BULLETIN DE LA S. M. F.

J. A. DE SÉGUIER

Sur les surfaces unilatères fermées de genre un

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 80-88
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__80_0>

SUR LES SURFACES UNILATÈRES FERMÉES DE GENRE UN;

PAR M. J.-A. DE SÉGUIER.

1. W. Boy (*M. A.*, t. 57, p. 151-184, 1901) et, après lui, M. F. Schilling (*M. A.*, t. 97, p, 69-79, 1924) ont construit des modèles effectifs de surfaces unilatères fermées de genre un sans point singulier [en ne regardant comme points singuliers que les points d'arrêts des lignes de croisement ([1])], situés dans le fini euclidien, et les ont mises en relation avec le plan projectif. Le but de cette note est d'indiquer une construction plus simple de ces surfaces, et de rendre pour ainsi dire intuitives leurs relations avec le plan projectif. Je rappelle d'abord quelques propositions connues.

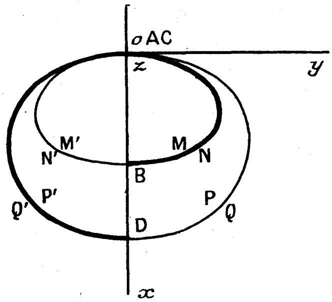
On sait que, si l'on soude les deux petits côtés d'une bande rectangulaire flexible, de manière à réunir les extrémités d'une même diagonale, on obtient une surface B unilatère, dite bande de Möbius. En supposant B non seulement flexible, mais extensible, on peut s'en faire une représentation plus commode, que j'indiquerai d'abord.

Considérons (*fig.* 1) un trièdre trirectangle $Oxyz$, Ox étant dirigé en avant, Oy vers la droite, Oz vers le haut. Soient B et D ($OB < OD$) deux points de Ox, A un point de Oz, et C son symétrique par rapport à Oxy. Considérons quatre cercles dont les plans sont perpendiculaires à xOz et les centres dans xOz. Le premier passe par B et A, le second par B et C, le troisième par D

([1]) W. Boy (*loc. cit.*) généralise d'abord la notion de courbure intégrale de Gauss $\left(\int K\,d\sigma\right.$, K étant la courbure totale en un point de l'élément de surface $\left.d\sigma\right)$, et établit ensuite, pour une surface fermée (bilatère ou unilatère), de courbure intégrale C et de genre p, ayant n lignes de croisement non fermées, la formule $C = 4\pi(1 - p + n)$.

et A, le quatrième par D et C. Soient MNPQ quatre points situés respectivement sur ces quatre cercles à droite de xOz; M', N, P', Q' les points symétriques par rapport à xOz. Considérons le

Fig. 1.



contour fermé γ, formé par les arcs BMA, AP'D, DQC, CN'B de ces quatre cercles. Le segment de droite, ayant pour extrémités les intersections avec γ d'un plan passant par Oz, décrit, quand ce plan varie, une bande de Möbius que j'appellerai $\mathcal{B}_0$.

2. Il y a, en topologie, une surface qui joue un rôle parallèle à celui de la sphère. Aplatissons une sphère sur le plan d'un de ses grands cercles (les surfaces considérées ici sont supposées flexibles, extensibles et pénétrables), de manière à obtenir une surface à deux feuillets circulaires superposés, soudés par leur circonférence. Soient M un point de la circonférence ainsi commune aux deux feuillets, et A un point du premier feuillet, situé sur le rayon d'extrémité M. Coupons le premier feuillet suivant AM, et le second suivant la ligne située sous AM; puis réunissons les quatre bords de manière à obtenir une ligne de croisement. Je dirai que la surface S, ainsi obtenue, est une sphère croisée suivant AM. Traçons, sur cette sphère croisée, une ligne L fermée, coupant une fois AM en un point B et passant par un point N de la circonférence. Soit P un point de L; appelons 1 et 2 les côtés de L dans le voisinage de P (il est clair que, dans toute région suffisamment petite, une ligne a deux côtés). Soit P' un point voisin de P, sur le côté 1. Supposons qu'un mobile m parte de P et revienne en P après avoir parcouru une fois L, et qu'un autre

mobile m', restant toujours très voisin de m sans jamais traverser L, parte de P'. Quand m revient en P, m' se trouvera en un point P'' du côté 2. Si m parcourt L une deuxième fois, m' revient en un point du côté 1, que je supposerai être P'. On voit que L, prise dans son ensemble, n'a qu'un côté, et que la portion σ de S limitée par le chemin de m' quand il est revenu en P' est une bande de Möbius. Donc S est unilatère.

On sait que toute surface $\left\{\begin{array}{c}\text{bilatère}\\ \text{unilatère}\end{array}\right\}$ est homéomorphe à une des surfaces déduites de la $\left\{\begin{array}{c}\text{sphère}\\ \text{sphère croisée}\end{array}\right\}$ par l'adjonction d'un nombre convenable d'*anses* (on entend par anse un tube réunissant deux trous de la sphère ou de la sphère croisée), et que toute surface unilatère présente une ligne de croisement (1).

3. Revenons maintenant aux notations du n° 1. On peut déformer $\mathcal{B}_0$, au-dessus du plan $z = 0$, de manière à faire coïncider l'arc BMAD avec un arc BD situé au-dessus de $z = 0$, et voisin de la droite BD. On peut de même déformer $\mathcal{B}_0$, au-dessous de $z = 0$, de manière à faire coïncider l'arc BN'CD avec un arc BD situé au-dessous de $z = 0$ et voisin de la droite BD. La surface σ' ainsi obtenue se déduit d'une sphère croisée suivant la droite BD (supposée aplatie sur $z = 0$) en supprimant, sur le feuillet supérieur, la région limitée par BD et un arc convexe BKD voisin de BD, et, sur le feuillet inférieur, la région limitée par BD et un arc convexe BK'D voisin de BD. Il est clair que, si l'on réunit à σ' un cercle en soudant la circonférence au contour BKDK'B, on obtient une sphère croisée.

En revenant alors aux notations du n° 2, on voit que la surface déduite de S en en supprimant la bande σ de Möbius (ou simplement en coupant S suivant L) se ramène par déformation continue à un cercle.

(1) La démonstration donnée par Darboux (*Leçons*, t. 1, p. 360) pour les surfaces algébriques s'étend aisément aux autres. Si le pied d'une normale à une surface unilatère $\varphi(x, y, z) = 0$ décrit une courbe qui le ramène au même point avec inversion de la normale, la valeur de φ en un point de cette normale voisin du pied doit changer de signe un nombre impair de fois (*cf.* Boy, *loc. cit.* p. 171 et 172).

4. On peut encore opérer comme il suit. Prenons un cercle sous la forme R de deux portions de plan R_1 et R_2 soudées le long d'une droite rr'. Soient rr_1r' le contour de R_1, et rr_2r' celui de R_2. Appliquons r sur D, r' sur B, et faisons coïncider rr' avec DB, qui sera une ligne de croisement de R et de $\mathcal{B}_0$. Déformons alors R_1 de manière que rr_1r' coïncide avec le contour DP'AMB, puis R_2 de manière que rr_2r' coïncide avec le contour DQCN'B.

5. Considérons maintenant le plan projectif. Le plan projectif P se définit comme l'ensemble des rapports de trois nombres réels x_1, x_2, x_3, non simultanément nuls, chaque système de rapports constituant un point du plan projectif. Chacun de ces points peut alors être assimilé à une droite issue de l'origine dans l'espace euclidien à trois dimensions, ou au couple des intersections d'une telle droite avec la sphère $x^2+y^2+z^2=1$, ou à celle de ces intersections pour laquelle on a $z \geqq 0$, en regardant comme identiques deux points diamétralement opposés du grand cercle C défini par $z=0$.

Opérons sur cette surface une déformation continue amenant d'abord en coïncidence deux à deux les points de C ayant même x. Soit c' la ligne de coïncidence obtenue. Par une nouvelle déformation continue, on pourra faire que la surface soit une sphère, sur laquelle c' est un arc de grand cercle AMA' de milieu M. Aplatissons cette sphère sur le plan normal à c' en M de manière à obtenir une surface à deux feuillets circulaires plans soudés par leurs circonférences, AM et A'M étant deux portions de rayon superposées. Coupons les deux feuillets suivant AM et A'M, pour les réunir en les croisant suivant AM (A' est donc réuni à A). On a ainsi la sphère croisée S de tout à l'heure, en correspondance biunivoque avec P. En particulier, à toute droite de P, répond sur S une ligne de l'espèce de la ligne L du n° 2.

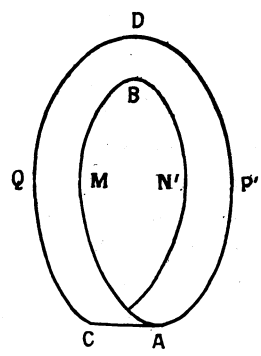
Si l'on supprime du plan projectif une des droites $x_i=0$, par exemple $x_3=0$, les points restants correspondent biunivoquement aux points de coordonnées $\frac{x_1}{x_3}$, $\frac{x_2}{x_3}$, d'un plan numérique euclidien P_0, qui peut être transformé stéréographiquement en les points de $x^2+y^2+z^2=1$ pour lesquels z est >0. Donc P_0 correspond biunivoquement à la surface S_0 déduite de S en supprimant les points de la ligne de croisement AM. *Donc* P_0 *est une surface ouverte, tandis que* P *est une surface fermée* (au sens de la théorie des ensembles).

6. Cherchons maintenant à déterminer une surface S_0 homéomorphe à S (c'est-à-dire correspondant à S d'une façon biunivoque et bicontinue), et n'ayant pas de points singuliers, c'est-à-dire dont les lignes doubles soient fermées.

D'après le théorème fondamental de la topologie des sufaces, on peut tracer sur S_0 une ligne L_0 n'ayant qu'un seul côté, d'où l'on déduit une bande σ_0 unilatère comme on a déduit σ de L au n° 2; et la surface obtenue en coupant S_0 suivant L_0 (ou en supprimant σ_0 de S_0) est homéomorphe à un cercle Γ. Si inversement S_0 remplit ces conditions, elle est homéomorphe à S. Il est facile de montrer, à l'aide de la formule généralisée d'Euler, que σ_0 est du même genre que σ, et est par conséquent une bande de Möbius. Mais nous n'en avons pas besoin. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que Γ puisse se souder à σ_0 après une *déformation continue*. Mais on va voir qu'on peut en pratique réaliser S_0 en déformant continuement un cercle et en le soudant à $\mathcal{B}_0$.

Prenons encore le cercle sous la forme R du n° 4, avec les mêmes notations. Mais appliquons maintenant r sur C, r' sur A,

Fig. 2.



et rr' sur CA. Déformons R_1 de manière que rr_1r' coïncide avec CN'BMA, puis R_2 de manière que rr_2r' coïncide avec CQDP'A, sans que, dans cette déformation, R_2 rencontre $\mathcal{B}_0$ ni R_1 hors de CA. La surface obtenue S'_0 a CA pour ligne de croisement. *Mais les points singuliers* C *et* A *sont ici tous deux de même nature que le point singulier* M *de* S, c'est-à-dire que si l'on coupe la surface, supposée aplatie horizontalement, suivant la ligne de croisement aux environs du point singulier considéré, pour joindre ensuite chaque feuillet supérieur au feuillet situé au-dessous, on obtient *deux points* (ce qui n'a pas lieu pour le point A de S).

7. Je me propose maintenant de remplacer la ligne de croisement AC par une ligne de croisement fermée. Remarquons pour cela qu'on peut toujours déformer une surface de manière à obtenir une ligne de croisement ouverte de la manière suivante. Réunissons à la surface une sphère le long d'une ligne EF. Coupons suivant cette ligne la surface et la sphère, et réunissons les quatre bords de manière à transformer EF en ligne de croisement. En déformant la sphère, on peut ainsi établir sur la surface une sorte de bourrelet se terminant par deux pointes en E et F, et l'on peut pousser la déformation jusqu'à réduire le bourrelet à la ligne EF elle-même.

Cette opération peut aussi se concevoir autrement. Soit V la région de la surface voisine de EF. Plions la surface suivant EF de manière à appliquer V sur les deux faces d'un cylindre de directrice EF que nous développerons ensuite sur un plan. Soient l_1 et l_2 deux lignes superposées, joignant E à F, appartenant respectivement aux premier et second feuillets de V. Soit V_i la portion du $i^{\text{ième}}$ feuillet comprise entre EF et l_i. En échangeant V_1 et V_2, on obtient un bourrelet dont la ligne de croisement coïncide avec l dans le $i^{\text{ième}}$ feuillet. D'autre part, deux bourrelets, appartenant à une même surface, dont les lignes de croisement, EF, EG, ont une extrémité commune, peuvent être fondus en un seul. On le voit de suite en aplatissant la surface, aux environs de E, suivant un plan contenant les portions EF$'$, EG$'$ de EF, EG respectivement, en joignant F$'$ à G$'$ par deux lignes superposées l_1 et l_2 appartenant respectivement aux premier et deuxième feuillets, et en échangeant les portions de feuillets comprises entre EF$'$, EG$'$ et l_1 d'une part, EF$'$, EG$'$ et l_2 d'autre part, de manière à obtenir une ligne de croisement coïncidant avec l_i dans le $i^{\text{ième}}$ feuillet.

Créons ainsi sur S'_0 un bourrelet de pointes E et F avec la ligne de croisement EF (on peut supposer par exemple EF tracé sur $\mathcal{B}_0$, E dans le voisinage de A et F dans le voisinage de C). Faisons coïncider E avec A, et F avec C, deux pointes de bourrelet se rejoignant en A, et de même en C. On voit, d'après ce qui précède, que l'on peut supprimer ces quatre pointes de manière à former, sur S'_0, une ligne de croisement fermée. La surface S_0 ainsi formée n'a plus de points singuliers ([1]).

8. Comparons maintenant S_0 avec la surface formée au n° 4, que j'appellerai S_1. Supposons que rr' soit un diamètre de R, que R_1 et R_2 soient des demi-cercles, rr_1 et rr_2 des quarts de circonférence. Supposons de plus que r_1 et r_2 viennent respectivement en A et en C de S_1, et en B et D de S_0. Alors les quarts de circonférence de R appliqués respectivement sur

$$\mathrm{AMB}, \quad \mathrm{BN'C}, \quad \mathrm{CQD}, \quad \mathrm{DP'A}$$

sont (avec le sens correspondant), dans S_1,

$$r_1 r', \quad r' r_2, \quad r_2 r, \quad r r_1;$$

dans S_0,

$$r' r_1, \quad r_1 r, \quad r r_2, \quad r_2 r'.$$

9. La correspondance de S_0 à S_1 et au plan projectif résulte évidemment de la loi adoptée pour la déformation de $\mathfrak{B}_0$ et de R et pour leur assemblage.

10. Le rôle élémentaire de la sphère croisée invite à en chercher un type algébrique aussi simple que possible. Boy propose la surface de Steiner à une seule droite double réelle. Voici comment on peut justifier et préciser cette remarque. *A priori*, la surface doit être au moins de quatrième degré. Il est donc naturel de chercher parmi les surfaces du quatrième degré ayant une droite double, et, pour avoir une surface aussi dégénérée que possible, de lui imposer encore deux droites doubles imaginaires. Les

(1) L'introduction du bourrelet, qui ne change pas le genre, change la courbure intégrale et, pour préciser, l'augmente de 4π. Mais la réunion de AC et EF la réduit de 8π.

trois droites devront concourir, pour qu'aucune sécante ne coupe la surface en plus de quatre points. Ces conditions caractérisent une surface de Steiner qu'on peut prendre, en coordonnées homogènes, sous la forme

$$\Sigma_1^4 \sqrt{x_i} = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\Sigma x_i^2 - 2\Sigma' x_i x_k)^2 = 64 x_1 x_2 x_3 x_4$$

(Σ' s'étendant aux *combinaisons* des indices i et k). La surface contient les droites $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$, $x_1 - x_3 = x_2 - x_4 = 0$, $x_1 - x_4 = x_2 - x_3 = 0$, qui sont doubles et concourent au point $(1, 1, 1, 1)$.

En posant $x_1 = z + y$, $x_2 = z - y$, $x_3 = t + ix$, $x_4 = t - ix$, x, y, z, t étant réels (les deux dernières droites sont alors imaginaires conjuguées), l'équation devient

$$(x^2 + y^2)^2 + 4(t - z)(zx^2 + ty^2) = 0,$$

ou, en remplaçant encore respectivement x, y, z, t par $2x$, $2y$, $2t - z$, $2(t - z)$,

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)^2 + z[(z - 2t)x^2 + 2(z - t)y^2] = 0.$$

Regardons t comme une constante positive, et x, y, z comme des coordonnées rectangulaires. La surface a les trois droites doubles $x = y = 0$, $x + iy = z = 0$, $x - iy = z = 0$, et contient tous les points de $x = y = 0$. Mais les seuls points $(0, 0, \zeta)$ pour lesquels la section par $z = \zeta$ a deux tangentes réelles à l'origine sont ceux où $t \leqq \zeta \leqq 2t$.

Négligeons désormais les autres points de Oz. L'équation (1) montre que z ne peut être < 0, et que, pour $z \geqq 0$, on doit avoir $0 \leqq z \leqq 2t$. Si l'on considère (1) comme une équation en x^2, les racines sont toujours réelles. Si leur somme est $\geqq 0$, on a

$$y^2 < \frac{z(2t - z)}{2},$$

et, comme le maximum du second membre a lieu pour $z = t$, on a $y^2 \leqq \frac{t^2}{2}$. Si la somme des racines est < 0, leur produit doit être < 0, d'où $y^2 < 2z(t - z)$, et encore $y^2 < \frac{t^2}{2}$. En considérant (1) comme une équation en y^2, les racines sont toujours réelles, et l'on trouve de même $x^2 \leqq t^2$.

Le plan $y=0$ coupe la surface suivant un cercle de centre $(0, 0, t)$ et de rayon t. Le plan $x=0$ la coupe (en dehors de la ligne de croisement réelle) suivant une ellipse de centre $\left(0, 0, \frac{t}{2}\right)$, dont le demi-axe situé sur Oz est égal à $\frac{t}{2}$ et l'autre à $\frac{t}{\sqrt{2}}$. La surface est donc bien du type de la sphère croisée.

11 [1]. La surface engendrée par le cercle $r^2+(z-a)^2=a^2$, $\psi=\text{const.}$ $(x=r\cos\psi, y=r\sin\psi)$, quand on y fait

$$a=\frac{3+\cos 2\psi}{4}t$$

et qu'on fait varier ψ, est aussi du type de la sphère croisée. L'élimination de ψ $\left(\cos 2\psi=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$ fournit immédiatement

$$(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)=tz(2x^2+y^2),$$

ou

$$(x^2+y^2)^2+z[(z-2t)x^2+(z-t)y^2]=0.$$

Cette surface est analogue à (1). Les seules droites qu'elle contienne sont encore $x=y=0$, $x\pm iy=z=0$. Mais la première seule est double. Ce n'est donc plus une surface de Steiner.

---

(1) *Cf.* Dyck, *M. A.*, t. 32, 1888, p. 510-511.