BULLETIN DE LA S. M. F.

R. CESAREC

Sur les triples spirales logarithmiques dans l'espace

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 104-110
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__104_0>

SUR LES TRIPLES SPIRALES LOGARITHMIQUES DANS L'ESPACE;

PAR M. RODOLPHE CESAREC.

Nous nous proposons le problème suivant : Etant donnés trois points fixes $A_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ dans l'espace, trouver les courbes telles que chacune d'elles en chacun de ses points $M(x, y, z)$ rencontre les droites MA_i respectivement sous les angles constants ε_i. Ainsi définies, on peut nommer ces courbes les *triples spirales logarithmiques*, pour une raison bien connue.

En désignant les cosinus directeurs de la droite MA_i par u_i, v_i, w_i, les constantes $\cos\varepsilon_i$ par k_i et les cosinus directeurs de la tangente des courbes cherchées par α, β, γ, notre problème sera exprimé analytiquement de la manière suivante

$$u_i\alpha + v_i\beta + w_i\gamma = k_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

avec les conditions

$$\begin{gathered} u_i^2 + v_i^2 + w_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3), \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Ayant égard aux valeurs

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}, \tag{3}$$

où les x, y, z signifient les coordonnées du point courant M de notre courbe et $ds = \sqrt{ds^2 + dy^2 + dz^2}$ est son élément d'arc, le système (1) représente trois équations différentielles de Monge du deuxième degré. Toutes les directions (α, β, γ) au point $M(x, y, z)$, formant avec la direction (u_i, v_i, w_i) l'angle constant ε_i, engendrent un cône de révolution et, par suite, les postulats que nous avons faits veulent dire que les trois cônes de révolution respectifs ayant leurs sommets au point M doivent avoir deux génératrices communes. D'autant que nous exigeons que toutes les courbes intégrales communes à deux quelconques des équations (1) le soient aussi à l'équation restante. En ce cas, les trois équations (1) sont linéairement dépendantes entre elles telles qu'on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \rho_3 u_3 = 0, \\ \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \rho_3 v_3 = 0, \\ \rho_1 w_1 + \rho_2 w_2 + \rho_3 w_3 = 0, \\ \rho_1 k_1 + \rho_2 k_2 + \rho_3 k_3 = 0, \end{cases}$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant trois nombres qui ne s'annulent pas tous en même temps. Les trois premières équations (4) ne pouvant coexister que sous la condition nécessaire et suffisante

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

on voit que les trois directions (u_i, v_i, w_i) $(i = 1, 2, 3)$ doivent appartenir au même faisceau de droites ayant son sommet au point M. On pourrait d'ailleurs y arriver par un raisonnement géométrique élémentaire en discutant la possibilité de deux génératrices communes à trois cônes de révolution.

Avant de continuer il est convenable de remarquer que ce simple principe de deux génératrices communes à trois cônes de révolution est tout à fait applicable à bien d'autres problèmes différents dans lesquels il s'agit des lignes dites triples trajectoires isogonales.

La condition (5) nous donne des conditions auxquelles doivent satisfaire les trois points donnés A_1, A_2, A_3 pour que puissent exister nos courbes. Nous avons selon la nature même du problème

$$(6)\qquad \begin{cases} u_i = \dfrac{x - x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \\ v_i = \dfrac{y - y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \\ w_i = \dfrac{z - z_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

donc l'équation (5) obtient la forme

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation du plan $A_1 A_2 A_3$ dont chaque point $M(x, y, z)$ jouit alors de la propriété d'être le sommet de trois cônes de révolution à deux génératrices communes. Mais on reconnaît bien aisément par un raisonnement analytique ou purement géométrique que dans le plan nos courbes cherchées ne sont pas possibles. Il reste donc une seule possibilité : la dernière relation existe identiquement en x, y, z. En ce cas il résulte immédiatement

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.$$

Cela veut dire que pour avoir les triples spirales logarithmiques il faut choisir les trois points donnés A_1, A_2, A_3 sur une même droite; par exemple sur l'axe des x

$$(7) \qquad \begin{cases} A_1(a, 0, 0), \\ A_2(b, 0, 0), \\ A_3(0, 0, 0), \end{cases}$$

et conformément à ces valeurs se modifient aussi les équations (6).

Le système (4) renferme encore trois relations analogues à la (5), soit

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0$$

et l'on voit par le calcul que la première est une identité en conséquence de (6) et (7) tandis que les deux autres sont équivalentes ayant la forme

$$(8) \qquad b k_1 \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} - a k_2 \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2} \\ - (b-a) k_3 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

Il nous reste ainsi à discuter cette équation. Elle représente une surface sur laquelle peuvent et doivent être situés les points $M(x, y, z)$ jouissant des deux propriétés suivantes : chacun d'eux est le point initial de trois directions (u_i, v_i, w_i) appartenant à un même faisceau de droites et par conséquence peut être le sommet de trois cônes de révolution ayant deux génératrices communes (α, β, γ).

Il faut alors postuler et exprimer analytiquement que les directions (α, β, γ) sont tangentielles à cette surface; l'ensemble des ∞^2 éléments linéaires ainsi obtenu sur la surface y engendre le système des ∞^1 courbes intégrales communes à trois équations différentielles (1).

A cette fin différentions totalement l'équation (8); les coefficients des dx, dy, dz dans l'équation qui en résulte désignent d'après la théorie générale des surfaces les paramètres directeurs de la normale de la surface en point $M(x, y, z)$. Donc, en remplaçant les différentielles dx, dy, dz par α, β, γ il sera exprimé que la direction (α, β, γ) est perpendiculaire à la normale mentionnée tout à l'heure, c'est-à-dire qu'elle est tangentielle à la surface. Ainsi nous obtenons l'équation

$$(9)\qquad bk_1\frac{(x-a)\alpha+y\beta+z\gamma}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}-ak_2\frac{(x-b)\alpha+y\beta+z\gamma}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}} \\ -(b-a)k_3\frac{x\alpha+y\beta+z\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0.$$

Cependant nous avons encore les trois équations (1) qui se présentent par suite de (7) sous la forme

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{(x-a)\alpha+y\beta+z\gamma}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}=k_1, \qquad \frac{(x-b)\alpha+y\beta+z\gamma}{\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2}}=k_2, \\ &\qquad\qquad \frac{x\alpha+y\beta+z\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=k_3, \end{aligned}\right.$$

et avec cela la relation (9) nous donne directement

$$(11)\qquad bk_1^2-ak_2^2-(b-a)k_3^2=0.$$

Par cette relation doivent être liées les quantités données a, b, ε_1, ε_2, ε_3 pour que les triples spirales logarithmiques soient possibles. Il était d'ailleurs géométriquement clair *a priori* d'une part et d'autre part d'après la quatrième équation (4) que les angles constants ε_1, ε_2, ε_3 ne peuvent pas être indépendants entre eux.

Il suit de (11)

$$k_3 = \pm\sqrt{\frac{bk_1^2 - ak_2^2}{b-a}}, \tag{12}$$

la valeur qui donne à l'équation (8) la forme définitive

$$\begin{aligned} bk_1\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2} - ak_2\sqrt{(x-b)^2+y^2+z^2} \\ \pm\sqrt{(b-a)(bk_1^2-ak_2^2)}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Sur cette surface sont placées les courbes intégrales communes à trois équations de Monge (1), c'est-à-dire nos triples spirales logarithmiques cherchées. C'est une surface de révolution ayant son axe à l'axe des x. Il est facile à montrer que son méridien est un ovale de Descartes dont les trois foyers réguliers sont identiques à trois points fixes donnés A_1, A_2, A_3. Cela sera démontré si nous réduisons l'équation du méridien dans le plan $z = 0$

$$\begin{aligned} bk_1\sqrt{(x-a)^2+y^2} - ak_2\sqrt{(x-b)^2+y^2} \\ \pm\sqrt{(b-a)(bk_1^2-ak_2^2)}\sqrt{x^2+y^2} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

à la forme classique ([1])

$$\mu\sqrt{(x-a)^2+y^2} + \nu\sqrt{(x-b)^2+y^2} = l, \tag{15}$$

où μ, ν, l désignent des constantes.

La manière la plus simple dans ce but est d'éloigner les radicaux de deux équations (14) et (15) et ensuite d'essayer à déterminer les valeurs de μ, ν, l en comparant les coefficients correspondants. On obtient d'abord

$$\begin{aligned} (k_1^2-k_2^2)^2(x^2+y^2)^2 - 4(k_1^2-k_2^2)(bk_1^2-ak_2^2)(x^2+y^2)x \\ + 2[ab(k_1^2+k_2^2)^2 - 2(a^2+b^2)k_1^2k_2^2](x^2+y^2) \\ + 4(bk_1^2-ak_2^2)^2x^2 - 4ab(k_1^2-k_2^2)(bk_1^2-ak_2^2)x \\ + a^2b^2(k_1^2-k_2^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

---

[1] *Voir* par exemple F. Gomes Teixeira, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*, t. I, 1908, p. 247, ou G. Loria, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, t. I, 1910, p. 175, équation (2).

et

$$\begin{aligned}(\nu^2-\mu^2)^2(x^2+y^2)^2 &- 4(\nu^2-\mu^2)(b\nu^2-a\mu^2)(x^2+y^2)x \\ &+ 2[(\nu^2+\mu^2)(b^2\nu^2+a^2\mu^2-l^2) \\ &- 2(a^2+b^2)\nu^2\mu^2](x^2+y^2)+4(b\nu^2-a\mu^2)^2x^2 \\ &- 4[(b\nu^2+a\mu^2)(b^2\nu^2+a^2\mu^2-l^2)-2ab(a+b)\nu^2\mu^2]x \\ &+ [(b^2\nu^2+a^2\mu^2-l^2)^2-4a^2b^2\nu^2\mu^2]=0.\end{aligned}$$

Les coefficients de $(x^2+y^2)^2$, $(x^2+y^2)\,x$ et x^2 montrent qu'on peut poser

$$(16)\qquad \begin{cases} \nu=\pm k_1, \\ \mu= k_2, \end{cases}$$

et par cela les deux coefficients de x^2+y^2 donnent

$$(17)\qquad l^2=(b-a)(bk_1^2-ak_2^2).$$

On vérifie aisément que les valeurs (16) et (17) égalisent aussi les deux coefficients de x ainsi que les deux termes constants. L'équation classique de notre ovale de Descartes est donc

$$k_2\sqrt{(x-a)^2+y^2}\pm k_1\sqrt{(x-b)^2+y^2}=\pm\sqrt{(b-a)(bk_1^2-ak_2^2)}.$$

On voit que c'est un ovale spécial de Descartes, la constante l étant dépendante de quatre constantes essentielles a, b, k_1, k_2.

Les triples spirales logarithmiques ne recouvrent donc pas les surfaces de révolution engendrées des ovales généraux de Descartes.

Pour démontrer notre assertion touchant les foyers, nous rappelons qu'après la théorie des ovales de Descartes les trois foyers réguliers d'un tel ovale (15) ont les coordonnées [1]

$$\begin{gathered} F(a,\,0),\\ G(b,\,0),\\ H\left(\frac{b\nu^2-a\mu^2}{\nu^2-\mu^2}-\frac{l^2}{(b-a)(\nu^2-\mu^2)},\,0\right);\end{gathered}$$

l'abscisse du point H s'annule pour nos valeurs (16) et (17), d'où résulte $A_1\equiv F$, $A_2\equiv G$, $A_3\equiv H\equiv 0$, c'est-à-dire les trois points

(1) G. Loria a déterminé ces foyers dans le cas spécial $b=-a$ (*loc. cit.*, p. 179 et 180), mais sa manière de la conclusion reste valable aussi dans notre cas général.

fixes A_1, A_2, A_3 donnés coïncident en effet avec trois foyers réguliers d'ovale (14).

Il est sans doute indispensable de remarquer que le problème de nos courbes a été résolu par E. Cesàro (¹) sous le nom de « eliche policoniche », mais toutefois d'une manière tout à fait différente de la nôtre et adaptée au seul problème (les coordonnées bipolaires), tandis que la méthode expliquée plus haut est plus générale pouvant être appliquée à d'autres problèmes analogues, comme nous l'avons déjà accentué. Du reste, le vrai but du mémoire de Cesàro est de rechercher d'une manière minutieuse le placement et le cours de ces courbes sur la surface ainsi que les particularités topographiques de cette surface même. Nous avons, au contraire, tâché d'en expliquer la manière de la génération.

On retrouve notre relation (11) qui existe entre les trois angles donnés ε_1, ε_2, ε_3 dans la première formule (5) de Cesàro (*loc. cit.*, p. 75).

Dans le cas spécial $b = \infty$ la formule (12) donne $k_3 = \pm k_1$ et de (13) suit alors

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{ak_2}{k_1};$$

donc la surface dégénère à une quadrique. C'est le résultat trouvé par G. Scheffers (²) (avant que Cesàro trouvât le sien) par un raisonnement purement géométrique.

Nous remarquons enfin que les équations (3) représentent les équations différentielles des triples spirales logarithmiques si nous substituons les α, β, γ par les valeurs obtenues comme résolution du système formé de l'équation (2) et de deux quelconques des équations (10).

(¹) *Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli*, t. 42, 1903, p. 73-89 : *Analisi intrinseca delle eliche policoniche.*

(²) *Berichte und Verhandlungen der Ges. der Wissenschaften zu Leipzig* t. 54, 1902 : *Ueber Loxodromen* (§ 4).