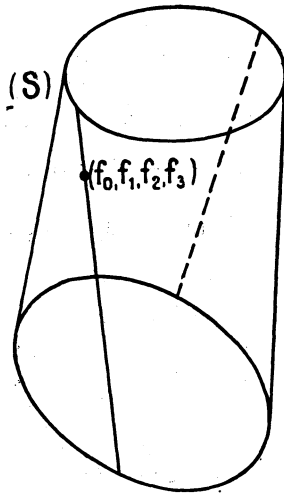
$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \equiv P_1(x),$$

$$G_2 \equiv \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 \equiv P_2(x),$$

$$G_3 \equiv \nu_0 f_0 + \nu_1 f_1 + \nu_2 f_2 + \nu_3 f_3 \equiv P_3(x);$$

il leur correspond trois plans qui se coupent en un point M, si les

Fig. 2.



combinaisons sont distinctes. Chaque plan passant par le point M est représenté par une équation de la forme

$$\alpha G_1 + \beta G_2 + \gamma G_3 = 0$$

dont le premier membre est une combinaison exceptionnelle du premier type. Or, par le point M, on peut mener à la surface (S) trois plans tangents, donc : *Il existe trois valeurs exceptionnelles du premier type pour l'algèbroïde.* Ces valeurs se calculent facilement.

EXEMPLE : Soit l'algébroïde

$$f_0 u^3 + f_1 u^2 + f_2 u + f_3 = 0,$$

avec

$$f_0 = e^x, \quad f_1 = x - x^2 - e^x, \quad f_2 = -x + 2x^2 + e^x, \\ f_3 = x - 2x^2 + x^3 - e^x.$$

Il existe trois involutions exceptionnelles distinctes

$$G_1 \equiv f_0 + 2f_1 + f_2 \equiv x, \\ G_2 \equiv f_1 + f_2 \equiv x^2, \\ G_3 \equiv f_2 + f_3 \equiv x^3.$$

Les trois plans

$$f_0 + 2f_1 + f_2 = 0, \\ f_1 + f_2 = 0, \\ f_2 + f_3 = 0$$

ont un point commun $(-1, -1, 1, 1)$.

Les trois plans tangents à la surface (S) menés par ce point correspondent aux valeurs de u racines de l'équation

$$-u^3 + u^2 - u + 1 = 0,$$

qui nous fournit les valeurs exceptionnelles de l'algébroïde : $1, i, -i$.

En effet,

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \equiv x - x^2 + x^3, \\ -if_0 - f_1 + if_2 + f_3 \equiv x^3 - x^2 + i(2x^2 - x), \\ if_0 - f_1 - if_2 + f_3 \equiv x^3 - x^2 - i(2x^2 - x).$$

10. Supposons maintenant qu'il existe deux involutions exceptionnelles distinctes

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = P_1(x), \\ G_2 \equiv \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = P_2(x);$$

l'expression $\alpha G_1 + \beta G_2$, α, β désignant des constantes, est une combinaison exceptionnelle. Les deux plans correspondant à G_1, G_2 se coupent suivant une droite (D), puisque les combinaisons sont distinctes. Donnons-nous maintenant deux valeurs exceptionnelles u_0 et u_1 ; elles correspondent à deux plans tangents à (S) qui se coupent suivant une droite (Δ). Or, il existe des transfor-

mations homographiques

$$f_0 = \alpha_0 F_0 + \beta_0 F_1 + \gamma_0 F_2 + \delta_0 F_3,$$

$$f_1 = \alpha_1 F_0 + \beta_1 F_1 + \gamma_1 F_2 + \delta_1 F_3,$$

$$f_2 = \alpha_2 F_0 + \beta_2 F_1 + \gamma_2 F_2 + \delta_2 F_3,$$

$$f_3 = \alpha_3 F_0 + \beta_3 F_1 + \gamma_3 F_2 + \delta_3 F_3,$$

qui font coïncider les deux droites (Δ) et (D); il existe donc, dans la même classe que u , des algébroides admettant deux valeurs exceptionnelles u_0 et u_1 . Elles dépendent de 14 paramètres.

On obtient ainsi toutes les algébroides de la même classe qui admettent deux valeurs exceptionnelles : soit, en effet, U une algébroïde de cette classe possédant deux valeurs exceptionnelles; il existe une transformation homographique qui fait passer des coefficients de l'équation qui définit u à ceux de l'équation qui définit U . Aux deux plans tangents à (S) relatifs aux deux valeurs exceptionnelles de U , correspondent deux plans relatifs à deux involutions exceptionnelles de u et, comme cette algébroïde n'a que deux involutions exceptionnelles distinctes, ces plans ne sont autres que $G_1 = 0$ et $G_2 = 0$ ou des plans du faisceau $\alpha G_1 + \beta G_2 = 0$; donc (Δ) correspond à (D) dans la transformation homographique.

11. Passons enfin au cas où l'on a seulement une involution exceptionnelle,

$$G_1 \equiv \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 \equiv P_1(x);$$

soient un plan (P) correspondant à cette involution; $u = u_0$ une valeur de u , et (P_0) le plan tangent à (S) qui lui correspond : on peut toujours faire une transformation homographique qui amène à coïncider le plan (P) avec le plan (P_0), ce qui nous fournit une algébroïde de la même classe que u ayant la valeur exceptionnelle u_0 . On obtient ainsi des algébroides dépendant de 13 paramètres.

On démontrerait de la même manière qu'au paragraphe précédent qu'on obtient ainsi toutes les algébroides de la même classe que u qui admettent une valeur exceptionnelle.

Les raisonnements que nous venons d'exposer s'appliquent à des algébroides d'ordre quelconque : nous n'avons qu'à considérer l'espace à ν dimensions; nous voyons ainsi que, lorsque le nombre

des involutions exceptionnelles d'une algèbroïde d'ordre ν est inférieur à ν , les algèbroïdes peuvent ne pas avoir de valeurs exceptionnelles, mais il existe, dans la même classe, des algèbroïdes qui admettent des valeurs exceptionnelles en nombre égal à celui des combinaisons exceptionnelles.

Nous pouvons donc énoncer la proposition générale suivante :

THÉORÈME. — *Si une algèbroïde d'ordre ν admet $k \leq \nu$ involutions exceptionnelles du premier type, il existe, dans la même classe, des algèbroïdes dépendant de $\nu(\nu + 1) + k$ paramètres admettant k valeurs exceptionnelles du premier type.*

Lorsque $k = \nu$, le nombre des paramètres est $\nu(\nu + 2)$: toutes les algèbroïdes de la même classe ont ν valeurs exceptionnelles.

12. On aurait une proposition analogue pour les involutions du second type ; mais les valeurs exceptionnelles obtenues seraient des valeurs exceptionnelles généralisées.

Si $k \leq \nu$, on peut aussi montrer qu'il existe dans la même classe des algèbroïdes admettant $k' \leq k$ valeurs exceptionnelles et $k - k'$ involutions exceptionnelles. Le cas de $k' = k$ correspond au théorème final.
