BULLETIN DE LA S. M. F.

D. V. JONESCO

Sur un problème relatif aux équations aux dérivées partielles du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 163-180
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__163_0>

SUR UN PROBLÈME RELATIF AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

PAR M. D. V. JONESCO.

Considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a(x, y)z + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + c(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + f(x, y) \tag{1}$$

et deux droites OI et OJ représentées par les équations

$$y = \alpha x \qquad \text{et} \qquad x = \beta y,$$

respectivement. On suppose que α, β sont positifs et que OI est, des deux droites, la plus approchée de Ox de façon que $\alpha\beta$ soit plus petit que un.

Cela étant, je me propose de montrer que l'équation (1) admet une intégrale s'annulant à l'origine, et satisfaisant sur les droites OI et OJ aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} & a_1(x)\,z_A + b_1(x)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A + c_1(x)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = 0,\\ & a_2(y)\,z_B + b_2(y)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_B + c_2(y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_B = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

A est le point de coordonnées $(x, \alpha x)$ de la droite OI, et B est le point de coordonnées $(\beta y, y)$ de la droite OJ; $a_1(x), \ldots, c_2(y)$ sont des fonctions données de x et de y.

Différents problèmes ont été posés relativement à l'équation (1) par MM. E. Picard [1] et E. Goursat [2]. Je rappelle seulement le problème de M. Goursat qui consiste à déterminer l'intégrale de l'équation (1) qui prend des valeurs données le long de deux

---

[1] E. PICARD, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1890, et Note I du Tome IV des *Leçons sur la Théorie des Surfaces* de G. Darboux, 1896.

[2] E. GOURSAT, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. V, p. 405-436; t. VI, p. 117-144; 3e série, t. I, p. 129-143.

courbes passant par le point O et situées dans l'angle xOy (1). Le présent travail est en quelque sorte une généralisation du problème de M. Goursat.

Les résultats essentiels de ce travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 4 avril 1927.

I. — Problème préliminaire.

1. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y), \tag{3}$$

où $f(x, y)$ est une fonction continue dans le rectangle (R) défini par les inégalités

$$0 \leqq x \leqq d, \qquad 0 \leqq y \leqq d'.$$

Nous allons chercher l'intégrale de l'équation (3) nulle à l'origine, continue dans le rectangle (R), et qui satisfait sur les segments de droites de OI et OJ compris dans (R) (2) aux conditions (2). Nous supposons $b_1(x) \neq 0$ et $c_2(y) \neq 0$ (3) (ce qui est le cas général) et nous posons les conditions (2) sous la forme

$$\tag{4} \left\{ \begin{aligned} & p(x, \alpha x) = \alpha\omega(x)\, q(x, \alpha x) + a(x)\, z(x, \alpha x) && \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}\right), \\ & q(\beta y, y) = \beta\pi(y)\, p(\beta y, y) + b(y)\, z(\beta y, y) && \left(q = \frac{\partial z}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

Soit $\zeta(x, y)$ l'intégrale de l'équation (3) qui s'annule le long des droites OI et OJ. Alors nous pouvons écrire l'intégrale générale de l'équation (3) sous la forme

$$z(x, y) = \zeta(x, y) + \varphi(x) + \psi(y), \tag{5}$$

et comme $z(x, y)$ s'annule à l'origine, nous pouvons supposer que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

---

(1) Relativement à ce problème, *voir* aussi D. V. Jonesco, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (Thèse) (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1927, Chapitre IV).

(2) Pour fixer les idées, supposons que le point de coordonnées (d, d') se trouve entre les droites OI et OJ.

(3) Nous aurons à revenir sur les cas où $b_1(x) = 0$ ou $b_1(x) = c_2(y) = 0$.

Les dérivées partielles du premier ordre de $z(x, y)$ sont

$$(6) \qquad \begin{cases} p(x,y) = \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} + \varphi'(x), \\ q(x,y) = \dfrac{\partial\zeta}{\partial y} + \psi'(y). \end{cases}$$

Remarquons que $\zeta(x, y)$ s'annulant sur les droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$, on a

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{\substack{x=x\\ y=\alpha x}} + \alpha\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{\substack{x=x\\ y=\alpha x}} = 0, \qquad \beta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{\substack{x=\beta y\\ y=y}} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{\substack{x=\beta y\\ y=y}} = 0,$$

de sorte qu'en posant

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{\substack{x=x\\ y=\alpha x}} = \lambda(x), \qquad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{\substack{x=\beta y\\ y=y}} = \mu(y),$$

on aura

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_{\substack{x=x\\ y=\alpha x}} = -\frac{\lambda(x)}{\alpha}, \qquad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_{\substack{x=\beta y\\ y=y}} = -\frac{\mu(y)}{\beta}.$$

Il résulte alors que

$$\begin{aligned} z(x,\alpha x) &= \varphi(x) + \psi(\alpha x), & z(\beta y, y) &= \varphi(\beta y) + \psi(y), \\ p(x,\alpha x) &= \lambda(x) + \varphi'(x), & p(\beta y, y) &= -\frac{\mu(y)}{\beta} + \varphi'(\beta y), \\ q(x,\alpha x) &= -\frac{\lambda(x)}{\alpha} + \psi'(\alpha x), & q(\beta y, y) &= \mu(y) + \psi'(y); \end{aligned}$$

et en écrivant que les conditions (4) sont vérifiées, nous avons pour déterminer les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ les équations fonctionnelles

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi'(x) = \alpha\omega(x)\psi'(\alpha x) + a(x)[\varphi(x) + \psi(\alpha x)] - [1 + \omega(x)]\lambda(x), \\ \psi'(y) = \beta\pi(y)\varphi'(\beta y) + b(y)[\varphi(\beta y) + \psi(y)] - [1 + \pi(y)]\mu(y). \end{cases}$$

Nous allons transformer ces équations et les mettre sous une forme plus commode.

Multiplions les deux membres de la première des équations (8) par dx et intégrons de 0 à x; de même, multiplions les deux membres de la seconde équation (8) par dy et intégrons de 0 à y.

En tenant compte de ce que $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, on a

$$\varphi(x) - \int_0^x a(s)\,\varphi(s)\,ds = \omega(x)\,\psi(\alpha x) + \int_0^x [a(s) - \omega'(s)]\,\psi(\alpha s)\,ds$$
$$- \int_0^x [1 + \omega(s)]\,\lambda(s)\,ds = \varphi_1(x),$$

$$\psi(y) - \int_0^y b(t)\psi(t)\,dt = \pi(y)\,\varphi(\beta y) + \int_0^y [b(t) - \pi'(t)]\,\varphi(\beta t)\,dt$$
$$- \int_0^y [1 + \pi(t)]\,\mu(t)\,dt = \psi_1(y).$$

Si l'on forme ensuite les combinaisons

$$\varphi_1(x) + \int_0^x a(s)\,e^{\int_s^x a(\sigma)\,d\sigma}\,\varphi_1(s)\,ds,$$

$$\psi_1(y) + \int_0^y b(t)\,e^{\int_t^y b(\tau)\,d\tau}\,\psi_1(t)\,dt,$$

on trouve le système

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x) = \omega(x)\psi(\alpha x) + \int_0^x a(x,s)\psi(\alpha s)\,ds - \int_0^x [1+\omega(s)]\,e^{\int_s^x a(\sigma)d\sigma}\,\lambda(s)\,ds,\\ &\psi(y) = \pi(y)\varphi(\beta y) + \int_0^y b(t,y)\,\varphi(\beta t)\,dt - \int_0^y [1+\pi(t)]\,e^{\int_t^y b(\tau)d\tau}\,\mu(t)\,dt, \end{aligned}\right.$$

qui est équivalent au système (8). On a posé

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &a(x,s) = [a(s)\,\omega(s) + a(s) - \omega'(s)]\,e^{\int_s^x a(\sigma)\,d\sigma},\\ &b(t,y) = [b(t)\,\pi(t) + b(t) - \pi'(t)]\,e^{\int_t^y b(\tau)\,d\tau} \end{aligned}\right.$$

Si l'on élimine la fonction $\psi(x)$ entre les équations (9), on obtient, pour la fonction $\varphi(x)$, l'équation fonctionnelle

$$(11)\qquad \varphi(x) = P(x)\,\varphi(\gamma x) + \int_0^x A(x,t)\,\varphi(\gamma t)\,dt + U(x)$$

avec

$$(12)\qquad P(x) = \omega(x)\,\pi(\alpha x), \qquad \gamma = \alpha\beta,$$

$$(13)\qquad U(x) = \int_0^x A_1(x,t)\,\lambda(t)\,dt + \int_0^{\alpha x} A_2(x,t)\,\mu(\alpha t)\,dt$$

et

$$(14)\quad \begin{cases} A(x,t) = \alpha\omega(x)b(\alpha t,\alpha x) + a(x,t)\pi(\alpha t) + \alpha\int_t^x a(x,s)b(\alpha t,\alpha s)\,ds, \\ A_1(x,t) = -[1+\omega(t)]\,e^{\int_t^x a(\sigma)d\sigma}, \\ A_2(x,t) = -\alpha[1+\pi(\alpha t)]\left[\omega(x)e^{\int_{\alpha t}^{\alpha x} b(\tau)d\tau} - \int_t^x a(x,s)e^{\int_{\alpha t}^{\alpha s} b(\tau)d\tau}\,ds\right]. \end{cases}$$

De même si l'on élimine la fonction $\varphi(x)$ entre les équations (9), on obtient, pour la fonction $\psi(y)$, l'équation fonctionnelle

$$(15)\qquad \psi(y) = Q(y)\psi(\gamma y) + \int_0^x B(s,y)\psi(\gamma s)\,ds + V(y)$$

avec

$$(16)\qquad Q(y) = \pi(y)\omega(\beta y),$$

$$(17)\qquad V(y) = \int_0^y B_1(s,y)\mu(s)\,ds + \int_0^y B_2(s,y)\lambda(\beta s)\,ds,$$

$B(s,y)$, $B_1(s,y)$ et $B_2(s,y)$ sont données par des formules analogues aux formules (14).

Ainsi nous avons ramené la question posée au début du n° 1, à la résolution des équations fonctionnelles (11) et (15).

2. On supposera que pour

$$(18)\qquad 0 \leqq x \leqq \alpha d \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq y \leqq \beta d',$$

les fonctions $a(x)$, $\omega(x)$, $b(y)$, $\pi(y)$ sont continues, les fonctions $\omega(x)$ et $\pi(y)$ ayant aussi des dérivées continues. Dans ces conditions, les fonctions $a(x,s)$, $b(t,y)$ ainsi que les fonctions

$$(19)\qquad \begin{cases} A(x,t), & A_1(x,t), & A_2(x,t), \\ B(s,y), & B_1(s,y), & B_2(s,y) \end{cases}$$

sont toutes continues dans le rectangle (R).

Remarquons encore que, d'après les formules (10), les fonctions

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial b(s,y)}{\partial y}$$

sont continues et par suite les fonctions

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A(x,t)}{\partial x}, & \dfrac{\partial A_1(x,t)}{\partial x}, & \dfrac{\partial A_2(x,t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial B(s,y)}{\partial y}, & \dfrac{\partial B_1(s,y)}{\partial y}, & \dfrac{\partial B_2(s,y)}{\partial y}, \end{cases}$$

sont également continues dans le rectangle (R).

Nous désignerons par M un nombre supérieur aux valeurs absolues des fonctions (19) et (20), dans le rectangle (R).

Des formules (13) et (17) nous déduisons que

$$(21)\qquad \begin{cases} |U(x)| < M\displaystyle\int_0^x \{|\lambda(t)| + |\mu(\alpha t)|\}\,dt, \\ |V(y)| < M\displaystyle\int_0^y \{|\mu(s)| + |\lambda(\beta s)|\}\,ds. \end{cases}$$

Si nous dérivons par rapport à x et à y les formules (13) et (17), nous avons

$$\begin{aligned} U'(x) &= A_1(x,x)\lambda(x) + A_2(x,x)\mu(\alpha x) \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial A_1(x,t)}{\partial x}\lambda(t)\,dt + \int_0^x \frac{\partial A_2(x,t)}{\partial x}\mu(\alpha t)\,dt, \\ V'(y) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et par suite

$$(22)\qquad \begin{cases} |U'(x)| < M\{|\lambda(x)| + |\mu(\alpha x)|\} + M\displaystyle\int_0^x \{|\lambda(t)| + |\mu(\alpha t)|\}\,dt, \\ |V'(y)| < M\{|\mu(y)| + |\lambda(\beta y)|\} + M\displaystyle\int_0^y \{|\mu(s)| + |\lambda(\beta s)|\}\,ds. \end{cases}$$

D'autre part, nous supposons que dans les intervalles (18) on a

$$|\omega(x)| < e^{\omega_1 x}, \qquad |\pi(y)| < e^{\pi_1 y}$$

et que

$$\left|\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right| < \omega_1, \qquad \left|\frac{\pi'(y)}{\pi(y)}\right| < \pi_1.$$

Alors, d'après les formules (12) et (16), on aura

$$|P(x)| < e^{\Omega x}, \qquad |Q(y)| < e^{\Omega y},$$
$$\left|\frac{P'(x)}{P(x)}\right| < \Omega, \qquad \left|\frac{Q'(y)}{Q(y)}\right| < \Omega,$$

Ω étant le plus grand des nombres $\omega_1 + \alpha\pi_1$ et $\pi_1 + \beta\varpi_1$.

3. Supposons que dans le rectangle (R) la fonction $f(xy)$ soit continue et soit F un nombre supérieur à sa valeur absolue dans ce rectangle. Nous avons montré [1] que dans la région du rectangle (R), comprise entre les droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$, on a

$$(23) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |\zeta(xy)| < F \dfrac{1+\gamma}{1-\gamma^2} xy, \\ \left|\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\right| < F y, \qquad \left|\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right| < F x, \end{array} \right.$$

de sorte que [*voir* les formules (7)]

$$|\lambda(x)| < F\alpha x, \qquad |\mu(y)| < F\beta y.$$

Alors les formules (21) donnent

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |U(x)| < MF \displaystyle\int_0^x (\alpha + \alpha\beta)\, t\, dt = MF\alpha(1+\beta)\frac{x^2}{2}, \\ |V(y)| < MF \displaystyle\int_0^y (\beta + \alpha\beta)\, s\, ds = MF\beta(1+\alpha)\frac{y^2}{2}. \end{array} \right.$$

De même, les formules (22) donnent

$$|U'(x)| < MF\alpha(1+\beta)\, x\left(1 + \frac{x}{2}\right),$$

$$|V'(y)| < MF\beta(1+\alpha)\, y\left(1 + \frac{y}{2}\right),$$

et l'on déduit que pour $x \leqq d$ et $y \leqq d'$ on a

$$(25) \qquad \left\{ \begin{array}{l} |U'(x)| < MF\,\alpha(1+\beta)\left(1 + \dfrac{d}{2}\right) x, \\ |V'(y)| < MF\,\beta(1+\alpha)\left(1 + \dfrac{d'}{2}\right) y. \end{array} \right.$$

4. Faisons une autre hypothèse sur $f(x, y)$ qui nous servira dans la suite. Supposons que dans le rectangle (R), la fonction $f(x, y)$, tout en restant continue, vérifie l'inégalité

$$|f(xy)| < H \frac{(x+y)^p}{p!}, \qquad (p \geqq 2).$$

---

(1) D. V. Jonesco, *Mémoire cité*, Chap. IV, formules (13).

Dans ce cas nous avons montré (¹) que

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &|\zeta(xy)| < \mathrm{H}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{(x+y)^{p+2}}{(p+2)!},\\ &\left|\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right| < \mathrm{H}\,\frac{(1+\gamma)(1+\alpha)}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{(x+y)^{p+1}}{(p+1)!},\\ &\left|\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right| < \mathrm{H}\,\frac{(1+\gamma)(1+\beta)}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{(x+y)^{p+1}}{(p+1)!},\end{aligned}\right.$$

de sorte que les formules (7) donneront

$$|\lambda(x)| < \mathrm{H}\,\frac{(1+\gamma)(1+\alpha)^{p+2}}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{x^{p+1}}{(p+1)!},$$

$$|\mu(y)| < \mathrm{H}\,\frac{(1+\gamma)(1+\beta)^{p+2}}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{y^{p+1}}{(p+1)!}.$$

D'après les formules (21), on a

$$|\mathrm{U}(x)| < \mathrm{HM}\,\frac{(1+\gamma)[(1+\alpha)^{p+2}+\alpha^{p+1}(1+\beta)^{p+2}]}{1-\gamma^{p+2}}\int_0^x \frac{s^{p+1}\,ds}{(p+1)!}.$$

Mais

$$(1+\alpha)^{p+2}+\alpha^{p+1}(1+\beta)^{p+2} = (1+\alpha)^{p+2}+\frac{1}{\alpha}(\alpha+\alpha\beta)^{p+2} < \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(1+\alpha)^{p+2}$$

car

$$\alpha\beta = \gamma < 1.$$

Alors, si n désigne le plus grand des nombres $1+\frac{1}{\alpha}$ et $1+\frac{1}{\beta}$, on a

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &|\mathrm{U}(x)| < \mathrm{MH}n\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{[(1+\alpha)x]^{p+2}}{(p+2)!},\\ &|\mathrm{V}(y)| < \mathrm{MH}n\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{[(1+\beta)y]^{p+2}}{(p+2)!}.\end{aligned}\right.$$

De même, les formules (22) donnent

$$\begin{aligned}|\mathrm{U}'(x)| < {}&\mathrm{MH}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}[(1+\alpha)^{p+2}+\alpha^{p+1}(1+\beta)^{p+2}]\frac{x^{p+1}}{(p+1)!}\\ &+\mathrm{MH}n\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\,\frac{[(1+\alpha)x]^{p+2}}{(p+2)!}.\end{aligned}$$

Mais

$$(1+\alpha)^{p+2}+\alpha^{p+1}(1+\beta)^{p+2} < (1+\alpha)^{p+1}(2+\alpha+\beta),$$

(¹) D. V. Jonesco, *Mémoire cité*, Chap. IV, formules (18) et (19).

de sorte que si n' désigne le plus grand des nombres

$$2+\alpha+\beta+n\frac{1+\alpha}{2}d, \qquad 2+\alpha+\beta+n\frac{1+\beta}{2}d',$$

on a pour $x \leqq d$ et $y \leqq d'$

$$(28) \qquad \begin{cases} |U'(x)| < MH\,n'\,\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\,\dfrac{[(1+\alpha)x]^{p+1}}{(p+1)!}, \\ |V'(y)| < MH\,n'\,\dfrac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\,\dfrac{[(1+\beta)y]^{p+1}}{(p+1)!}, \end{cases}$$

II. — Étude d'une équation fonctionnelle.

5. Nous avons vu plus haut que pour résoudre notre problème, nous sommes conduits à l'équation fonctionnelle [équations (11) et (15)]

$$(29) \qquad \varphi(x) = P(x)\varphi(\gamma x) + \int_0^x A(x,t)\varphi(\gamma t)\,dt + U(x),$$

en faisant sur $P(x)$, $A(x,t)$, $U(x)$ les hypothèses suivantes :

1° $\quad \gamma < 1;$

2° $\quad |A(x,t)|$ et $\left|\dfrac{\partial A(x,t)}{\partial x}\right| < M;$

3° $\quad |P(x)| < e^{\Omega x}, \quad \left|\dfrac{P'(x)}{P(x)}\right| < \Omega, \quad |P(0)| < 1;$

4° $\quad |U(x)| < S\dfrac{x^{\mu}}{\mu!}, \quad |U'(x)| < S'\dfrac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}, \quad U(0) = 0.$

Dans ces conditions, nous allons démontrer que l'équation (29) a une solution continue, admettant une dérivée continue dans l'intervalle $(0, d)$ ou $(0, d')$ où les hypothèses précédentes sont valables.

L'équation fonctionnelle (29), à un changement de notation près, est identique à une équation fonctionnelle rencontrée par M. E. Picard à l'occasion du problème de M. E. Goursat relativement à l'équation (1). Le théorème d'existence de la solution de cette équation a été démontré par M. E. Picard dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1).

(1) Tome 144, 1907, p. 1009.

Nous allons reprendre très brièvement ce théorème en lui ajoutant un complément relatif à l'existence de la dérivée de la solution et en établissant certaines inégalités que nous emploierons dans la suite.

6. Commençons par résoudre l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x) - P(x)\varphi(\gamma x) = f(x) \tag{30}$$

en supposant que

$$|f(x)| < H\frac{x^\mu}{\mu!}, \qquad |f'(x)| < H'\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \qquad (\mu \geqq 2).$$

Si l'on pose

$$u_i(x) = P(x)P(\gamma x)\ldots P(\gamma^{i-1}x)\, f(\gamma^i x), \tag{31}$$

la solution de l'équation (30) est ([1])

$$\varphi(x) = \Sigma u_i(x).$$

La série du second membre est convergente. En effet, il suffit de voir que

$$|u_i(x)| < H\, e^{\frac{\Omega x}{1-\gamma}} \gamma^{n\mu} \frac{x^\mu}{\mu!}.$$

Donc, si I est le plus grand des nombres $e^{\frac{\Omega d}{1-\gamma}}$, $e^{\frac{\Omega d'}{1-\gamma}}$, on aura

$$|\varphi(x)| < \frac{HI}{1-\gamma^\mu}\frac{x^\mu}{\mu!}. \tag{32}$$

Démontrons maintenant que $\varphi(x)$ a une dérivée continue. Pour cela prenons la dérivée logarithmique des deux membres de la formule (31). On a

$$\frac{u_i'(x)}{u_i(x)} = \frac{P'(x)}{P(x)} + \gamma\frac{P'(\gamma x)}{P(\gamma x)} + \ldots + \gamma^{i-1}\frac{P'(\gamma^{i-1}x)}{P(\gamma^{i-1}x)} + \gamma^i\frac{f'(\gamma^i x)}{f(\gamma^i x)},$$

d'où

$$|u_i'(x)| < \frac{\Omega}{1-\gamma}|u_i(x)| + H'I\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\gamma^{\mu i},$$

([1]) E. Picard, *Note citée*, n° 3.

et par suite la série

$$\Sigma u_i'(x)$$

est absolument et uniformément convergente.

En plus on a

$$|\varphi'(x)| < \frac{\Omega}{1-\gamma}\frac{\mathrm{HI}}{1-\gamma^\mu}\frac{x^\mu}{\mu!} + \frac{\mathrm{H'I}}{1-\gamma^\mu}\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!},$$

et si d'' est le plus grand des nombres $\frac{\Omega}{1-\gamma}\frac{d}{2}$, $\frac{\Omega}{1-\gamma}\frac{d'}{2}$, on a

$$(33) \qquad |\varphi'(x)| < \frac{(\mathrm{H'}+\mathrm{H}d'')\mathrm{I}}{1-\gamma^\mu}\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}.$$

7. Cela étant, revenons à l'équation (29) et en introduisant un paramètre λ, on peut l'écrire sous la forme

$$\varphi(x) - \mathrm{P}(x)\varphi(\gamma x) = \lambda\int_0^x \mathrm{A}(x, t)\varphi(\gamma t)\,dt + \mathrm{U}(x).$$

Nous allons résoudre cette équation, d'après M. E. Picard, par la méthode des approximations successives, en cherchant à y satisfaire formellement par le développement

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(x) + \ldots.$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$ sont déterminées de proche en proche par les équations

$$\varphi_0(x) - \mathrm{P}(x)\varphi_0(\gamma x) = \mathrm{U}(x),$$

$$\varphi_i(x) - \mathrm{P}(x)\varphi_i(\gamma x) = \int_0^x \mathrm{A}(x, t)\varphi_{i-1}(\gamma t)\,dt = g_i(x)$$

$$(i = 1, 2, \ldots).$$

Nous allons montrer la convergence uniforme des séries

$$(34) \qquad \Sigma\lambda^n\varphi_n(x), \quad \Sigma\lambda^n\varphi_n'(x).$$

Les formules (32) et (33) donnent

$$(35) \qquad \begin{cases} |\varphi_0(x)| < \dfrac{\mathrm{SI}}{1-\gamma^\mu}\dfrac{x^\mu}{\mu!}, \\ |\varphi_0'(x)| < \dfrac{(\mathrm{S'}+\mathrm{S}d'')\mathrm{I}}{1-\gamma^\mu}\dfrac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}. \end{cases}$$

Évaluons maintenant les valeurs absolues de $g_1(x)$ et de $g'_1(x)$. On a d'abord

$$|g_1(x)| < \frac{\mathrm{MSI}}{1-\gamma^\mu}\gamma^\mu \frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!},$$

et ensuite de la formule

$$g'_1(x) = \mathrm{A}(x,x)\varphi_0(\gamma x) + \int_0^x \frac{\partial \mathrm{A}(x,t)}{\partial x}\varphi_0(\gamma t)\,dt,$$

on déduit

$$|g'_1(x)| < \mathrm{MSI}\frac{\gamma^\mu}{1-\gamma^\mu}\frac{x^\mu}{\mu!}\left[1+\frac{x}{\mu+1}\right],$$

de sorte que si d_1 est le plus grand des nombres $1+\frac{d}{3}$ et $1+\frac{d'}{3}$, on a

$$|g'_1(x)| < \mathrm{MSI}\,d_1\frac{\gamma^\mu}{1-\gamma^\mu}\frac{x^\mu}{\mu!}.$$

D'après les formules (32) et (33), il résulte alors que

$$|\varphi_1(x)| < \mathrm{MSI}^2\frac{\gamma^\mu}{1-\gamma^\mu}\,\frac{1}{1-\gamma^{\mu+1}}\,\frac{x^{\mu+1}}{(\mu+1)!},$$

$$|\varphi'_1(x)| < \mathrm{MSI}^2\frac{\gamma^\mu}{1-\gamma^\mu}\,\frac{d''+d_1}{1-\gamma^{\mu+1}}\,\frac{x^\mu}{\mu!},$$

et ainsi de suite. En général, on démontre que

$$(36)\left\{\begin{aligned}|\varphi_i(x)| &< \mathrm{SM}^i\mathrm{I}^{i+1}\frac{\gamma^\mu}{1-\gamma^\mu}\cdots\frac{\gamma^{\mu+i-1}}{1-\gamma^{\mu+i-1}}\,\frac{1}{1-\gamma^{\mu+i}}\,\frac{x^{\mu+i}}{(\mu+i)!},\\ |\varphi'_i(x)| &< \mathrm{SM}^i\mathrm{I}^{i+1}\frac{\gamma^\mu}{1-\gamma^\mu}\cdots\frac{\gamma^{\mu+i-1}}{1-\gamma^{\mu+i-1}}\,\frac{d''+d_1}{1-\gamma^{\mu+i}}\,\frac{x^{\mu+i-1}}{(\mu+i-1)!},\end{aligned}\right.$$

et par suite les séries (34) sont convergentes, quel que soit λ. On voit facilement que pour $\lambda = 1$ ces séries représentent la solution de l'équation (29) et sa première dérivée.

On démontre aussi sans peine que la solution trouvée est unique. Pour le principe de la démonstration, je rappelle qu'il est esquissé dans la Note de M. E. Picard.

Remarquons que γ étant moindre que l'unité,

$$\frac{\gamma^{\mu+i}}{1-\gamma^{\mu+i}} < \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-\gamma^{\mu+i}} < \frac{1}{1-\gamma^\mu} \quad \begin{pmatrix}\mu \geqq 2\\ i>0\end{pmatrix},$$

et que

$$\frac{1}{(\mu+i)!} < \frac{1}{\mu!}\,\frac{1}{i!},$$

de sorte que les formules (36) peuvent encore s'écrire

$$|\varphi_i(x)| < \mathrm{SI}\,\frac{1}{1-\gamma^\mu}\,\frac{x^\mu}{\mu!}\,\frac{1}{i!}\left(\mathrm{MI}\,\frac{\gamma^2 x}{1-\gamma^2}\right)^i \qquad (i=0,\,1,\,\ldots),$$

$$|\varphi'_i(x)| < \mathrm{SI}\,\frac{d''+d_1}{1-\gamma^\mu}\,\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\,\frac{1}{i!}\left(\mathrm{MI}\,\frac{\gamma^2 x}{1-\gamma^2}\right)^i \qquad (i=1,\,2,\,\ldots).$$

Il résulte alors que pour les fonctions

$$\varphi(x) = \Sigma\varphi_i(x), \qquad \varphi'(x) = \Sigma\varphi'_i(x),$$

on aura les inégalités

$$|\varphi(x)| < \frac{\mathrm{SI}}{1-\gamma^\mu}\,\frac{x^\mu}{\mu!}\,e^{\frac{\mathrm{MI}\gamma^2}{1-\gamma^2}x},$$

$$|\varphi'(x)| < \frac{1}{1-\gamma^\mu}\,\frac{x^{\mu+1}}{(\mu-1)!}\left\{\mathrm{S}'+\mathrm{S}\left[d''+(d''+d_1)\left(e^{\frac{\mathrm{MI}\gamma^2}{1-\gamma^2}x}-1\right)\right]\right\}.$$

Si l'on désigne par J le plus grand des nombres

$$e^{\frac{\mathrm{MI}\gamma^2}{1-\gamma^2}d}, \quad e^{\frac{\mathrm{MI}\gamma^2}{1-\gamma^2}d'},$$

et par K le plus grand des nombres

$$d''+(d'+d_1)\left(e^{\frac{\mathrm{MI}\gamma^2}{1-\gamma^2}d}-1\right), \quad d''+(d''+d_1)\left(e^{\frac{\mathrm{MI}\gamma^2}{1-\gamma^2}d'}-1\right),$$

on a finalement

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &|\varphi(x)| < \frac{\mathrm{SIJ}}{1-\gamma^\mu}\,\frac{x^\mu}{\mu!},\\ &|\varphi'(x)| < \frac{(\mathrm{S}'+\mathrm{KS})\mathrm{I}}{1-\gamma^\mu}\,\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}.\end{aligned}\right.$$

Ce sont ces inégalités que nous allons employer dans la suite. D'après le choix que nous avons fait des constantes I, J, K, ..., ces inégalités sont applicables à l'équation (11) aussi bien qu'à l'équation (15).

8. Revenons maintenant tout au début de ce travail et cherchons des limites supérieures pour les valeurs absolues de l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles (3) qui satisfait aux conditions du n° **1**, et de ses dérivées partielles du premier ordre.

En supposant que $f(x, y)$ satisfait aux conditions du n° **3**, pour avoir des limites supérieures des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ qui figurent dans les formules (5) et (6), il suffit, d'après les formules (24) et (25) de faire dans les formules (37)

$$S = MF\alpha(1+\beta), \qquad S' = MF\alpha(1+\beta)\left(1+\frac{d}{2}\right) \qquad (\mu = 2)$$

pour la fonction $\varphi(x)$ et de faire dans les mêmes formules

$$S = MF\beta(1+\alpha), \qquad S' = MF\beta(1+\alpha)\left(1+\frac{d'}{2}\right) \qquad (\mu = 2)$$

pour la fonction $\psi(y)$. On trouve donc :

$$|\varphi(x)| < MF\frac{\alpha(1+\beta)IJ}{1-\gamma^2}\frac{x^2}{2!},$$
$$|\psi(y)| < MF\frac{\beta(1+\alpha)IJ}{1-\gamma^2}\frac{y^2}{2!},$$
$$|\varphi'(x)| < MF\frac{\alpha(1+\beta)I}{1-\gamma^2}\left(1+\frac{d}{2}+k\right)x,$$
$$|\psi'(x)| < MF\frac{\beta(1+\alpha)I}{1-\gamma^2}\left(1+\frac{d'}{2}+k\right)y,$$

de sorte que si l'on tient compte des formules (23), on a, pour les fonctions (5) et (6), des inégalités qu'on peut mettre sous la forme

$$(38) \qquad \begin{cases} |z(xy)| < L\dfrac{(x+y)^2}{2!}, \\ \left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right| < L(x+y), \\ \left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right| < L(x+y), \end{cases}$$

L étant un nombre convenablement choisi. Ces inégalités sont valables dans la partie du rectangle R, comprise entre les deux droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$.

9. Dans le cas où la fonction $f(x, y)$ satisfait, dans le rectangle (R), à l'inégalité

$$|f(xy)| < H\frac{(x+y)^p}{p!} \quad (^1),$$

pour avoir des limites supérieures des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ qui figurent dans les formules (5) et (6) ainsi que de leurs dérivées du

---

(1) *Voir* n° 4.

premier ordre, il suffit d'après les formules (27) et (28) de faire dans les formules (37)

$$S = \mathrm{MH}n\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}(1+\alpha)^{p+2}, \qquad S' = \mathrm{MH}n'\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}(1+\alpha)^{p+1}$$

$$\mu = p+2,$$

pour la fonction $\varphi(x)$ et

$$S = \mathrm{MH}n\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}(1+\beta)^{p+2}, \qquad S' = \mathrm{MH}n'\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}(1+\beta)^{p+1}$$

$$\mu = p+2,$$

pour la fonction $\psi(y)$. On trouve

$$|\varphi(x)| < \mathrm{MHIJ}n\,\frac{1+\gamma}{(1-\gamma^{p+2})^2}\,\frac{[(1+\alpha)x]^{p+2}}{(p+2)!},$$

$$|\psi(y)| < \mathrm{MHIJ}n\,\frac{1+\gamma}{(1-\gamma^{p+2})^2}\,\frac{[(1+\beta)y]^{p+2}}{(p+2)!},$$

$$|\varphi'(x)| < \mathrm{MHI}[n'+kn(1+\alpha)]\,\frac{1+\gamma}{(1-\gamma^{p+2})^2}\,\frac{[(1+\alpha)x]^{p+1}}{(p+1)!},$$

$$|\psi'(y)| < \mathrm{MHI}[n'+kn(1+\beta)]\,\frac{1+\gamma}{(1-\gamma^{p+2})^2}\,\frac{[(1+\beta)y]^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Alors si l'on tient compte des formules (26), on aura pour les fonctions $z(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ données par les formules (5) et (6)

$$|z(x,y)| < \frac{\mathrm{H}}{(p+2)!}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\left\{(x+y)^{p+2} + \mathrm{MIJ}n\,\frac{[(1+\alpha)x]^{p+2}+[(1+\beta)y]^{p+2}}{1-\gamma^{p+2}}\right\},$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \frac{\mathrm{H}}{(p+1)!}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\left\{(1+\alpha)(x+y)^{p+1} + \frac{\mathrm{MI}[n'+kn(1+\alpha)]}{1-\gamma^{p+2}}[(1+\alpha)x]^{p+1}\right\},$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \frac{\mathrm{H}}{(p+1)!}\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\left\{(1+\beta)(x+y)^{p+1} + \frac{\mathrm{MI}[n'+kn(1+\beta)]}{1-\gamma^{p+2}}[(1+\beta)y]^{p+2}\right\}.$$

Mais le point (x, y) étant situé entre les droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$, on a

$$\alpha x < y, \qquad \beta y < x,$$

de sorte que

$$(1+\alpha)x < x+y, \qquad (1+\beta)y < x+y.$$

Alors, si l'on désigne par D le plus grand des nombres

$$1 + \frac{2\mathrm{MIJ}n}{1-\gamma^2},$$

$$1+\alpha+\frac{\mathrm{MI}[n'+kn(1+\alpha)]}{1-\gamma^2}, \qquad 1+\beta+\frac{\mathrm{MI}[n'+kn(1+\beta)]}{1-\gamma^2},$$

on aura

$$
(39) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&|z(xy)| < \mathrm{HD}\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\frac{(x+y)^{p+2}}{(p+2)!},\\
&\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \mathrm{HD}\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\frac{(x+y)^{p+1}}{(p+1)!},\\
&\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \mathrm{HD}\frac{1+\gamma}{1-\gamma^{p+2}}\frac{(x+y)^{p+1}}{(p+1)!},
\end{aligned}
\right.
$$

Ces inégalités sont fondamentales pour la suite. Je rappelle qu'elles ne sont valables que dans la partie du rectangle (R) comprise entre les droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$.

III. — Le cas général.

10. Revenons maintenant à l'objet de ce travail et démontrons l'existence de l'intégrale de l'équation (1) qui satisfait, relativement aux droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$, aux conditions (4) et qui s'annule au point O. En introduisant un paramètre λ, nous pouvons écrire l'équation (1) sous la forme

$$
(40) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda\left[a(x, y)z + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + c(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}\right] + f(x, y),
$$

et cherchons, comme l'a indiqué plusieurs fois M. E. Picard, à satisfaire formellement à l'équation (40) et aux conditions initiales (4) par le développement

$$
(41) \qquad z(x, y) = z_0(x, y) + \lambda z_1(x, y) + \ldots + \lambda^n z_n(x, y) + \ldots.
$$

Les fonctions $z_0(x, y)$, ..., $z_n(x, y)$, ... sont déterminées de proche en proche par les équations

$$
\frac{\partial^2 z_0}{\partial x\, \partial y} = f(x, y),
$$

$$
\frac{\partial^2 z_i}{\partial x\, \partial y} = a(x, y)z_{i-1} + b(x, y)\frac{\partial z_{i-1}}{\partial x} + c(x, y)\frac{\partial z_{i-1}}{\partial y} = g_i(x, y)
$$
$$
(i = 1, 2, \ldots),
$$

et par les conditions

$$
\begin{aligned}
&p_i(x, \alpha x) = \alpha\omega(x)\, q_i(x, \alpha x) + a(x)\, z_i(x, \alpha x),\\
&q_i(\beta y, y) = \beta\pi(y)\, p_i(\beta y, y) + b(y)\, z_i(\beta y, y),\\
&z_i(0, 0) \quad = 0
\end{aligned}
$$
$$
(i = 0, 1, 2, \ldots).
$$

Nous voyons que pour chaque fonction $z_i(x, y)$ nous avons à résoudre un problème que nous avons traité dans les deux premières parties de ce travail.

Il nous reste à démontrer la convergence absolue et uniforme des séries

$$(42) \qquad \Sigma \lambda^n z_n(x, y), \quad \Sigma \lambda^n \frac{\partial z_n}{\partial x}, \quad \Sigma \lambda^n \frac{\partial z_n}{\partial y}.$$

Or ceci est aisé grâce aux inégalités (38) et (39) que nous avons établies précédemment. Ces inégalités n'étant vraies que dans la portion du rectangle (R) comprise entre les droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$, nous supposons que le point de coordonnées (x, y) se trouve dans cette région.

Nous supposons que dans le rectangle (R) la fonction $f(x, y)$ est continue ainsi que les fonctions $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$. Soit N un nombre supérieur aux valeurs absolues de a, b, c dans le rectangle (R).

D'après les résultats du n° 8, la fonction $z_0(xy)$ et ses dérivées partielles du premier ordre satisfont aux inégalités (38)

$$|z_0(xy)| < L\frac{(x+y)^2}{2!},$$
$$\left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < L(x+y), \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < L(x+y).$$

Évaluons maintenant la valeur absolue de $g_1(x, y)$. On a

$$|g_1(x, y)| < NL(x+y)\left(2 + \frac{x+y}{2}\right).$$

Alors si nous posons

$$\delta = 2 + \frac{d+d'}{2},$$

on aura, pour $x \leqq d$, $y \leqq d'$,

$$|g_1(x, y)| < NL\,\delta(x+y).$$

Alors pour la fonction $z_1(x, y)$ et ses dérivées partielles du premier ordre, on aura les inégalités (39) où l'on remplacera H par NLδ et p par 1, c'est-à-dire :

$$|z_1(x, y)| < \mathrm{LND}\,\delta\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < \mathrm{LND}\,\delta\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,\frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < \mathrm{LND}\,\delta\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,\frac{(x+y)^2}{2!}$$

Ensuite, on aura

$$|g_2(xy)| < \mathrm{LDN}^2\delta^2\,\frac{1+\gamma}{1-\gamma^3}\,\frac{(x+y)^2}{2!},$$

et les mêmes formules (39) donneront :

$$|z_2(x, y)| < \mathrm{LD}^2\mathrm{N}^2\delta^2\,\frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)}\,\frac{(x+y)^4}{4!},$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < \mathrm{LD}^2\mathrm{N}^2\delta^2\,\frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)}\,\frac{(x+y)^3}{3!},$$

$$\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right| < \mathrm{LD}^2\mathrm{N}^2\delta^2\,\frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma^3)(1-\gamma^4)}\,\frac{(x+y)^3}{3!},$$

et ainsi de suite.

La convergence absolue et uniforme des séries (42) est démontrée quel que soit λ. Pour $\lambda = 1$, ces séries représentent la solution et les dérivées partielles du premier ordre de cette solution, du problème que nous nous sommes posé.

Cette solution est valable dans toute la région du rectangle (R) comprise entre les droites représentées par les équations $y = \alpha x$ et $x = \beta y$.

11. La solution donnée par la formule (41) (où l'on fera $\lambda = 1$) est unique. La démonstration se fait suivant la méthode classique[1]. Les éléments nécessaires pour faire cette démonstration se trouvent dans les deux premières parties de ce travail.

J'ajoute encore que l'intégrale précédente peut être prolongée dans le reste du rectangle (R), en résolvant par rapport à chacun des segments de droites $y = \alpha x$ et $x = \beta y$, compris dans (R), un problème de Cauchy. En effet, il suffit de voir que l'intégrale précédente donne les valeurs de z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ le long des droites $y = \alpha x$ et $x = \beta y$.

[1] *Voir* à ce sujet les Mémoires déjà cités de MM. E. Picard et E. Goursat.