BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LEVY

Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 178-194
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__178_0>

SUR LES LOIS DE PROBABILITÉ DONT DÉPENDENT LES QUOTIENTS COMPLETS ET INCOMPLETS D'UNE FRACTION CONTINUE [1];

PAR M. PAUL LÉVY.

1. *Notations et formules préliminaires.* — Soit un nombre X, dont le développement en fraction continue est défini par les formules bien connues

$$(1)\quad X = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}, \qquad \ldots,$$

a_n représentant le plus grand entier compris dans x_n. La relation entre X et x_n est de la forme

$$(2)\qquad X = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n x_n + Q_{n-1}},$$

les coefficients P_n et Q_n vérifiant les relations

$$(3)\qquad P_{n+1} = P_n a_n + P_{n-1}, \qquad Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1},$$

$$(4)\qquad P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1} = (-1)^n,$$

d'où l'on déduit

$$(5)\qquad \left|\frac{dX}{dx_n}\right| = \frac{1}{(Q_n x_n + Q_{n-1})^2}.$$

Le problème que nous nous proposons est l'étude de la loi de probabilité à laquelle obéit x_n, lorsque X est choisi au hasard. La valeur de $X - a_0$ intervenant seule, on peut supposer $a_0 = 0$;

---

[1] Les principaux résultats du présent travail ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 10 mars 1930. J'ai appris depuis, par une lettre de M. G. Pólya, que le résultat fondamental, exprimé par la formule (35) du n° 4, a été indiqué sans démonstration dans une lettre de Gauss à Laplace, et qu'au sixième Congrès international des Mathématiciens (Bologne, septembre 1928), M. Kuzmin a indiqué la démonstration de cette formule. Cette démonstration n'ayant pas encore été publiée, je ne puis encore la comparer à celle donnée dans le présent travail.

X est alors choisi au hasard entre o et 1; nous entendons par là d'une manière précise qu'à chaque intervalle dX correspond une probabilité égale à sa longueur. La probabilité que x_n soit dans un intervalle $(x, x+dx)$ est alors la somme des longueurs des intervalles dX qui correspondent à dx, en donnant à Q_{n-1} et Q_n (qui sont des fonctions déterminées des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$) tous les systèmes de valeurs possibles. On a ainsi pour cette probabilité

$$f_n(x)\,dx = \sum \frac{dx}{(Q_n x + Q_{n-1})^2} \qquad (x > 1). \tag{6}$$

La probabilité que $x_n > x$ est alors

$$1 - F_n(x) = \int_x^\infty f_n(x)\,dx = \sum \frac{1}{Q_n(Q_n x + Q_{n-1})}, \tag{7}$$

tandis que la probabilité d'une valeur donnée p de a_n est

$$\begin{aligned} \alpha_n(p) = \int_p^{p+1} f_n(x)\,dx &= F_n(p+1) - F_n(p) \\ &= \sum \frac{1}{(Q_n p + Q_{n-1})[Q_n(p+1) + Q_{n-1}]}. \end{aligned} \tag{8}$$

Comme les x_n sont supérieurs à l'unité, x ne peut varier dans ces formules que de 1 à l'infini. Alors $F_n(1) = 0$, c'est-à-dire

$$\sum \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})} = 1, \tag{9}$$

chaque terme de cette somme correspondant à la probabilité d'un système de valeurs de Q_{n-1} et Q_n, ou, ce qui revient au même, de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Si nous posons

$$\frac{Q_{n+1}}{Q_n} = y_n,$$

la seconde relation (3) donne

$$y_n = a_n + \frac{1}{y_{n-1}}, \tag{10}$$

relation de récurrence analogue à celle qui existe entre les x_n, à cela près que la relation qui fait passer de x_n à x_{n+1} est identique à celle qui fait passer de y_n à y_{n-1} (et non y_{n+1}). Elle montre que, si l'on développe y_n en fraction continue, les quotients incomplets sont a_n, a_{n-1}, ..., a_1, les quotients complets étant y_{n-1}, y_{n-2}, ..., $y_1 = a_1$; les systèmes de valeurs possibles pour Q_n et Q_{n+1} sont donc tous les systèmes de deux entiers positifs, premiers entre eux, tels que le rapport y_n soit supérieur à l'unité et ait un développement en fraction continue comprenant n quotients incomplets. C'est à tous les systèmes vérifiant ces conditions que s'étend la sommation considérée dans les formules (6) à (9).

2. *Les fonctions* $F_1(x)$ *et* $F_2(x)$. — Pour les faibles valeurs de l'indice n, les lois de probabilité considérées sont faciles à définir. Pour $n = 1$, Q_0 et Q_1 n'ont qu'un système de valeurs possibles $(0, 1)$. On a évidemment

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad F_1(x) = 1 - \frac{1}{x}, \qquad \alpha_1(p) = \frac{1}{p(p+1)}. \tag{11}$$

Pour $n = 2$, $Q_1 = 1$, tandis que Q_2 est un entier arbitraire. Il vient donc

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(px+1)^2} + \ldots \\ &= \frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{x}+2\right)^2} + \ldots + \frac{1}{\left(\frac{1}{x}+p\right)^2} + \ldots\right], \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en désignant par $\gamma(t)$ le logarithme de la fonction eulérienne $\Gamma(t)$,

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2}\,\gamma''\left(1 + \frac{1}{x}\right), \tag{12}$$

et par suite

$$\left\{\begin{aligned} 1 - F_2(x) &= \gamma'\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \gamma'(1), \\ \alpha_2(p) &= \gamma'\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \gamma'\left(1 + \frac{1}{p+1}\right). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

On peut de même étudier successivement $F_3(x)$, ..., mais les séries de fractions rationnelles qu'on est conduit à écrire sont de plus en plus compliquées [1]. Notre but est d'effectuer l'étude

[1] *Cf.* E. Borel, Chapitre III du Mémoire sur « les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques » (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 28, 1909, p. 247-271).

asymptotique des lois ainsi considérées lorsque n augmente indéfiniment.

3. *Formules de récurrence.* — Cette étude repose sur quelques formules de récurrence simples. De la formule

$$(1') \qquad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}},$$

résulte que la probabilité d'une valeur x_{n+1} est la somme des probabilités des valeurs x_n qui lui correspondent, en prenant successivement pour a_n tous les entiers positifs. En considérant successivement la probabilité relative à un intervalle élémentaire $(x, x+dx)$ et la probabilité relative à l'intervalle (x, ∞), on obtient ainsi les formules

$$(14) \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{x^2}\left[f_n\left(1+\frac{1}{x}\right)+f_n\left(2+\frac{1}{x}\right)+\ldots+f_n\left(p+\frac{1}{x}\right)+\ldots\right],$$

$$(15) \qquad 1-F_{n+1}(x) = \left[F_n\left(1+\frac{1}{x}\right)-F_n(1)\right]+\ldots$$
$$+\left[F_n\left(p+\frac{1}{x}\right)-F_n(p)\right]+\ldots,$$

qui définissent $f_{n+1}(x)$ et $F_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et $F_n(x)$, mais ne permettent évidemment pas de résoudre le problème inverse (1).

Introduisons d'autre part les probabilités des différentes valeurs possibles de y_n. Les valeurs rationnelles sont seules possibles; étant donné un nombre rationnel y supérieur à l'unité, il est possible pour une valeur bien déterminée $n(y)$ de l'indice n, qui est le nombre de quotients définissant son développement en fraction continue, et a alors une probabilité que nous désignerons par $\beta_n(y)$ ou plus simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté, par $\beta(y)$. Pour une valeur déterminée de n, nous désignerons par $G_n(y)$, si n est impair, la somme des probabilités des valeurs de y_n inférieures

(1) La convergence de la série (15) est évidente *a priori;* pour la série (14), elle résulte de ce que $f_n(x)$ est pour x infini de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{x^2}$; cela se déduit aisément de la formule (6), ou de la formule (14) elle-même, en raisonnant par récurrence, ou plus simplement encore de la formule (21) ci-après.

à y, et, si n est pair, cette somme augmentée de la probabilité de y [1]. Il importe de remarquer que, les valeurs entières de y correspondant à $n = 1$, si $n > 1$, la fonction $G_n(y)$ est continue pour ces valeurs.

D'après la formule (10), la probabilité d'une valeur possible y_{n-1} est la somme des probabilités des valeurs possibles de y_n. On a donc

$$(16) \qquad \beta_{n-1}(y) = \beta_n\left(1 + \frac{1}{y}\right) + \beta_n\left(2 + \frac{1}{y}\right) + \ldots + \beta_n\left(p + \frac{1}{y}\right) + \ldots,$$

$$(17) \qquad 1 - G_{n-1}(y) = \left[G_n\left(1 + \frac{1}{y}\right) - G_n(1)\right] + \ldots + \left[G_n\left(p + \frac{1}{y}\right) - G_n(p)\right] + \ldots,$$

formules dont on remarque l'analogie avec les formules (14) et (15). Toutefois il importe de noter deux différences essentielles : d'une part il s'agissait tout à l'heure de probabilités continues; il s'agit maintenant de probabilités discontinues. D'autre part, connaissant la loi de probabilité définie par les $\beta_n(y)$ ou par la fonction $G_n(y)$, ces formules définissent parfaitement la loi précédente, mais non la suivante; elles ne peuvent pas servir à déterminer de proche en proche toutes les fonctions $G_n(y)$ en partant de la première.

Il n'est pas facile de faire reposer sur les formules (14) à (17) l'étude asymptotique des lois considérées. Nous allons indiquer d'autres formules qui rendront au contraire cette étude très facile. Tout d'abord, x_n et y_n ayant même partie entière a_n, on a, pour tout entier p,

$$(18) \qquad F_n(p) = G_n(p).$$

D'autre part, pour une valeur donnée $\frac{q}{q'}$ de y (q et q' étant premiers entre eux et $q \geqq q'$), la probabilité $\beta(y)$ s'obtient immédiatement, sans même qu'il soit nécessaire de connaître la valeur correspondante de n. Nous avons observé en effet que chaque terme de la formule (9) représente la probabilité d'un système de valeurs

---

[1] On peut aussi dans la définition de $G_n(y)$ tenir compte seulement de la moitié de la probabilité de y, et cela quel que soit n. Sauf la formule (18), qui ne serait vraie que pour $n > 1$, rien ne serait changé dans la suite.

de Q_n et Q_{n-1}, c'est-à-dire que

$$(19)\qquad \beta\left(\frac{q}{q'}\right)=\int_1^\infty \frac{dx}{(qx+q')^2}=\frac{1}{q(q+q')}.$$

La formule (7) s'écrit alors

$$1-F_n(x)=\sum \beta\left(\frac{Q_n}{Q_{n-1}}\right)\frac{\frac{Q_n}{Q_{n-1}}+1}{\frac{Q_n}{Q_{n-1}}x+1}=\sum \beta_{n-1}(y)\frac{y+1}{xy+1},$$

ou, sous forme d'intégrale de Stieltjes,

$$(20)\qquad 1-F_n(x)=\int_1^\infty \frac{y+1}{xy+1}\,dG_{n-1}(y).$$

De même, les formules (6) et (8) prennent la forme

$$(21)\qquad f_n(x)=\int_1^\infty \frac{y(y+1)}{(xy+1)^2}\,dG_{n-1}(y),$$

$$(22)\qquad \alpha_n(p)=\int_1^\infty \frac{y(y+1)}{(py+1)[(p+1)y+1]}\,dG_{n-1}(y).$$

Cet aspect des formules (6) à (8) résulte d'ailleurs bien simplement de la formule connue qui donne la probabilité d'un effet pouvant résulter de diverses causes. En effet, d'après (5), les expressions

$$(23)\qquad \frac{y+1}{xy+1},\qquad \frac{y(y+1)}{(xy+1)^2}\,dx,$$

$$(24)\qquad \frac{y(y+1)}{(py+1)[(p+1)y+1]}$$

représentent respectivement les probabilités *a posteriori* d'un intervalle (x,∞), ou $(x, x+dx)$, ou $(p, p+1)$, lorsque la valeur y de y_{n-1} est donnée [1]; la probabilité totale que x_n soit dans l'un ou l'autre de ces intervalles en résulte immédiatement, et l'on retrouve les formules (20) à (22).

---

[1] Il y a lieu de rappeler que cette donnée équivaut à celle de $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. La probabilité (24) est donc celle de l'égalité $a_{n+1}=p$, évaluée au moment de l'expérience, si l'on considère $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ comme devant être successivement choisis au hasard, dans des conditions qui équivaillent au choix arbitraire de X entre 0 et 1, chaque intervalle ayant une probabilité égale à sa longueur.

Ces formules définissent parfaitement la loi de probabilité de x_n, lorsque l'on connaît celle de y_{n-1}. Pour obtenir celle de y_n, qui a même partie entière que x_n, il reste à déterminer la probabilité d'un intervalle $(p,\ p+\eta)$, p étant entier et η compris entre o et 1. Chaque valeur possible

$$y_n = p + \frac{1}{y_{n-1}} = p + \frac{1}{y},$$

ayant pour probabilité, d'après (24),

$$(25)\qquad \beta_n(y_n) = \frac{y(y+1)}{(py+1)[(p+1)y+1]}\beta_{n-1}(y),$$

la probabilité cherchée est

$$(26)\qquad G_n(p+\eta) - G_n(p) = \int_{\frac{1}{\eta}}^{\infty} \frac{y(y+1)}{(py+1)[(p+1)y+1]}\, dG_{n-1}(y),$$

ce qui peut encore s'écrire, en posant $\frac{1}{y} = u$,

$$(27)\qquad G_n(p+\eta) - G_n(p) = \int_0^{\eta} \frac{u+1}{(p+u)(p+u+1)}\, d\left[-G_{n-1}\left(\frac{1}{u}\right)\right].$$

Ces formules montrent bien la nature analytique des lois considérées. Ainsi, d'après (21), $f_n(x)$ apparaît comme une moyenne des fonctions

$$\frac{y(y+1)}{(xy+1)^2},$$

y pouvant varier de 1 à l'infini; c'est donc une fonction d'allure régulière, comprise, ainsi que chacune de ses dérivées, entre des limites faciles à former, et que tout renseignement obtenu sur $G_{n-1}(y)$ permettra de préciser. La formule (27) au contraire montre bien que $G_n(y)$ est discontinue pour toutes valeurs possibles de y_n.

4. *Détermination de la loi limite.* — Le passage à la limite est maintenant facile. Admettons provisoirement l'existence de limites déterminées pour $F_n(x)$, $G_n(x)$, $\alpha_n(p)$, quand n augmente indéfiniment, et désignons respectivement ces limites par $F(x)$, $G(x)$, $\alpha(p)$. Les formules (15), (17), (18), (20) et (27) du numéro pré-

cédent deviennent à la limite

$$(28)\qquad 1 - F(x) = \left[F\left(1+\frac{1}{x}\right) - F(1)\right] + \ldots$$
$$+ \left[F\left(p+\frac{1}{x}\right) - F(p)\right] + \ldots,$$

$$(29)\qquad 1 - G(x) = \left[G\left(1+\frac{1}{x}\right) - G(1)\right] + \ldots$$
$$+ \left[G\left(p+\frac{1}{x}\right) - G(p)\right] + \ldots,$$

$$(30)\qquad F(p) = G(p),$$

$$(31)\qquad 1 - F(x) = \int_1^\infty \frac{y+1}{xy+1}\, dG(y),$$

$$(32)\qquad G(p+\eta) - G(p) = \int_0^\eta \frac{u+1}{(p+u)(p+u+1)}\, d\left[-G\left(\frac{1}{u}\right)\right].$$

Les formules (28) à (30) suggèrent l'idée que les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ sont égales. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi.

Observons d'abord que la loi de probabilité définie par $G(y)$ est une loi continue, malgré le caractère discontinu des fonctions $G_n(y)$; si en effet n augmente indéfiniment, les y_n deviennent partout denses, et le plus grand des $\beta_n(y)$, d'après la formule (25), est inférieur à $\frac{1}{2^n}$. La continuité de $G(y)$ en résulte, et il est naturel de supposer la continuité absolue, et l'existence d'une dérivée continue $g(y)$. La formule (32), dérivée par rapport à η, donne alors

$$(p+\eta)(p+\eta+1)\, g(p+\eta) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{\eta}+1\right) g\left(\frac{1}{\eta}\right).$$

Le produit

$$y(y+1)\, g(y)$$

ne change donc pas par le changement de y en $y+1$, et, si on le définit par cette propriété entre 0 et 1, on obtient une fonction ne changeant pas par le changement de y en $\frac{1}{y}$; la fonction $g(y)$ étant supposée continue, ce produit est nécessairement constant. Comme d'ailleurs

$$\int_1^\infty g(y)\, dy = G(1) - G(0) = 1,$$

on trouve

$$g(y) = \frac{1}{y(y+1)\log 2}, \tag{33}$$

$$G(y) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{2y}{y+1}. \tag{34}$$

La formule (31) donne alors

$$1 - F(x) = \frac{1}{\log 2} \int_1^\infty \frac{1}{y(xy+1)} dy,$$

c'est-à-dire

$$F(x) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{2x}{x+1} = G(x), \tag{35}$$

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)\log 2} = g(x), \tag{36}$$

$$\alpha(p) = F(p+1) - F(p) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(p+1)^2}{p(p+2)}. \tag{37}$$

Les formules sont encore plus simples si l'on pose $\frac{1}{x} = u$. La probabilité des valeurs inférieures à une valeur donnée u est $\frac{\log(1+u)}{\log 2}$, et la probabilité d'un intervalle du est $\frac{du}{(1+u)\log 2}$. C'est vers la loi ainsi définie que tendent à la fois celles dont dépendent les expressions $\frac{1}{x_n}$ et $\frac{1}{y_n}$.

Les considérations qui précèdent n'ont d'ailleurs qu'une valeur heuristique. Nous allons montrer que $F_n(x)$ $G_n(y)$ et $\alpha_n(p)$ convergent bien vers les limites définies par les formules (35), (34) et (37), limites qui, par la manière même dont nous les avons obtenues, vérifient les relations (30) à (32); elles vérifient d'ailleurs aussi les relations (28) et (29).

5. *Démonstration de la convergence.* — Posons

$$H_n(y) = G_n(y) - G(y),$$

et désignons par K_n le module maximum de $H_n(y)$, pour $y > 1$. Les formules (20) et (31) donnent, par soustraction,

$$F_n(x) - F(x) = -\int_1^\infty \frac{y+1}{xy+1} dH_{n-1}(y) = \int_1^\infty H_{n-1}(y) d\frac{y+1}{xy+1},$$

les discontinuités de $H_{n-1}(y)$ n'empêchant pas l'application de la formule d'intégration par parties, et $H_{n-1}(y)$ s'annulant aux limites. La fonction $\frac{y+1}{xy+1}$ étant constamment décroissante, on en déduit

$$|F_n(x)-F(x)| \leqq K_{n-1}\int_1^{x}\left|d\frac{y+1}{xy+1}\right| = K_{n-1}\frac{x-1}{x(x+1)}$$

et par suite

$$(38)\qquad |F_n(x)-F(x)| \leqq (3-2\sqrt{2})K_{n-1} < 0{,}2\,K_{n-1}.$$

Comme pour les valeurs entières p, $F_n(p) = G_n(p)$, $F(p) = G(p)$, on peut écrire

$$(39)\qquad |H_n(p)| < 0{,}2\,K_{n-1}, \qquad |H_n(p+1)| < 0{,}2\,K_{n-1}.$$

Les formules (27) et (32) donnent d'autre part

$$\begin{aligned} H_n(p+\eta)-H_n(p) &= -\int_0^{\eta}\frac{u+1}{(p+u)(p+u+1)}\,dH_{n-1}\left(\frac{1}{u}\right) \\ &= \int_0^{\eta} H_{n-1}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{d}{du}\,\frac{u+1}{(p+u)(p+u+1)}\,du \\ &\quad -\left[H_{n-1}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{u+1}{(p+u)(p+u+1)}\right]_0^{\eta}, \end{aligned}$$

et, comme $H_{n-1}(\infty) = 0$,

$$\begin{aligned} &|H_n(p+\eta)-H_n(p)| \\ &\leqq K_{n-1}\left[\int_0^{\eta}\left|\frac{d}{du}\,\frac{u+1}{(p+u)(p+u+1)}\right|du + \frac{\eta+1}{(p+\eta)(p+\eta+1)}\right]. \end{aligned}$$

Si $p=1$, il vient ainsi

$$|H_n(1+\eta)-H_n(1)| \leqq K_{n-1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\eta+2}+\frac{1}{\eta+2}\right) = \frac{1}{2}K_{n-1}.$$

Si $p \geqq 3$, la fonction

$$(40)\qquad \frac{u+1}{(p+u)(p+u+1)}$$

étant croissante de o à 1, on a

$$\begin{aligned} |H_n(p+\eta)-H_n(p)| &\leqq K_{n-1}\left[\frac{2(1+\eta)}{(p+\eta)(p+\eta+1)}-\frac{1}{p(p+1)}\right] \\ &\leqq K_{n-1}\frac{3}{p(p+1)} \leqq \frac{1}{4}K_{n-1} < \frac{1}{2}K_{n-1}. \end{aligned}$$

Si enfin $p=2$, la fonction (40) ne croît que quand u varie de o à $\sqrt{2}-1$, et, si η est dans cet intervalle, on a

$$|\mathrm{H}_n(2+\eta)-\mathrm{H}_n(2)| \leqq \mathrm{K}_{n-1}\frac{3}{p(p+1)} = \frac{1}{2}\mathrm{K}_{n-1}.$$

Si $\eta > \sqrt{2}-1$, on peut, en faisant varier u de η à 1 (et non de 0 à η), écrire

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{H}_n(2+\eta)-\mathrm{H}_n(3)| \\
&\leqq \mathrm{K}_{n-1}\left[\int_{\eta}^{1}\left|\frac{d}{du}\,\frac{u+1}{(u+2)(u+3)}\right|du+\frac{\eta+1}{(\eta+2)(\eta+3)}\right] \\
&= \mathrm{K}_{n-1}\left[\frac{2(\eta+1)}{(\eta+2)(\eta+3)}-\frac{1}{6}\right] < \frac{1}{2}\mathrm{K}_{n-1}.
\end{aligned}$$

Donc, dans tous les cas, la plus petite des différences

$$\mathrm{H}_n(p+\eta)-\mathrm{H}_n(p), \qquad \mathrm{H}_n(p+\eta)-\mathrm{H}_n(p+1)$$

ne dépasse pas $\frac{1}{2}\mathrm{K}_{n-1}$ en valeur absolue, et, compte tenu de (39), il vient

$$\operatorname{Max}|\mathrm{H}_n(p+\eta)| = \mathrm{K}_n \leqq 0{,}7\,\mathrm{K}_{n-1} \tag{41}$$

et par suite

$$\mathrm{K}_n \leqq (0{,}7)^{n-1}. \tag{42}$$

Cette formule établit la convergence uniforme de $\mathrm{G}_n(y)$ vers $\mathrm{G}(y)$. La formule (38) établit alors la convergence uniforme $\mathrm{F}_n(x)$ vers $\mathrm{F}(x)$, et par suite celle de $\alpha_n(p)$ vers $\alpha(p)$. D'après la remarque finale du n° 3, $f_n(x)$ et ses dérivées tendent aussi vers $f(x)$ et ses dérivées.

6. *Remarques.* — Il est curieux d'observer que la formule (15) définit une suite de fonctions

$$\mathrm{F}_1(x), \quad \mathrm{F}_2(x), \quad \ldots, \quad \mathrm{F}_n(x), \quad \ldots$$

convergeant uniformément vers $\mathrm{F}(x)$, tandis que la formule (17), qui lui est identique, définit une suite de fonctions

$$\ldots, \quad \mathrm{G}_n(x), \quad \mathrm{G}_{n-1}(x), \quad \ldots$$

divergeant à partir de la même limite $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x)$. La différence tient à ce que les fonctions $F_n(x)$ sont continues, mais non les $G_n(x)$. On peut montrer que, si l'on remplaçait la loi initiale donnant à l'intervalle dX la probabilité dX par une autre loi lui donnant la probabilité $f_0(X)\,dX$, cela ne changerait pas la conclusion relative aux $F_n(x)$, pourvu que la fonction $f_0(X)$ soit continue, et admette une dérivée continue et bornée.

Les $G_n(y)$ au contraire définissent une loi discontinue; les valeurs possibles de $z_n = \frac{1}{y_n}$ constituent un ensemble dénombrable d'*ordre* $n+1$, en ce sens que son ensemble dérivé d'ordre $n+2$ ne contient aucun point. La formule de récurrence conduit d'une loi de probabilité relative à cet ensemble à celle relative à son dérivé; quelle que soit la loi initiale, il est certain que la discontinuité ne peut que s'accentuer, et, après $n+1$ opérations, donner la probabilité unité à la seule valeur possible.

Il est intéressant d'autre part de comparer les lois de probabilité des expressions

$$z_n = \frac{1}{y_n} = \frac{Q_n}{Q_{n+1}}, \qquad X_n = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Pour l'une et l'autre, les valeurs possibles sont les mêmes; ce sont les fractions rationnelles comprises entre 0 et 1 dont le développement en fraction continue est borné après n opérations. Mais en développant X_n on trouve les quotients incomplets

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n,$$

tandis qu'en développant z_n on trouve les mêmes quotients dans l'ordre inverse. La relation réciproque entre z_n et X_n peut aussi se déduire de la formule

$$P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1} = (-1)^n,$$

dont tous les termes sont connus lorsqu'on donne, soit z_n, soit X_n.

L'ensemble de ces valeurs est *ordonné*, en ce sens que chaque point de cet ensemble est l'extrémité (inférieure ou supérieure suivant la parité de n) d'un intervalle dont l'autre extrémité appartient à l'ensemble, mais qui ne contient aucun point de l'ensemble à son intérieur. La probabilité attribuée à l'intervalle contigu à X_n définit à la fois la probabilité de z_n et celle de la valeur correspondante de X_n. Pour n infini, la loi de probabilité de X_n tend vers celle qu'on a adoptée initialement pour X, tandis que la loi de probabilité de z_n tend en tout cas vers la loi définie par la probabilité totale $\frac{\log(1+z)}{\log 2}$.

7. *La loi des fréquences des différentes valeurs des quotients incomplets dans le développement d'un nombre donné en fraction continue.* — Nous allons montrer que, sauf pour certains nombres X constituant un ensemble de mesure nulle, le développement d'un nombre donné X en fraction continue jouit des propriétés suivantes : *la fréquence des valeurs de y_n inférieures à une valeur donnée y tend vers $G(y)$; la fréquence des valeurs de a_n égales à p tend vers $\alpha(p)$ et la fréquence des valeurs de x_n inférieures à x tend vers $F(x)$.*

Les deux premiers de ces résultats se déduisent du théorème suivant de calcul des probabilités :

Dans une série illimitée d'expériences donnant à un événement A des probabilités

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots$$

sa fréquence au cours des n premières expériences diffère de la probabilité moyenne

$$\alpha'_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}$$

d'une quantité presque sûrement infiniment petite pour n infini, c'est-à-dire qu'elle tend vers zéro, sauf dans des cas dont la probabilité totale est inférieure à n'importe quel nombre positif donné.

Il faut remarquer que cet énoncé ne suppose pas l'existence d'une limite pour α_n ; il importe d'ailleurs peu que les probabilités considérées soient ou non indépendantes; si elles sont successives, chaque probabilité α_n étant appréciée au moment de l'expérience, compte tenu du résultat des expériences antérieures, le théorème s'applique sans difficulté. Enfin, point essentiel dont l'intérêt est longtemps resté inaperçu et qui a été mis en évidence par M. Cantelli et M^lle Mezzanotte, il ne s'agit pas seulement de considérer chaque valeur de n indépendamment des autres pour montrer que la différence entre la fréquence et la probabilité moyenne est presque sûrement inférieure à une fonction de n tendant vers zéro, mais aussi et surtout de considérer l'ensemble des expériences pour montrer que cette différence tend presque sûrement vers zéro, c'est-à-dire devient *et reste* presque sûrement inférieure à n'importe quel nombre positif donné.

Considérons alors un nombre X; désignons par $\overline{z}_n(p)$ la fréquence du nombre p parmi les n premiers quotients incomplets $a_1, \ldots, a_n$ de son développement en fraction continue, par $F_n(x)$ la fréquence des valeurs de x_n inférieures à x (le nombre des valeurs égales à x étant compté pour moitié), et par $\bar{G}_n(y)$ la fréquence des valeurs de y_n inférieures à y, (le nombre des valeurs égales à y étant compté en entier si n est pair, et dans ce cas seulement).

Supposons qu'on ait établi que, pour $n > n_h$, $\overline{G}_n(y)$ diffère de $G(y)$ d'une quantité au plus égale à une valeur K'_h, sauf pour un certain ensemble de valeurs de x de mesure au plus égale à un nombre très petit ε_h. Le choix des valeurs successives de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ déterminant les Q_n et les y_n peut être considéré comme une série d'expériences déterminant un nombre X avec une précision croissante. La loi de probabilité dont doivent dépendre a_n et y_n dépend d'ailleurs seulement de y_{n-1}. Les moyennes des probabilités relatives à $a_1, \ldots, a_n$ et à $y_1, \ldots, y_n$ sont alors données par des formules identiques aux formules (22) et (27), $G_{n-1}(y)$ étant seulement remplacé par $\overline{G}_{n-1}(y)$. Les inégalités (38) et (41) s'appliquent alors, K_{n-1} étant remplacé par K'_h, pour les valeurs de n supérieures à n_{h+1}. Il résulte alors du théorème que nous venons de rappeler que, lorsque n dépassera une valeur suffisamment grande n_{h+1}, la fréquence des valeurs de y_n, inférieures à y, différant très peu de la probabilité moyenne, différera de $G(y)$ d'une quantité au plus égale à

$$K'_{h+1} = 0,8\,K'_h,$$

sauf dans des cas de probabilité arbitrairement petite ε'_h; en posant

$$\varepsilon_{h+1} = \varepsilon_h - \varepsilon'_h,$$

la propriété indiquée sera sûrement vraie en dehors d'un ensemble de mesure ε_{h+1}.

On peut pour commencer prendre $K'_1 = 1$, $\varepsilon_1 = 0$. On voit ainsi, de proche en proche, que l'on a

$$|G_n(y) - G(y)| \leq K'_h = (0.8)^h,$$

pour $n > n_h$, et pour des valeurs de X prises en dehors d'un ensemble de mesure ε_h. D'ailleurs

$$\varepsilon_h = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \ldots + \varepsilon'_{h-1}$$

peut être pris arbitrairement petit. La différence considérée tend donc vers zéro, sauf pour un ensemble de mesure nulle. Le résultat énoncé est bien établi en ce qui concerne les y_n, et par suite aussi en ce qui concerne leurs parties entières a_n.

Considérons maintenant un groupe de h entiers positifs $\beta_1, \ldots, \beta_h$; si nous considérons ces entiers comme les n premiers quotients incomplets du développement d'un nombre x, la donnée de ce groupe équivaut à la donnée d'un intervalle (x', x'') auquel les formules du n° 4 assignent une probabilité

$$\gamma = F(x'') - F(x'),$$

que nous pouvons appeler probabilité théorique du groupe considéré.

Or

$$a_{n+1}, \quad a_{n+2}, \quad \ldots, \quad a_{n+h}$$

sont les h premiers quotients incomplets du développement de x_{n+1}; les mêmes nombres pris dans l'ordre inverse sont les h premiers quotients incomplets du développement de y_{n+h}. Comme x_{n+1} et y_{n+h} dépendent à la limite de la même loi de probabilité, on peut observer que la probabilité théorique d'un groupe donné ne change pas si l'on prend les mêmes nombres dans l'ordre inverse.

D'autre part : *si, dans le développement d'un nombre* X, *pris en dehors d'un certain ensemble de mesure nulle, on considère tous les groupes de h quotients incomplets consécutifs* $a_{n+1}, \ldots, a_{n+h}$, *la fréquence avec laquelle on retrouve un groupe de n entiers donnés tend vers la probabilité théorique de ce groupe.*

Il suffit en effet de considérer chaque groupe $a_{n+1}, \ldots, a_{n+h}$ comme lié aux valeurs y_{n+h} d'un certain intervalle; le résultat que nous venons d'énoncer n'est qu'un nouvel énoncé du fait que les fréquences des différentes valeurs de y_n tendent vers leurs probabilités. En considérant le même groupe de quotients incomplets comme lié à x_n, le même énoncé nous apprend que la fréquence des différentes valeurs possibles de x_n tend vers leur probabilité.

C. Q. F. D.

8. *Application à l'étude d'une série.* — Considérons la série

$$\Phi(X) = \Sigma\varphi(Q_n, Q_{n+1}),$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs de l'entier positif n; si la fonction φ s'annule à l'infini au moins comme une puissance négative du plus petit de ses deux arguments, cette série converge absolument et uniformément, et $\Phi(X)$ est une fonction continue pour toutes les valeurs irrationnelles de X, mais évidemment discontinue pour toutes les valeurs rationnelles.

Proposons-nous de calculer sa valeur probable m; c'est évidemment une somme dans laquelle, q et q' désignant deux entiers positifs premiers entre eux, avec la condition $q \geqq q'$ ($q = q' = 1$ étant possible), chaque terme $\varphi(q', q)$ se trouve multiplié par la probabilité correspondante, c'est-à-dire, d'après (19), $\frac{1}{q(q+q')}$. On a donc

$$m = \sum{}' \frac{\varphi(q', q)}{q(q+q')},$$

Σ' désignant une sommation étendue à tous les systèmes d'entiers positifs q et q', premiers entre eux, et tels que $q \geqq q'$.

Supposons maintenant $\varphi(q', q)$ homogène et de degré négatif $-\rho$ par rapport à l'ensemble des deux arguments; $\frac{m}{p^{2+\rho}}$ est alors une somme analogue à m, mais étendue à tous les systèmes d'entiers q et q', ayant p pour plus grand commun diviseur, et tels que $q \geqq q'$. Par suite, en introduisant la fonction de Riemann

$$\zeta(2+\rho) = 1 + \frac{1}{2^{2+\rho}} + \ldots + \frac{1}{p^{2+\rho}} + \ldots,$$

on a

$$(43) \qquad m\zeta(2+\rho) = \sum \frac{\varphi(q', q)}{q(q+q')} \qquad (q, q' = 1, 2, \ldots; \quad q \geqq q').$$

Indiquons pour terminer deux applications particulières de cette formule. En premier lieu, la somme de la série

$$\Phi_1(X) = \sum \frac{Q_{n+1} + Q_n}{Q_{n+1}^{1+\rho}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

a pour valeur probable

(44) $$m_1 = \frac{1}{\zeta(2+\rho)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{q'=1}^{q'=q} \frac{1}{q^{2+\rho}} = \frac{\zeta(1+\rho)}{\zeta(2+\rho)}.$$

De même, pour la série

$$\Phi_2(X) = \frac{1}{Q_2^{\rho}} + \frac{1}{Q_3^{\rho}} + \ldots + \frac{1}{Q_{n+1}^{\rho}} + \ldots$$

on trouve comme valeur probable

$$m_2 = \frac{1}{\zeta(2+\rho)} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{q'=1}^{q} \frac{1}{q^{1+\rho}(q+q')}.$$

Compte tenu des formules

$$\frac{1}{q+q'} = \int_0^{\infty} e^{-(q+q')t}\, dt, \qquad \frac{1}{q^{1+\rho}} = \int_0^{\infty} e^{-qu} u^{\rho}\, du,$$

on trouve

$$\sum_{q'=1}^{q} \frac{1}{q+q'} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-qt} - e^{-2qt}}{e^t - 1}\, dt,$$

et par suite

$$m_2 = \frac{1}{\zeta(2+\rho)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma\left[e^{-q(t+u)} - e^{-q(2t+u)}\right]}{e^t - 1} u^{\rho}\, dt\, du,$$

c'est-à-dire enfin

(45) $$m_2 = \frac{1}{\zeta(2+\rho)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{t+u}}{(e^{t+u}-1)(e^{2t+u}-1)} u^{\rho}\, dt\, du.$$