Bulletin de la S. M. F.

A. Myller

Directions concourantes dans une variété métrique à n dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 56 (1928), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1928__56__1_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DIRECTIONS CONCOURANTES DANS UNE VARIÉTÉ MÉTRIQUE A n DIMENSIONS;

PAR M. A. MYLLER.

1. Dans une Note publiée dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 5e série, vol. XXXIII, p. 339, nous avons introduit la notion de directions concourantes au sens de M. Levi-Civita sur une surface ordinaire. M. Octave Mayer (1) a montré que cette notion est susceptible de nombreuses et variées applications dans la Géométrie différentielle des surfaces. Dans ce qui suit nous allons montrer que cette notion de directions concourantes sorties des points d'une courbe, établie dans le cas d'une surface ordinaire, peut être étendue au cas de l'espace métrique riemannien à un nombre quelconque de dimensions.

2. Considérons une variété métrique S_m à m dimensions définie à l'aide de la forme quadratique différentielle

$$ds^2 = \Sigma a_{ik} du_i du_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont les coordonnées d'un point quelconque de la variété. Supposons que cette variété S_m est immergée dans une variété euclidienne E_n à n dimensions. Cela est toujours possible si n est suffisamment grand. Soit C une courbe tracée dans S_m. Imaginons que, de chaque point M de C, parte une direction dans S_m. Une telle direction peut être définie à l'aide d'une droite g tangente

(1) *Annales scientifiques de l'Université de Jassy*, t. XIV, p. 169-204.

en M à la variété courbe S_m et située dans la variété euclidienne E_n. Sur chaque droite g considérons un point M′ et soit C′ la courbe lieu de ces points. Soit t' la tangente en M′ à la courbe C′ et soit E_m la variété linéaire tangente en M à la variété S_m. Nous dirons que les directions g sont concourantes au sens de M. Levi-Civita si l'on peut choisir les points M′ de telle manière que toute tangente t' soit perpendiculaire à l'espace linéaire correspondant E_n.

Pour justifier la dénomination de directions concourantes, voyons ce qui se passe dans le cas particulier où S_m est une surface ordinaire S_2 et par conséquent E_n est l'espace ordinaire E_3. Les E_m sont des plans E_2 tangents à la surface le long de C qui engendrent une surface développable D. Fixons les directions g sur D et appliquons cette développable sur un plan. Dans cette application, un plan tangent quelconque E_2^* viendra se rabattre sur le plan tangent infiniment voisin E_2 en tournant autour de la droite d'intersection de ces deux plans. La droite $M'M^{*\prime}$ étant perpendiculaire au plan E_2 le point $M^{*\prime}$ de g^* viendra se poser après l'application sur le point M′ de g. Cela a lieu pour tous les points M′ et par conséquent dans le cas des surfaces ordinaires les directions concourantes au sens de M. Levi-Civita sont celles qui deviennent concourantes au sens ordinaire après l'application de la développable sur un plan.

3. Pour établir les équations différentielles de la concourance dans le cas général, nommons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point quelconque de l'espace euclidien E_n. Soient

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots u_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

les équations de l'espace courbe S_m que nous avons supposé plongé dans E_n et

$$x_i = x_i(s)$$

les équations de la courbe C où s représente l'arc de cette courbe. Soient encore

$$\alpha_i = \alpha_i(s)$$

les cosinus directeurs de la droite g sortie de M et $\rho(s)$ la distance MM′. Les coordonnées de M′ seront

$$x_i(s) + \rho(s)\alpha_i(s)$$

et les paramètres directeurs de la tangente t' dans ce point à la courbe C′ seront

$$\frac{dx_i}{ds} + \frac{d\rho}{ds}\alpha_i + \rho\frac{d\alpha_i}{ds}.$$

Parce que la courbe C est dans S_m on obtient, de la formule (2),

$$\frac{dx_i}{ds} = \sum_h \frac{\partial x_i}{\partial u_h} u'_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

où u'_h sont les paramètres directeurs dans S_m de la tangente à C. De même parce que les droites g sont tangentes à S_m on a

$$\alpha_i = \sum_h \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \bar{u}'_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

où $\bar{u}'_h$ sont les paramètres directeurs dans S_m des droites g.

Pour exprimer que t' est perpendiculaire à l'espace linéaire E_m tangent en M à S_m il suffit d'exprimer que t' est perpendiculaire à toute direction sortant de M tangente à S_m. Les paramètres directeurs d'une telle direction sont donnés par

$$\delta x_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\delta u_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

La condition de perpendicularité est

$$\sum_i \left[\frac{dx_i}{ds} + \frac{d\rho}{ds}\alpha_i + \rho\frac{d\alpha_i}{ds}\right]\left[\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\delta u_k\right] = 0$$

qui doit être vérifiée pour tout δu_k.

Remplaçons dans cette formule

$$\frac{dx_i}{ds}, \qquad \alpha_i, \qquad \frac{d\alpha_i}{ds}$$

par leurs valeurs tirées de (3) et (4),

$$\sum_i \Bigg\{\Bigg[\sum_h \frac{\partial x_i}{\partial u_h} u'_h + \frac{d\rho}{ds}\sum_h \frac{\partial x_i}{\partial u_h}\bar{u}'_h$$
$$+ \rho\left(\sum_h \frac{\partial x_i}{\partial x_h}\frac{d\bar{u}'_h}{ds} + \sum_{hl}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_h \partial u_l}\bar{u}'_h u'_l\right)\Bigg]\Bigg[\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\delta u_k\Bigg]\Bigg\} = 0.$$

Écrivons que le coefficient de δu_k est nul et transformons-le à l'aide des formules connues

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u_h} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} = a_{hk} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \frac{\partial^2 x_i}{\partial u_h \, d u_l} = \begin{bmatrix} h & l \\ & k \end{bmatrix}.$$

Nous obtenons

$$\sum_h a_{hk} u'_h + \frac{d\rho}{ds} \sum_h a_{hk} \bar{u}'_h + \rho \sum_h a_{hk} \frac{d\bar{u}'_h}{ds} + \rho \sum_{hl} \begin{bmatrix} h & l \\ & k \end{bmatrix} \bar{u}'_h u'_l = 0.$$

En multipliant par a^{ik} et en sommant par rapport à k nous obtenons les équations de la concourance

$$(5) \quad \rho \frac{d\bar{u}'_i}{ds} + \frac{d\rho}{ds} \bar{u}'_i + u'_i + \rho \sum_{hl} \begin{Bmatrix} h & l \\ & i \end{Bmatrix} \bar{u}'_h u'_l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Si l'on y joint la relation

$$\sum_{ik} a_{ik} \bar{u}'_i \bar{u}'_k = 1$$

on a ainsi un système de $m+1$ équations pour déterminer les $m+1$ inconnues $\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, \ldots, \bar{u}'_m, \rho$.

On observe que ces équations sont intrinsèques, elles dépendent seulement des éléments de l'espace S_m et non de ceux de l'espace auxiliaire E_n.

On peut donner aux équations (5) une autre forme. Mettons

$$\rho \bar{u}'_i = \xi_i$$

et remplaçons après l'arc s par une autre variable quelconque t en faisant la substitution

$$s = \varphi(t).$$

On obtient

$$(6) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{du_i}{dt} + \sum_{hl} \begin{Bmatrix} h & l \\ & i \end{Bmatrix} \xi_h \frac{du_l}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

4. Comme application, nous allons introduire la notion de surface de Peterson dans un espace quelconque. Elle se présente comme une extension de l'idée de surface de translation dans un espace riemannien due à M. Bompiani (¹).

(¹) *Comptes rendus*, t. 169, p. 840. — L. Bianchi. *Lezioni di Geom. differ.*, 3ᵉ édition, vol. II, p. 809.

Nous dirons qu'une surface σ_2 de l'espace courbe S_m est une surface de Peterson quand on peut tracer sur elle deux systèmes de courbes de telle manière que le long des lignes de chacun des deux systèmes les directions tangentes aux lignes de l'autre système sont concourantss au sens de M. Levi-Civita par rapport à l'espace ambiant S_m.

Prenons les deux systèmes de lignes comme lignes coordonnées et soient

$$x_i = x_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{7}$$

les équations de σ_2. Parce que le long des lignes $v =$ const. les directions des lignes $u =$ const. sont concourantes on met, dans la formule (6),

$$u_i = x_i, \qquad t = u, \qquad \xi_i = \sigma(u, v)\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

et cette formule devient

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \sum_{hl}\begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix}\frac{\partial x_h}{\partial v}\frac{\partial x_l}{\partial u} = 0 \tag{8}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

De même pour exprimer que les directions des $v =$ const. sont parallèles le long des $u =$ const. on met, dans (6),

$$u_i = x_i, \qquad t = v, \qquad \xi_i = \tau(u, v)\frac{\partial x_i}{\partial u}$$

et l'on obtient

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial x_i}{\partial v} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u} + \sum_{hl}\begin{Bmatrix} h\ l \\ i \end{Bmatrix}\frac{\partial x_h}{\partial u}\frac{\partial x_l}{\partial v} = 0 \tag{9}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

On obtient ainsi les $2m$ équations différentielles (8) et (9) qui en général ne pourraient pas être satisfaites par m fonctions (7). Mais on peut profiter des fonctions arbitraires σ et τ pour réduire le nombre des équations à m. En effet, chaque équation (8) est identique à sa correspondante (9) si l'on a en même temps

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial u} = \frac{1}{\tau}, \qquad \frac{1}{\tau}\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{1}{\sigma}.$$

On trouve l'intégrale de ces équations en posant

$$\sigma = \frac{U + V}{V'}, \qquad \tau = \frac{U + V}{U'},$$

U et V étant des fonctions de u respectivement v et U', V' leurs dérivées. Si après avoir introduit ces valeurs dans (8) on remplace les variables u, v par des variables nouvelles U, V on obtient, en écrivant u, v à la place de U, V, les équations

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v} + \sum_{hl} \begin{Bmatrix} h & l \\ & i \end{Bmatrix} \frac{\partial x_h}{\partial u} \frac{\partial x_l}{\partial v} + \frac{1}{u + v}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) = 0. \tag{10}$$

On a ainsi le système d'équations aux dérivées partielles des surfaces de Peterson dans S_m. Ce sont des équations du type hyperbolique dont on sait qu'elles admettent un système unique de solutions telles que

$$x_i(u, b) = f_i(u), \qquad x_i(a, v) = \varphi_i(v) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

f_i et φ_i étant des fonctions données.

Sous forme géométrique ce résultat dit que, étant données dans S_m deux courbes qui se croisent, on peut toujours faire passer par elles une surface de Peterson.

Quand S_m est l'espace ordinaire E_3 on obtient les surfaces ordinaires de Peterson (¹).

(¹) *Annales de Toulouse*, 2ᵉ série, t. VII, 1905, p. 46.