P. L. SRIVASTAVA

Sur une classe de séries de Taylor et les fonctions entières associées

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 160-173

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__160_0>

SUR UNE CLASSE DE SÉRIES DE TAYLOR ET LES FONCTIONS ENTIÈRES ASSOCIÉES (¹);

PAR M. P. L. SRIVASTAVA
(Université d'Allahabad).

1. L'objet de ce travail est de montrer que, dans certains cas, on peut établir certaines relations réciproques entre la façon dont se conduit la fonction $f(z)$ représentée par la série de Taylor

$$(1_1) \qquad \sum_0^{\infty} c_n z^n,$$

et la façon dont se comporte asymptotiquement la fonction entière qui lui est associée, soit

$$(1_2) \qquad a(z) = \sum_0^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}.$$

Or, on sait que si la fonction entière (1_2) est d'ordre 1 et de type $k(k > 0)$, suivant la terminologie de M. Pringsheim, le rayon de convergence de la série de Taylor (1_1) est $\frac{1}{k}$, et réciproquement (²). Ce résultat m'a conduit à étudier la fonction $f(z)$ représentée par la série (1_1) dépendant de la fonction $a(z)$, sous conditions convenables en ce qui concerne la façon dont elle se comporte asymptotiquement, en même temps que le problème réciproque. Cette étude a abouti au théorème suivant, qui me semble nouveau et d'un caractère suffisamment général.

(¹) Ce qui suit est emprunté en substance à ma Thèse pour l'obtention du grade de docteur en philosophie de l'Université d'Oxford. Je suis profondément reconnaissant au professeur G. H. Hardy pour toute l'aide et les conseils que j'ai reçus de lui au cours de ces travaux.

(²) A. PRINGSHEIM, *Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* (*Mathematische Annalen*, t. 58, 1904).

Théorème. — *Supposons que, dans le plan des z, une courbe fermée* Γ *soit donnée par son équation polaire tangentielle*

$$(1_3) \qquad p = \lambda(\psi) \qquad (|\psi| \leqq \pi),$$

où $\lambda(\psi)$ est une fonction continue réelle de ψ, dont la valeur maximum est k. Supposons de plus que $\lambda'(\psi)$ et $\lambda''(\psi)$ sont continues,

$$\lambda(\pi) = \lambda(-\pi), \qquad \lambda'(\pi) = \lambda'(-\pi)$$

et que l'on ait soit

$$\lambda(\psi) + \lambda''(\psi) \equiv 0 \ (^1),$$

soit

$$\lambda(\psi) + \lambda''(\psi) > 0 \qquad \text{pour} \qquad |\psi| \leqq \pi.$$

Soit C *la courbe inverse de* Γ *(par rapport à l'origine) tournée d'un angle droit dans le sens direct. La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

soit une branche d'une fonction analytique, régulière et uniforme dans la région contenant l'origine et entourée par C, *et s'annule à l'infini quand* C *est une courbe finie fermée à laquelle l'origine est extérieure, et que cette courbe soit une ligne singulière* [2] *pour la fonction $f(z)$ est que la fonclion entière associée (1_2) satisfasse à l'égalité asymptotique*

$$(1_4) \qquad \limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log |a(\rho e^{i\psi})|}{\rho} = \lambda(\psi) \qquad (|\psi| \leqq \pi).$$

Les trois paragraphes qui suivent sont consacrés à démontrer ce théorème, et, dans le dernier, j'en mentionne quelques cas particuliers.

2. Je commencerai par démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction entière (1_2) est d'ordre 1 et de*

---

(1) Auquel cas Γ se réduisait à un cercle-point.

(2) Qui se réduisait à un point-cercle pour $\lambda(\psi) + \lambda''(\psi) \equiv 0$.

type k, et satisfait à l'inégalité

$$(2_1) \qquad |a(\rho e^{i\psi})| < e^{\rho[\lambda(\psi)+\varepsilon]}, \quad \text{avec} \quad |\psi| \leqq \pi$$
$$[\text{tous les } \varepsilon > 0 \text{ et } \rho \geqq \rho_0(\varepsilon)],$$

où $\lambda(\psi)$ vérifie les conditions posées au numéro précédent, alors

$$(2_2) \qquad f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

est une fonction analytique de z dans la région contenant l'origine et entourée par la courbe C qui touche extérieurement le cercle de convergence de la série (2_2) au moins une fois. De plus, si C est une courbe finie fermée à laquelle l'origine est extérieure, $f(z)$ s'annule à l'infini.

Commençons par obtenir une représentation géométrique de $\lambda(\psi)$. Posons

$$(2_3) \qquad x = \sin\psi\lambda(\psi) + \lambda'(\psi)\cos\psi,$$
$$(2_4) \qquad y = -\lambda(\psi)\cos\psi + \lambda'(\psi)\sin\psi.$$

x et y sont alors des fonctions continues de ψ, avec

$$x(\pi) = x(-\pi), \qquad y(\pi) = y(-\pi);$$

et

$$(2_5) \qquad \lambda(\psi) = x\sin\psi - y\cos\psi;$$

$$(2_6) \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang}\psi,$$

$$(2_7) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^3\psi}{\lambda(\psi) + \lambda''(\psi)}$$
$$[\text{à condition que } \lambda(\psi) + \lambda''(\psi) > 0].$$

Par conséquent, il s'ensuit que, quand on a

$$\lambda(\psi) + \lambda''(\psi) > 0.$$

il existe, dans le plan des (x, y) une courbe fermée Γ, dont l'équation cartésienne peut être prise sous la forme

$$(2_8) \qquad y = \mathrm{U}(x) \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{W}(y).$$

$\mathrm{U}'(x)$ est monotone pour $|\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$ et devient infini pour $|\psi| = \frac{\pi}{2}$, et $U''(x) \gtrless 0$ selon que $|\psi| \lessgtr \frac{\pi}{2}$. $W'(y)$ est continu excepté pour $\psi = 0$ et $\psi = \pi$. $W''(y)$ est négatif si $0 < \psi < \pi$, et positif si $-\pi < \psi < 0$.

L'équation polaire tangentielle de Γ est

$$p = \lambda(\psi) \qquad (|\psi| \leqq \pi), \tag{2_9}$$

où p est la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à Γ dont la direction positive fait un angle ψ avec la direction positive de l'axe des x. p est positif ou négatif suivant que le centre de courbure en un point P et l'origine sont du même côté ou de côtés différents de la tangente à P.

Considérons maintenant le cas où $\lambda(\psi) + \lambda''(\psi) \equiv 0$.

En différentiant (2_3) et (2_4) par rapport à ψ, on observe immédiatement que x et y sont des constantes, de sorte que la courbe Γ dont l'équation polaire tangentielle est (2_9) se réduit à un point-cercle. Mais ce point-cercle ne peut pas être situé à l'origine à moins que $k = 0$, cas que nous avons exclu *a priori*.

Désignons encore par C l'inverse de Γ (par rapport à l'origine) dans le plan des z ayant pivoté, d'un angle droit dans le sens direct.

Maintenant, nous sommes en mesure de démontrer le théorème énoncé au commencement de ce numéro.

Le cercle de convergence de la série (2_2) est $|z| = \frac{1}{k}$, de sorte que la fonction représentée par la série

$$\sum_0^\infty \frac{c_n}{s^{n+1}} \tag{2_{10}}$$

est une fonction analytique de s en dehors du cercle $|s| = k$, et s'annule à l'infini.

Supposons pour un instant que s soit réel et $> k$. On a alors la formule

$$J(s) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{s^{n+n}} = \int_0^\infty a(z) e^{-sz}\, dz, \tag{2_{11}}$$

où

$$a(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n z^n}{n!}.$$

Soit

$$(2_{12}) \qquad J(s, \psi) = \int_0^{\infty(\psi)} \varphi(z) e^{-sz}\, dz,$$

où l'intégrale est prise le long du rayon vecteur faisant un angle $\psi(|\psi| \leqq \pi)$ avec l'axe réel positif. En posant $z = \rho e^{i\psi}$ et $s = \mathrm{R}e^{i\theta}$, on a

$$(2_{13}) \qquad |\varphi(z) e^{-sz}| < e^{-\rho[\mathrm{R}\cos(\theta+\psi) - \lambda(\psi) - \varepsilon]} \qquad (\varepsilon > 0),$$

de sorte que $J(s, \psi)$ représente une fonction régulière de s dans le domaine D donné par

$$(2_{14}) \qquad \mathrm{R}\cos(\theta + \psi) \geqq \lambda(\psi) + \delta > \lambda(\psi).$$

Supposons maintenant que nous prenions deux valeurs de ψ, soient ψ' et ψ'', suffisamment proches l'une de l'autre. Les domaines $D(\psi')$ et $D(\psi'')$ auront alors une portion commune, et, pour un domaine de valeurs de s comprises dans cette portion, les expressions $J(s, \psi')$ et $J(s, \psi'')$ seront égales. Car

$$|\rho e^{i\psi} \varphi(\rho e^{i\psi}) e^{-\mathrm{R}\rho e^{i(\theta+\psi)}}| \to 0 \qquad \text{pour } \rho \to \infty.$$

Si s est dans la région

$$\mathrm{R}\cos(\theta + \psi) > k_1,$$

ψ variant de ψ' à ψ'' et k_1 étant la valeur maximum de $\lambda(\psi)$ dans l'intervalle $\psi' \leqq \psi \leqq \psi''$.

En conséquence du principe de prolongement analytique, les fonctions de $J(s, \psi')$ et de $J(s, \psi'')$ sont le prolongement analytique l'une de l'autre. Si l'on introduit maintenant un ensemble de valeurs de ψ suffisamment proches les unes des autres, et comprises entre $-\pi$ et π et si l'on compare deux à deux les expressions $J(s, \psi)$ correspondant à ces valeurs de ψ, on arrive à la conclusion que $J(s, \psi)$, où ψ peut avoir une valeur *quelconque* entre

---

(1) De deux points P et Q d'un même rayon vecteur issu de l'origine o, chacun est dit l'inverse de l'autre quand OP.OQ = 1.

$-\pi$ et $+\pi$, donne le prolongement analytique de la fonction $J(s)$ définie par (2_{11}).

Il s'ensuit, par conséquent, que la fonction $J(s)$ est régulière dans le domaine D obtenu en faisant varier ψ de $-\pi$ à π dans l'expression $D(\psi)$ donnée par (2_{11}). Il reste maintenant à démontrer que D est la région *extérieure* à l'enveloppe Σ de la famille de courbes

$$(2_{15}) \qquad R\cos(\theta+\psi) = \lambda(\psi) \qquad (|\psi| \leqq \pi).$$

En posant $R\cos\theta = \sigma$ et $R\sin\theta = t$, l'enveloppe de (2_{15}) est donnée par le moyen des équations

$$(2_{16}) \qquad \sigma\cos\psi - t\sin\psi = \lambda(\psi),$$
$$(2_{17}) \qquad -\sigma\sin\psi - t\cos\psi = \lambda'(\psi),$$

ce qui conduit immédiatement aux équations (2_3) et (2_4) avec x remplacé par $-t$ et y par $-\sigma$. Il s'ensuit, par conséquent, que la courbe Σ dans le plan des s peut se déduire de la courbe Γ dans le plan des x, y en substituant $-t$ à x et $-\sigma$ à y dans l'équation cartésienne de cette dernière courbe. On peut aussi suggérer une méthode mécanique pour obtenir Σ à partir de Γ. Superposons le plan des x, y à celui des s, les origines et les axes coïncidant. Tournons la courbe Γ d'un angle droit dans le sens rétrograde dans son propre plan, et faisons-la pivoter d'un angle π autour de la verticale passant par l'origine, alors Γ coïncidera avec Σ.

Il est également facile de démontrer que $J(s)$ est une fonction uniforme de s en dehors de Σ. Donc $J(s)$ est une fonction analytique de s en dehors de Σ, et s'annule à l'infini.

La courbe Σ est entièrement à l'intérieur du cercle $|s| = k$, qu'elle touche au moins une fois. De même, si l'origine est extérieure à Σ, et si

$$J_1(s) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{s^n},$$

alors $J_1(0) = 0$; puisque $J(s) = \frac{J_1(s)}{s}$, et $J(s)$ est régulier à l'origine.

Or, en effectuant la transformation $z = \frac{1}{s}$, on verra que Σ se transforme (¹) en la courbe C, et l'on a le résultat du théorème énoncé ci-dessus.

3. Ensuite, nous allons établir la proposition réciproque. *C'est-à-dire que nous allons supposer que $f(z)$ est une branche d'une fonction analytique, univoque et régulière dans la région contenant l'origine et entourée par une courbe* C (*mais non pas dans une région quelconque plus étendue de même nature*), *dont la courbe inverse tournée d'un angle droit dans le sens rétrograde a comme équation* $p = \lambda(\psi)$, $(|\psi| \leqq \pi)$ où $\lambda(\psi)$ *vérifie les conditions mentionnées au paragraphe* 1. *De même* $f(\infty) = 0$, *si* C *est une courbe fermée finie à laquelle l'origine est extérieure. Dans ces conditions nous allons montrer qu'il existe une série de Taylor* $\sum_0^\infty c_n z^n$ *qui représente* $f(z)$ *dans le voisinage de l'origine et qui est telle que la fonction entière associée*

$$(3_1) \qquad a(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n z^n}{n!}$$

vérifie l'inégalité

$$(3_2) \qquad |a(\rho e^{i\psi})| < e^{\rho[\lambda(\psi)+\varepsilon]} \quad \text{pour } |\psi| \leqq \pi$$
$$[\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \rho \geqq \rho_0(\varepsilon)].$$

En effectuant la transformation $z = \frac{1}{s}$, on a la fonction

$$J_1(s) \equiv f\left(\frac{1}{s}\right)$$

régulière et uniforme en dehors d'une courbe fermée Σ qui dérive de la courbe Γ $[p = \lambda(\psi), |\psi| \leqq \pi]$ d'une façon spéciale. Σ touche intérieurement le cercle $|s| = k$ au moins une fois et est entière-

---

(¹) Pour bien comprendre ceci, dessinons Γ, Σ et C sur un même plan, à savoir le plan des z. Alors un point P de Γ dont les coordonnées polaires sont (ρ, ψ) se transforme en un point $P_1\left(\rho, -\frac{\pi}{2} - \psi\right)$ de Σ, lequel se transforme en un point $P_2\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\pi}{2} + \psi\right)$ de C. Donc P_2 est l'inverse de P que l'on a fait pivoter d'un angle droit dans le sens direct.

ment comprise dans ce cercle. $J_1(o) = o$ si l'origine est extérieure à la courbe Σ.

Le théorème de Laurent donne

$$(3_3) \qquad J_1(s) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{s^n},$$

la série convergeant uniformément en dehors du cercle $|s| = k$.

Or on obtient par le théorème de Cauchy

$$(3_4) \qquad \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{uz}\,du}{u^{n+1}},$$

le contour d'intégration étant un cercle autour de l'origine.

En multipliant les deux membres de (3_4) par c_n, et intégrant sous le signe $\int$ depuis o jusqu'à l'infini, on a

$$(3_5) \qquad a(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{uz}}{u} J_1(u)\,du,$$

à condition de supposer que le contour d'intégration est

$$|s| = k + \delta > k.$$

Mais il est clair à présent que le contour d'intégration de (3_5) peut être remplacé par toute courbe fermée du plan des u pour laquelle $J(u) \equiv \frac{J_1(u)}{u}$ est une fonction analytique de u. Or $J_1(u)$ est une fonction analytique de u en dehors de Σ dans le plan des u et s'annule à l'origine si cette dernière est extérieure à Σ. Donc $J(u)$ est une fonction analytique de u en dehors de Σ. On peut, par conséquent, choisir une courbe fermée Σ' parallèle à Σ et en dehors de celle-ci à une petite distance arbitraire ε et la prendre comme contour d'intégration de sorte que l'on ait

$$(3_6) \qquad a(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma'} e^{uz} J(u)\,du.$$

Il est évident que $a(z)$ est une fonction entière de z et il nous faut chercher à obtenir une limite supérieure de $|a(\rho e^{i\psi})|$.

Posons

$$u = -(y + ix) \qquad \text{et} \qquad z = \rho e^{i\psi} = \varepsilon + i\eta.$$

Alors le contour d'intégration, soit Γ', dans le plan des xy, a comme équation

$$(3_7) \quad p = \lambda(\theta) + \varepsilon \equiv \lambda_1(\theta) \text{ (1)} \qquad \text{(dans la forme polaire tangentielle),}$$

ou

$$y = U_1(x) \quad \text{ou} \quad x = W_1(y) \qquad \text{(dans la forme cartésienne),}$$

où θ est l'angle que la tangente à la courbe fait avec le sens positif de l'axe des x. $U_1'(x)$ est univoque pour $|\theta| \gtrless \frac{\pi}{2}$ et $U_1''(x) \gtrless 0$ suivant que $|\theta| \lessgtr \frac{\pi}{2}$.

$W_1'(y)$ est continue pour $0 < |\theta| < \pi$, et $W_1''(y) \leqq 0$ suivant que $0 < \theta < \pi$ ou que $-\pi < \theta < 0$ (2).

Désignons par $M(\varepsilon)$ la valeur maximum de $\left|\frac{J(u)}{2\pi}\right|$ sur Γ'.

De même

$$\left|\frac{du}{dy}\right| = |\text{séc}\,\theta|, \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{du}{dy}\right| = |\text{cosséc}\,\theta|.$$

Par conséquent

$$(3_8) \qquad |a(\rho e^{i\psi})| \leqq M(\varepsilon) \int e^{(x\eta - y\varepsilon)} |\text{séc}\,\theta|\, dx,$$

ou

$$\leqq M(\varepsilon) \int e^{(x\eta - y\varepsilon)} |\text{cosséc}\,\theta|\, dy.$$

Il s'ensuit que la valeur maximum de $|a(z)|$ dépend de celle de $e^{(x\eta - y\varepsilon)}$ sur le chemin d'intégration.

Dans un intervalle de valeurs de y pour lequel $U_1'(x)$ est continue,

$$F(x) \equiv x\eta - U_1(x)\varepsilon$$

est maximum quand

$$(3_9) \qquad U_1'(x) = \text{tang}\,\theta = \text{tang}\,\psi;$$

car alors $F''(x) < 0$.

De même, dans un intervalle de valeurs de y dans lequel

---

(1) Ceci représentera un cercle de rayon ε quand $\lambda(\theta) + \lambda''(\theta) \equiv 0$.

(2) Ces propriétés de la courbe Γ' dérivent de celles de Γ discutées au paragraphe 2.

$W'_1(y)$ est continue,

$$C(y) \equiv W_1(y)\eta - y\varepsilon$$

est maximum quand

$$(3_{10}) \qquad W'_1(y) = \cot\theta = \theta = \cot\psi;$$

car alors $C''(y) < 0$.

Il s'ensuit donc que, si ρ et ψ sont donnés, la valeur maxima de l'expression $(x\eta - y\varepsilon)$ sur le chemin d'intégration s'obtient en posant θ égal à ψ.

Comme un point (x, y) du chemin d'intégration vérifie les équations

$$(3_{11}) \qquad \begin{cases} x = \quad \lambda_1(\theta)\sin\theta + \lambda'_1(\theta)\cos\theta, \\ y = -\lambda_1(\theta)\cos\theta + \lambda'_1(\theta)\sin\theta, \end{cases}$$

on a comme valeur maximum

$$(x\eta - y\varepsilon) = \rho\lambda_1(\psi) = \rho[\lambda(\psi) + \varepsilon].$$

Donc l'inégalité (3_8) peut être remplacée par

$$(3_{12}) \qquad |a(\rho e^{i\psi})| < e^{\rho[\lambda(\psi)+\varepsilon]} \qquad \text{pour } |\psi| \leqq \pi,\ \varepsilon' > 0 \text{ et } \rho \geqq \rho_0(\varepsilon').$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

4. Dans ce numéro, je démontre le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point P *de* Σ *dans le plan des s soit un point singulier de*

$$J_1(s) \equiv f\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{s^n}$$

est que

$$(4_1) \qquad \lambda(\psi) = \limsup_{\rho\to\infty} \frac{\log|a(\rho e^{i\psi})|}{\rho}$$

pour la valeur correspondante de ψ, *avec*

$$a(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n z^n}{n!}.$$

Ici, deux cas sont à considérer :

I. Supposons que Σ ne se réduise pas à un seul point.

D'abord on montrera que la condition (4_1) est suffisante. L'équation cartésienne de Σ dans le plan des s est

$$(4_2) \qquad \sigma = -U(-t) = V(t).$$

Maintenant prenons un point $P(\sigma, t)$ sur Σ tel qu'il existe un intervalle $t_2 \leqq t \leqq t_1$ dans lequel $V'(t)$ est continu. Alors, on a, à partir des calculs faits au numéro précédent,

$$(4_3) \qquad \lambda(\psi) = V(t)\cos\psi - t\sin\psi.$$

Il reste maintenant à montrer que si l'expression (4_1) est vraie, P est un point singulier de $J_1(s)$. Supposons, si c'est possible, que P est un point ordinaire de $J_1(s)$. On peut alors choisir $(t_1 - t_2)$ assez petit pour que $J_1(s)$ soit régulier en dehors de la corde

$$(4_4) \qquad \sigma = \overline{V}(t), \qquad (t_2 \leqq t \leqq t_1),$$

où

$$\overline{V}(t)(t_1 - t_2) = V(t_1)(t - t_2) + V(t_2)(t_1 - t).$$

Or $\overline{V}(t) \geqq V(t)$, pour $t_2 < t < t_1$, selon que l'ensemble correspondant de valeurs de ψ n'est pas compris ou est compris dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ (¹), de sorte que le résultat de la substitution de $\overline{V}(t)$ en place de $V(t)$ dans (4_3) signifie une diminution de $\lambda(\psi)$, ce qui est contraire à l'hypothèse (²). Donc P est un point singulier de $J_1(s)$.

De la même façon, on peut établir le résultat cherché si P est dans un intervalle de valeurs de σ dans lequel $\frac{dt}{d\sigma}$ est continu.

(¹) Si le point (x, y) de Γ (discuté au paragraphe 2) correspond à P sur Σ, alors $x = -t$, $y = -\sigma$, $\frac{dy}{dx} = \frac{d\sigma}{dt}$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2\sigma}{dt^2}$. Donc $V''(t) \gtrless 0$ selon que la valeur correspondante de ψ est telle que $|\psi| \lessgtr \frac{\pi}{2}$.

(²) Car (4_1) implique deux inégalités :

$$(a) \qquad |a(\rho e^{i\psi})| < e^{\rho[\lambda(\psi)+\varepsilon]},$$

pour tous les $\varepsilon > 0$ et $\rho \geqq \rho_0(\varepsilon)$,

$$(b) \qquad |a(\rho e^{i\psi})| > e^{\rho[\lambda(\psi)-\varepsilon]},$$

pour une suite correspondante de valeurs dont la limite est infinie.

En second lieu, nous allons montrer que la condition (4_1) est nécessaire. Au numéro précédent, on a démontré que

$$(4_5) \qquad \limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log |a(\rho e^{i\psi})|}{\rho} \leqq \lambda(\psi), \qquad (|\psi| \leqq \pi).$$

Il s'agit ici de démontrer que si P est un point singulier, alors l'inégalité est inadmissible pour la valeur correspondante de ψ. Supposons, si possible, qu'il en soit autrement. On peut alors montrer, en suivant la méthode du paragraphe 2, que P est dans une région de régularité de $J_1(s)$, ce qui est impossible.

II. Supposons que Σ se réduise à un point (différent de l'origine). Soit (a, b) ce point. En ce cas, $\lambda(\psi) = a\cos\psi - b\sin\psi$, où a et b ne peuvent être simultanément nuls.

Or, si la relation (4_1) est vraie, il faut démontrer que le point (a, b) est un point singulier de $J_1(s)$. Supposons, si possible, qu'il en est autrement. Alors, en raison du théorème de Liouville, $J_1(s)$ se réduira à une constante, qui, dans ce cas, doit être nulle, puisque $J_1(s) = 0$. Cela signifie que tous les coefficients de la série $\sum_0^\infty \frac{c_n}{s^n}$ sont nuls, de sorte que la fonction entière $a(z) \equiv 0$, ce qui est absurde en raison de l'égalité (4_1). Donc le point (a, b) est un point singulier de $J_1(s)$, ce qui établit que la condition (4_1) est suffisante.

La démonstration de la deuxième partie du théorème est la même que dans le cas I.

En combinant maintenant les résultats de ce numéro avec ceux établis dans les deux numéros précédents, on obtient le théorème énoncé au paragraphe 1.

5. Finalement, je vais mentionner quelques résultats particuliers que l'on peut facilement faire dériver du théorème du paragraphe 1.

I. *La condition nécessaire et suffisante pour que le cercle de convergence de la série*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n,$$

$|z| = \frac{1}{k}$, *où k est fini, soit une ligne singulière pour la fonction $f(z)$, est que la fonction entière associée* $a(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n z^n}{n!}$ *vérifie l'égalité asymptotique*

$$\limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log |a(\rho e^{i\psi})|}{\rho} = k, \qquad (|\psi| \leqq \pi).$$

Ce résultat figure implicitement dans le Mémoire de M. Borel : *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure* (1).

II (2). *La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

soit une fonction entière de $\frac{1}{1-z}$ *sans terme constant est que la fonction entière*

$$a(z) = \sum_0^\infty \frac{c_n z^n}{n!}$$

vérifie l'égalité asymptotique

$$\limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log |a(\rho e^{i\psi})|}{\rho} = \cos\psi \qquad (|\psi| \leqq \pi).$$

III. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

soit régulière et uniforme dans la région extérieure à un cercle de rayon α *tracé autour du point* $z = \sqrt{1+\alpha^2}$ *s'annule à l'infini, et que le cercle soit une courbe singulière, est que la*

---

(1) *Journal de Liouville*, t. 2, 1896.

(2) Comparer ce théorème avec le théorème bien connu de Wigert, que l'on trouvera dans un travail de M. G. H. Hardy « Sur deux théorèmes de MM. F. Carlson et S. Wigert » (*Acta mathematica*, t. 42, p. 332).

fonction entière

$$a(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}$$

vérifie l'égalité asymptotique

$$\limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log |a(\rho e^{i\psi})|}{\rho} = \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2} \cos\psi \qquad (|\psi| \leqq \pi).$$

IV. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_n z^n$$

soit régulière et uniforme dans le demi-plan $R(z) < 1$ *comprenant l'infini, et pour que* $R(z) = 1$ *soit une courbe singulière est que la fonction entière*

$$a(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{c_n z^n}{n!}$$

vérifie l'égalité asymptotique

$$\limsup_{\rho \to \infty} \frac{\log |a(\rho e^{i\psi})|}{\rho} = \frac{1}{2}(1 + \cos\psi) \qquad (|\psi| \leqq \pi).$$

Les résultats ci-dessus suggèrent que, en supposant l'existence d'une série de Taylor dont le cercle de convergence est une courbe singulière, on peut construire une autre série de Taylor pour laquelle la ligne $R(z) = 1$, où le cercle de rayon α autour du point $z = \sqrt{1 + \alpha^2}$ soit une ligne singulière.