BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LEVY

Sur les transformations corrélatives

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 174-177
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__174_0>

SUR LES TRANSFORMATIONS CORRÉLATIVES;

Par M. Paul Lévy.

L'objet de cette Note est de corriger une erreur que j'ai commise dans mon Mémoire précédemment publié dans ce volume, lorsqu'à la fin de ce Mémoire (p. 48-49), j'ai voulu étendre au cas de l'espace les résultats obtenus d'abord pour le plan. Cette erreur m'a été signalée par M. L. Godeaux, qui m'a en même temps communiqué les intéressants résultats que je citerai ci-dessous.

Comme dans mon Mémoire cité, T désignant une corrélation, je désignerai par S la quadrique lieu des points situés sur les plans qui leur correspondent, et par S′ la quadrique transformée, enveloppe des plans en question. Considérant d'abord le cas particulier de la transformation T′, produit d'une transformation par polaires réciproques par rapport à une sphère Σ et d'une rotation autour d'un diamètre PP′ de Σ, j'avais écrit que dans ce cas S et S′ sont deux sphères concentriques, et, dans le cas général, deux quadriques circonscrites l'une à l'autre.

Il est facile de voir qu'au contraire, dans le cas particulier indiqué, S et S′ sont deux ellipsoïdes de révolution d'axe commun P, P′, se coupant donc suivant 4 droites isotropes situées dans leurs plans tangents communs en P et P′. Au point de vue projectif, ce sont des quadriques ayant 4 droites communes, à cela près quelconques. Mais les transformations équivalentes à T′ au point de vue projectif ne dépendent que de 14 paramètres, et ne constituent pas la corrélation la plus générale. Nous allons voir que le résultat est général : *les quadriques* S *et* S′ *ont toujours une intersection uniquement composée de droites.*

Désignant par x_0, x_1, x_2, x_3 les coordonnées homogènes d'un point, par u_0, u_1, u_2, u_3 celles d'un plan, et mettant des grandes lettres pour la figure transformée, considérons la corrélation T défini par les formules

$$(1)\qquad U_0 = a_0 x_2,\qquad U_1 = a_1 x_3,\qquad U_2 = a_2 x_0,\qquad U_3 = a_3 x_1,$$

ou bien par les formules équivalentes

$$(1\ bis)\qquad X_0 = \frac{u_2}{a_0},\qquad X_1 = \frac{u_3}{a_1},\qquad X_2 = \frac{u_0}{a_2},\qquad X_3 = \frac{u_1}{a_3}.$$

La transformation T^2 est alors définie par les formules

$$(2)\qquad X'_0 = \frac{a_2}{a_0}x_0,\qquad X'_1 = \frac{a_3}{a_1}x_1,\qquad X'_2 = \frac{a_0}{a_2}x_2,\qquad X'_3 = \frac{a_1}{a_3}x_3.$$

Ses 4 coefficients étant en général différents, elle a en général comme seuls points unis les sommets du trièdre de référence (le fait que T'^2 admette comme points unis tous ceux de $P l^{\prime}$ montre bien le caractère particulier de la transformation T' considérée d'abord).

De cette remarque résulte que T est la corrélation la plus générale, des cas particuliers pouvant seuls être laissés de côté; nous avons bien en effet 15 paramètres, les 12 coordonnées des sommets du tétraèdre de référence, et les valeurs relatives de a_0, a_1, a_2, a_3; on ne risque d'ailleurs pas de retrouver la même transformation avec un autre tétraèdre de référence, puisque ses sommets sont bien définis comme étant les points unis de T^2. Les 15 paramètres sont bien essentiels.

Au point de vue des invariants projectifs, il en existe deux : $\frac{a_2}{a_0}$ et $\frac{a_3}{a_1}$. Leurs caractères d'invariants résultent bien des formules (2); ainsi $\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2$ est le rapport des valeurs de $\frac{x_0}{x_2}$ relatives à un point et son transformé par T^2. D'autre part le changement de x_0 en kx_0 multiplie par un facteur commun a_0 et a_2, sans changer a_1 et a_3; $\frac{a_1}{a_0}$ n'est donc pas un invariant.

La transformation T^2, ne dépendant que des deux invariants $\frac{a_2}{a_0}$ et $\frac{a_3}{a_1}$, mais non de $\frac{a_1}{a_3}$, n'est pas l'homographie la plus générale. L'homographie la plus générale étant du type

$$X'_i = c_i x_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

les homographies du type T^2 sont caractérisées par la condition

$$(3)\qquad c_0 c_2 = c_1 c_3,$$

qui, géométriquement, exprime l'invariance de chacune des quadriques du faisceau

$$x_0 x_2 + \lambda x_1 x_3 = 0, \tag{4}$$

tandis que la transformation T, conservant l'ensemble du faisceau, établit entre les valeurs de λ correspondant à deux quadriques transformées l'une de l'autre la relation

$$\lambda\lambda' = \frac{a_1 a_3}{a_0 a_2}. \tag{5}$$

Au point de vue des quadriques S et S′, on voit immédiatement qu'elles ont pour équations, respectivement

$$(a_0 + a_2) x_0 x_2 + (a_1 + a_3) x_1 x_3 = 0,$$

et

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}\right) x_0 x_2 + \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_2}\right) x_1 x_3 = 0.$$

Ce sont deux quadriques du faisceau (3), correspondant aux valeurs

$$\lambda = \frac{a_1 + a_3}{a_0 + a_2}, \qquad \lambda' = \frac{a_0 + a_2}{a_1 + a_3} \frac{a_1 a_3}{a_0 a_2}, \tag{6}$$

qui vérifient bien la relation (5).

Ces deux quadriques ont bien 4 droites communes, intersection de $x_0 x_2 = 0$ et $x_1 x_3 = 0$. La donnée de ces quadriques ne suffit d'ailleurs pas à définir la transformation T, puisque des deux équations (6) on ne peut déduire les valeurs relatives de a_0, a_1, a_2, a_3. Au point de vue des invariants, elles donnent seulement, entre

$$k = \frac{a_2}{a_0} \qquad \text{et} \qquad l = \frac{a_3}{a_1},$$

la relation

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{k + \frac{1}{k} + 2}{l + \frac{1}{l} + 2}; \tag{7}$$

$\lambda\lambda'$ n'étant pas un invariant servira à déterminer $\frac{a_1}{a_0}$ une fois k et l connus; mais un de ces nombres peut être choisi arbitrairement, l'autre résultant ensuite de la formule (7).

La nature de l'intersection des quadriques S et S′ m'a été indiquée par M. L. Godeaux, dans la lettre mentionnée au début de cette Note. Il y est arrivé par un raisonnement géométrique très simple, reposant sur la remarque que, à chaque génératrice de S, T^2 fait correspondre une génératrice du même système (l'hypothèse inverse est en effet facile à écarter). On a alors en général 4 génératrices distinctes (2 de chaque système), invariantes par T^2. On voit ensuite aisément que ces 4 droites appartiennent à S'.

On remarque que les 4 points unis de T^2 appartiennent à l'intersection de S et S' (l'exemple de la transformation T' définie au début de cette Note montre d'ailleurs que s'il y a une droite de points unis de T^2, deux points seulement de cette droite appartiennent à S et S'). Dans le cas du plan, au contraire, des 3 points unis de T^2, 2 seulement appartiennent à S et S'. M. Godeaux m'a indiqué que l'on peut généraliser ces résultats : dans le cas des espaces à un nombre impair de dimensions, tous les points unis de T^2 appartiennent en général à l'intersection de S et S'; si au contraire le nombre de dimensions est pair, il y a en général exception pour un de ces points.