BULLETIN DE LA S. M. F.

H. BEGHIN

Sur le choc de deux solides en tenant compte du frottement

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 111-117

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__111_0>

SUR LE CHOC DE DEUX SOLIDES EN TENANT COMPTE DU FROTTEMENT (¹);

PAR M. HENRI BÉGHIN.

L'étude habituelle du choc de deux solides avec frottement, ou bien ne prévoit pas la condition fixant la fin du choc, ou admet une condition purement artificielle.

S'il s'agit de corps *inélastiques*, les auteurs sont d'accord pour déterminer la fin du choc par la condition que la vitesse normale relative W d'un corps par rapport à l'autre s'annule. Ce cas ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Dans le cas de corps *parfaitement élastiques*, certains auteurs admettent qu'à la fin du choc, la vitesse W se retrouve changée de sens :

$$W = -W_0,$$

comme cela a lieu lorsque le frottement est négligé; d'autres admettent que la composante normale de la percussion de contact est deux fois plus grande pour les corps élastiques que pour les corps inélastiques, comme cela a lieu également lorsque le frottement est nul.

Je me propose d'établir d'une manière plus logique la condition de fin de choc, dans le cas de corps parfaitement élastiques.

Un retour sur les hypothèses de la théorie des chocs en mécanique rationnelle est indispensable.

L'invariabilité rigoureuse de deux corps qui se heurtent est incompatible avec la continuité des vitesses, hypothèse qui est à la base de toute la mécanique, puisque celle-ci est fondée sur la

---

(¹) *Voir* G. DARBOUX, ***Étude géométrique sur les percussions et le choc des corps*** (***Bull. des Sc. math.***, 1880) et Notes annexées à DESPEYROUS, ***Cours de Mécanique***, t. II, 1886; E.-J. ROUTH, ***Dynamics of a system of rigid bodies***, p. 158 et suiv.; A. MAYER, ***Über den Zusammenstoss...*** (***Berichte der math.-phys. Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss.*** Leipzig, 1902, p. 208 et 327); E. DELASSUS et J. PÉRÈS, ***Nouvelles Annales de Math.***, 1923 et 1924.

notion d'accélération. Il faut donc admettre une déformation des corps. Or, en mécanique rationnelle, on calcule les quantités de mouvement d'un solide qui subit un choc en se conformant à la cinématique du solide invariable; ceci ne se justifie que si l'on suppose les déformations des deux corps localisées dans le voisinage du point de contact, de sorte que, en poussant les choses à l'extrême, un solide apparaît comme constitué par un noyau rigoureusement invariable qui comprend presque tout le corps, et par une pellicule très mince, de masse négligeable, *seule déformable*, recouvrant le noyau, au moins dans le voisinage du point de contact.

Le noyau est ainsi seul à considérer dans la détermination des quantités de mouvement, qui peut se faire conformément à la cinématique du solide invariable. Les éléments du noyau S qui se trouvent sur la normale commune aux deux corps ont, par rapport au noyau S', des vitesses relatives dont la composante normale a une même valeur W; il n'en est pas de même pour les éléments appartenant à l'une des deux pellicules déformables.

D'autre part, dans les chocs avec frottement, on admet la loi de Coulomb, et l'on calcule la vitesse de glissement au contact des deux corps, comme s'il s'agissait des deux noyaux; cela revient évidemment à négliger la vitesse tangentielle de déformation des pellicules. Je me conformerai à ces hypothèses.

Si α désigne l'épaisseur totale des deux pellicules, $\frac{d\alpha}{dt}$ représente évidemment, au signe près, la valeur de la vitesse normale relative W.

Or, dans des corps parfaitement élastiques, la réaction est fonction de la déformation et s'annule avec elle; le choc est donc terminé quand α retrouve sa valeur initiale α_0; de sorte que la condition de fin de choc s'écrit

$$\alpha - \alpha_0 = -\int W\,dt = 0, \tag{1}$$

l'intégrale étant étendue à la durée du choc.

Mais cette condition n'est pas facile à exprimer dans les applications, car on n'a aucune indication sur la manière dont W varie avec le temps, laquelle ne pourrait être connue que si l'on connaissait la valeur de la réaction en fonction de la déformation.

Je vais établir la condition de fin de choc par une autre méthode, très facile à appliquer, et je montrerai ensuite l'équivalence des deux conditions.

Lorsque deux corps se heurtent, les pellicules se déforment : elles commencent par s'aplatir; puis la vitesse normale W s'annule et change de sens, les pellicules augmentant d'épaisseur, jusqu'à ce que le travail des forces élastiques intérieures se retrouve intégralement restitué. Cette condition équivaut à la suivante :

La fin du choc a lieu au moment où la demi-variation de force vive est égale au travail absorbé par le frottement au contact des deux corps.

Or, la variation de force vive s'obtient en fonction de la percussion par un théorème connu obtenu par application du théorème du travail virtuel aux deux corps, en prenant pour vitesse virtuelle de chaque élément la somme de sa vitesse avant le choc et de sa vitesse après.

Pour que ce théorème soit tout à fait clair, il est indispensable d'en reprendre rapidement la démonstration avec les hypothèses faites ci-dessus :

Les quantités de mouvement perdues par chacun des solides équilibrent la percussion de contact que l'autre exerce sur lui. Si je considère ces vecteurs comme *appliqués aux deux noyaux* et si je prends les vitesses virtuelles que je viens d'indiquer, les travaux ainsi obtenus ont une somme nulle, puisque la somme relative à chaque solide est nulle. J'obtiens ainsi l'équation

$$(2)\qquad \Sigma m(v^2 - v_0^2) = X(U + U_0) + Y(V + V_0) + W(Z + Z_0),$$

où les axes des x et des y sont supposés dans le plan tangent commun, l'axe des z suivant la normale commune; X, Y, Z sont les composantes de la percussion de contact appliquée au solide S; U, V, W sont les composantes de la vitesse, par rapport au *noyau* S', de l'élément de matière du *noyau* S qui est infiniment voisin du point de contact.

Or, si λ, μ, ν désignent les composantes de la force de réaction qui donne naissance par intégration à la percussion X, Y, Z, la condition de fin de choc énoncée ci-dessus s'exprime par l'équation

$$(3)\qquad \Sigma m(v^2 - v_0^2) = 2\int(\lambda U + \mu V)\,dt.$$

l'intégrale étant étendue à la durée du choc. La condition de fin de choc s'écrit donc

$$(4)\qquad X(U + U_0) + Y(V + V_0) + Z(W + W_0) = 2\int(\lambda U + \mu V)\,dt.$$

Or, cette équation se simplifie considérablement : l'étude analytique du choc avec frottement conduit, en effet, à des équations de la forme

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}, \qquad \frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\nu},$$

où $\psi(\lambda, \mu, \nu)$ désigne une certaine forme quadratique homogène ; ces équations sont valables à chaque instant du choc.

Résolues par rapport à λ, μ, ν, elles prennent la forme

$$(5)\qquad \lambda = \frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial U'}, \qquad \mu = \frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial V'}, \qquad \nu = \frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial W'};$$

où U', V', W' sont mis pour $\frac{dU}{dt}$, $\cdots$ et où χ est une autre forme quadratique homogène. Intégrées pendant le choc, elles donnent

$$(6)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial U} - \dfrac{\partial\chi}{\partial U_0}\right), \\[2ex] Y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial V} - \dfrac{\partial\chi}{\partial V_0}\right), \\[2ex] Z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial W} - \dfrac{\partial\chi}{\partial W_0}\right). \end{cases}$$

Ces équations (5) et (6) permettent d'établir facilement l'identité

$$(7)\qquad X(U + U_0) + Y(V + V_0) + Z(W + W_0) = 2\int(\lambda U + \mu V + \nu W)\,dt.$$

Si l'on utilise les identités bien connues,

$$U\frac{\partial\chi}{\partial U} + V\frac{\partial\chi}{\partial V} + W\frac{\partial\chi}{\partial W} = 2\chi(U, V, W),$$

$$U_0\frac{\partial\chi}{\partial U} + V_0\frac{\partial\chi}{\partial V} + W_0\frac{\partial\chi}{\partial W} = U\frac{\partial\chi}{\partial U_0} + V\frac{\partial\chi}{\partial V_0} + W\frac{\partial\chi}{\partial W_0},$$

on voit immédiatement, en effet, que chacun des deux membres a pour valeur

$$\chi(U, V, W) - \chi(U_0, V_0, W_0).$$

Tenant compte de l'identité (7), la condition (4) de fin de choc s'écrit

$$(8) \qquad \int \nu W \, dt = 0$$

ou

$$(8') \qquad \int W \, dZ = 0.$$

Si l'on remarque que la dernière équation (5) est de la forme

$$\nu = l U' + m V' + n W',$$

l'équation (8) peut s'écrire

$$(9) \qquad \int (l \, dU + m \, dV + n \, dW) W = 0.$$

Dans le cas *exceptionnel* où l et m sont nuls, cette condition équivaut à

$$(10) \qquad 2 \int W \, dW = W^2 - W_0^2 = 0;$$

c'est la condition prise, sans justification, par certains auteurs. Si la trajectoire du point (U, V, W) est une droite, dU, dV, dW sont proportionnels et l'on obtient encore cette même condition (10); mais ces cas sont exceptionnels; dans le cas général, la condition (9) diffère de la condition (10). Il est intéressant de remarquer que cette condition (8) ou (9) exprime la fin du choc, qu'il y ait, ou non, changement de régime pendant le choc : elle est donc valable quand la durée du choc comporte deux périodes, l'une avec glissement, l'autre sans glissement.

L'établissement de la formule (8) peut se faire avec moins de calculs, mais d'une manière plus délicate, qui, cependant, montre mieux la raison de sa simplicité.

J'applique, en effet, le théorème de la force vive au système formé par les deux pellicules déformables pendant le choc, en remarquant que, les pellicules étant parfaitement élastiques, le travail des efforts intérieurs est nul pendant le choc. La force vive est nulle aussi, puisque la masse est négligeable; j'ai donc à écrire que le travail des forces extérieures est nul.

Le travail absorbé par le frottement au contact des pellicules est

$$\int (\lambda U + \mu V)\, dt.$$

Les actions du noyau de S sur la pellicule correspondante équivalent à la réaction $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, puisque la masse de la pellicule est négligeable. Les actions du noyau de S' sur la pellicule correspondante équivalent à la réaction λ, μ, ν. Ces deux forces étant directement opposées, leur travail est indépendant du système de référence : je le rapporte au noyau de S'.

Les réactions du noyau de S' sur la pellicule sont appliquées aux éléments périphériques, le long du noyau, qui peuvent être considérés comme invariablement liés au noyau, de sorte que leur travail est nul.

Les réactions du noyau de S sur la pellicule sont appliquées également à des éléments qui peuvent être considérés comme invariablement liés au noyau, donc formant un système invariable; le travail est égal au travail de la résultante appliquée à ce solide invariable, soit au noyau; il a donc pour valeur

$$-\int (\lambda U + \mu V + \nu W)\, dt.$$

En annulant la somme de ces deux travaux, on retrouve bien la condition (8).

Il me reste à montrer l'équivalence des deux conditions trouvées (1) et (8).

Je suppose, en effet, que la composante normale ν de la réaction soit fonction de la déformation, caractérisée par l'épaisseur α des pellicules,

$$\nu = f(\alpha).$$

Or, W est égal à $-\frac{d\alpha}{dt}$, de sorte que l'on a

$$\int \nu W\, dt = -\int f(\alpha)\, d\alpha.$$

Il s'agit donc de voir si les conditions

$$\int f(\alpha)\, d\alpha = 0, \qquad \int d\alpha = 0$$

sont équivalentes. $f(\alpha)$ étant une fonction décroissante de α, valant zéro quand α vaut α_0, il est manifeste que ces équations exigent, l'une comme l'autre, la condition

$$\alpha = \alpha_0,$$

ce qui établit l'équivalence annoncée.