T. PEYOVITCH

Sur la valeur maxima d'un déterminant

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 218-221
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__218_0>

SUR LA VALEUR MAXIMA D'UN DÉTERMINANT ;

PAR M. T. PEYOVITCH

(Belgrade).

M. Hadamard (1) a donné la valeur maxima d'un déterminant. Dans un petit Mémoire tout récent M. Karamata (2) a donné une autre valeur maxima d'un *déterminant très particulier*. Nous généraliserons cette valeur maxima pour un *déterminant quelconque*.

Prenons le déterminant

$$(1) \qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

En le développant suivant les éléments de la première ligne

$$\Delta_n = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n}$$

et désignant par $|\Delta_{n-1}|$ le module de celui des mineurs A_{1k}, qui a la plus grande valeur absolue, c'est-à-dire

$$|\Delta_{n-1}| = |A_{1p_1}|,$$

on aura

$$(a) \qquad |\Delta_n| \leqq |A_{1p_1}| \sum_k |a_{1k}| = |\Delta_{n-1}| r_1 \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

En appliquant la même méthode au déterminant Δ_{n-1}, on obtient

$$|\Delta_{n-1}| \leqq |A_{2p_2}| \sum_k |a_{2k}| = |\Delta_{n-2}| r_2$$

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 17, 1893.

(2) *Glas Srpskre Kraljevskre Akrademije*, t. 127, 1927.

où k parcourt toutes les valeurs de 1 à n, sauf p_1. En général on aura

$$(2)\qquad |\Delta_{n-m}| \leqq |A_{m+1},\ p_{m+1}| \sum_k |a_{m+1},\ k| = |\Delta_{n-(m+1)}|\ r_{m+1}$$

$$(m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

k parcourt toutes les valeurs de 1 à n, sauf $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Si l'on multiplie toutes les inégalités (2) entre elles, on obtient

$$(3)\qquad |\Delta_n| \leqq r_1\, r_2 \ldots r_n;$$

cette relation donne *la valeur maxima du déterminant* (1), *laquelle ne peut être jamais dépassée.*

Si les éléments du déterminant (1) sont disposés tels, ce que l'on peut toujours faire en permutant des colonnes entre elles, que les mineurs du module maximum des déterminants Δ_{n-m} ($m = 0, 1, \ldots, n-2$) correspondent aux premiers éléments des premières lignes (si l'on développe tous les déterminants Δ_{n-m} suivant les éléments des premières lignes), la formule (3) peut être écrite

$$(3')\qquad |\Delta_n| \leqq \prod_{p=1}^{p=n} \left(\sum_{k=p}^{k=n} |a_{pk}| \right).$$

Si les valeurs absolues des éléments du déterminant (1), lesquels figurent dans l'expression (3′), ne dépassent pas un nombre positif M, on a

$$|\Delta_n| \leqq n(n-1)\ldots,\ 2.\,1\,\mathrm{M}^n = n\,!\,\mathrm{M}^n.$$

Il est facile à voir, d'après la formation de l'inégalité (3), que le déterminant (1) pourra atteindre son maximum en valeur absolue dans les deux cas suivants :

1° Si tous les éléments des premières lignes des déterminants Δ_{n-m}, et cela pour toutes les valeurs de m ($m = 0, 1, \ldots, n-2$) sont nuls (si l'on développe tous les déterminants successifs suivant les éléments des premières lignes), sauf les éléments qui correspondent aux mineurs $\Delta_{n-(m+1)}$ du module maximum, ou

2° Si tous les mineurs des déterminants Δ_{n-m} ($m = 0, 1, 2, \ldots, n-2$), qui correspondent aux éléments des premières lignes (si l'on développe tous les déterminants suivant les éléments des premières lignes), sont nuls, sauf les mineurs du module maximum.

D'après le premier cas et en vertu de la formule (3′), le déterminant (1) pourra atteindre sa valeur maxima, si tous les éléments au-dessus de la diagonale principale sont égaux à zéro.

Dans le deuxième cas, on a les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions, d'où l'on peut calculer les $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments; d'autres éléments sont arbitraires. Remarquons que les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions annulent les $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments du déterminant (1).

Donc, d'après le deuxième cas et en vertu de la formule (3′), le déterminant (1) pourra atteindre sa valeur maxima, si tous les éléments au-dessous de la diagonale principale sont égaux à zéro.

Il faut remarquer que la valeur (3) peut être quelquefois *plus précise* que celle de M. Hadamard.

Par exemple, soit donné le déterminant

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \tag{4}$$

en le développant suivant les éléments de la première ligne, on a

$$\Delta_3 = 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

D'après la formule (a), on obtient

$$|\Delta_3| \leqq (1+3+2)\,|\Delta_2| \tag{5}$$

où

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

est le mineur du module maximum. En appliquant la formule (5) au déterminant Δ_2 on obtient

$$|\Delta_2| \leqq (5+2).\,4. \tag{6}$$

Si l'on multiplie les inégalités (5) et (6), on a la valeur maxima du déterminant (4)

(7) $$|\Delta_3| \leqq 168.$$

D'après le théorème de M. Hadamard, la valeur maxima du déterminant (4) est donnée par la formule

(8) $$|\Delta_3| \leqq \sqrt{14.\ 65.\ 61}$$

ou par la formule

(9) $$|\Delta_3| \leqq \sqrt{73.\ 43.\ 24}.$$

On voit que la valeur maxima donnée par la formule (7) est *plus petite* que celle de (8) ou (9).

Remarquons enfin que dans la formule (3) ne figurent que les $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments du déterminant (1).

Pour que la valeur maxima du déterminant (1) soit la plus petite possible, il faut développer les déterminants Δ_{n-m} de manière que la formule (3) contienne les éléments du déterminant (1) les plus petits possible en valeur absolue.