

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. WOLFF

## **Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 57 (1929), p. 195-203

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1929\\_\\_57\\_\\_195\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__195_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1929, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ITÉRATION  
DES FONCTIONS HOLOMORPHES DANS UN DEMI-PLAN ;

PAR M. JULIUS WOLFF  
(Utrecht).

On sait que, si  $f(z)$  est holomorphe dans un cercle  $C$  et telle que toutes ses valeurs sont dans  $C$ , les itérés  $z_1 = f(z)$ ,  $z_2 = f(z_1)$ , etc. tendent vers une limite  $\beta$ , qui ne dépend pas du point initial  $z$ (<sup>1</sup>). Le but du présent article est l'étude des directions dans lesquelles  $z_n$  peut s'approcher de  $\beta$ , dans le cas que  $\beta$  est sur la circonférence  $C$ . Sans nuire à la généralité nous supposons que  $C$  est le demi-plan  $x > 0$  et  $\beta$  le point à l'infini. Alors on a  $x_1 > x$ , sauf pour les fonctions  $f(z) = z + bi$ .

1. Soit  $f(z) = f(x + yi) = x_1 + y_1 i$  holomorphe dans le demi-plan  $D(x > 0)$  et soit  $x_1 > x$  pour chaque point  $z$  de  $D$ . Écrivons

$$f(x_1 + y_1 i) = f_2(z) = x_2 + y_2 i, \quad \text{etc.}$$

La suite  $x_1, x_2, \dots$  étant croissante, si elle converge pour un point  $z$  de  $D$ , elle converge dans  $D$ .

*Premier cas : la suite  $x_n$  converge.* — La convergence est uniforme dans toute partie bornée et fermée de  $D$ , et la fonction limite  $a(z)$  est harmonique dans  $D$ . En notant  $\frac{d}{dv}$  la différentiation suivant la normale du chemin d'intégration, dans un sens convenable, on a

$$y_{n+1} - y_n = \int_z^{z_1} \frac{\partial x_n}{\partial v} ds \rightarrow (\text{pour } n \text{ infini}) \int_z^{z_1} \frac{\partial a}{\partial v} ds = b(z);$$

la convergence étant uniforme dans toute partie bornée et fermée de  $D$ .

---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, t. 182, 1926, p. 42-43, 200-201, 255-257 et 918-920; t. 183, 1926, p. 500-502.

De plus on a

$$x_{n+1} - x_n \rightarrow 0,$$

donc

$$z_{n+1} - z_n \rightarrow ib(z).$$

La fonction  $ib(z)$  est holomorphe dans  $D$ , sa partie réelle est identiquement nulle, donc  $b(z)$  est une constante  $b$ .

Nous trouvons ainsi que  $z_{n+1} - z_n$  tend pour  $n$  infini vers une constante imaginaire  $ib$ . D'autre part,  $z_n$  tend vers l'infini, car  $x_{n+1} > x_n$ .

Pour préciser la conduite de  $z_n$  pour les grandes valeurs de  $n$ , nous allons démontrer que  $b$  n'est pas nulle. Soit  $a'(z)$  une fonction conjuguée de la fonction harmonique  $a(z)$ , de sorte que

$$a(z) + ia'(z) = \Lambda(z)$$

est holomorphe dans  $D$ . Il est évident que

$$a(z_1) = a(z).$$

D'autre part,

$$a'(z_1) - a'(z) = \int_z^{z_1} \frac{\partial a}{\partial v} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_z^{z_1} \frac{\partial x_n}{\partial v} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - y_n) = b.$$

Il s'ensuit

$$\Lambda(z_1) = \Lambda(z) + bi.$$

La fonction  $\Lambda(z)$ , holomorphe dans  $D$  et dont toutes les valeurs sont aussi dans  $D$ , satisfait à l'équation Schröderienne

$$\Lambda\{f(z)\} \equiv \Lambda(z) + bi.$$

Supposons  $b = 0$ .

Posons :

$$\text{maximum de } a(z) \text{ sur le segment } z_n z_{n+1} = M_n.$$

Alors

$$M_n \leq a(z_n) + |z_{n+1} - z_n| \cdot (\max. \text{ de } |\Lambda'(z)| \text{ sur } z_n z_{n+1}).$$

Mais nous savons que

$$|\Lambda'(z)| \leq \frac{\alpha(z)}{x} \quad (1),$$

donc

$$M_n < a(z) + |z_{n+1} - z_n| \frac{M_n}{x_n}.$$

(1) *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 500-502.

Par conséquent, à partir d'une certaine valeur de  $n$ ,

$$M_n < \frac{\alpha(z)}{1 - \frac{|z_{n+1} - z_n|}{x_n}},$$

car  $|z_{n+1} - z_n|$  tendant vers zéro et  $x_n$  vers  $\alpha(z)$ , le quotient tend vers zéro. Nous concluons que  $\alpha(z)$  est bornée sur l'ensemble des segments  $z_n z_{n+1}$ . Or

$$\begin{aligned} z_{n+2} - z_{n+1} &= f(z_{n+1}) - f(z_n) = \int_{z_n}^{z_{n+1}} f'(z) dz = \\ &= \int_{z_n}^{z_{n+1}} A'(z) dz - \int_{z_n}^{z_{n+1}} \{A'(z) - f'(z)\} dz = \\ &= - \int_{z_n}^{z_{n+1}} \{A'(z) - f'(z)\} dz, \end{aligned}$$

car  $A(z_{n+1}) = A(z_n)$ .

La partie réelle de la fonction  $A(z) - f(z)$ , holomorphe dans  $D$ , étant positive, nous savons que

$$|A'(z) - f'(z)| \leq \frac{\alpha(z) - x_1}{x} < \frac{\alpha(z) - x}{x},$$

donc

$$|z_{n+2} - z_{n+1}| < |z_{n+1} - z_n| \cdot \left( \max. \text{ de } \frac{\alpha(z) - x}{x} \text{ sur le segment } z_n z_{n+1} \right).$$

Mais sur le segment  $z_n z_{n+1}$  on a

$$\begin{aligned} \alpha(z) - x &< \alpha(z) - x_n \leq \alpha(z_n) - x_n + |z_{n+1} - z_n| \cdot (\max. \text{ de } |A'(z)|) \\ &\leq \alpha(z_n) - x_n + |z_{n+1} - z_n| \cdot \left( \max. \text{ de } \frac{\alpha(z)}{x} \right) \\ &< \alpha(z_n) - x_n + \frac{M_n \cdot |z_{n+1} - z_n|}{x_n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\frac{z_{n+2} - z_{n+1}}{z_{n+1} - z_n}$  tendrait vers zéro, d'où résulterait que  $z_n$  tend vers une limite finie.

Cette contradiction montre bien que  $b \neq 0$ .

Nous connaissons maintenant assez précisément la conduite de  $z_n$  pour  $n$  grand, dans le cas de convergence de la suite  $x_n$  : pour tous les points initiaux  $z$  l'incrément  $z_{n+1} - z_n$  tend vers la même limite imaginaire  $ib$  différente de zéro.

2. Donnons un exemple d'une fonction se trouvant dans le premier cas. Posons

$$z_1 = z + \frac{1}{z} + i.$$

On a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{x_n^2 + y_n^2},$$

$$y_{n+1} - y_n = 1 - \frac{y_n}{x_n^2 + y_n^2},$$

$$z_n \rightarrow \infty, \quad \text{donc} \quad z_{n+1} - z_n = \frac{1}{z_n} + i \rightarrow i,$$

$$y_{n+1} - y_n \rightarrow 1,$$

$$y_n \sim n,$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{y_n^2} \text{ converge,}$$

$$x_{n+1} < x_n + \frac{x_n}{y_n^2} = x_n \left( 1 + \frac{1}{y_n^2} \right).$$

Le produit infini  $\prod_1^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{y_n^2} \right)$  étant convergent  $x_n$  tend vers une limite finie. Dans cet exemple la constante  $b$  est égale à l'unité.

3. Deuxième cas : la suite  $x_n$  diverge. — On sait que dans chaque angle

$$-\frac{\pi}{2} + \epsilon \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad (\epsilon > 0),$$

la fonction  $z^{-1}f(z)$  tend pour  $|z|$  infini vers une limite  $\lambda$  réelle, finie et au moins égale à un <sup>(1)</sup>. Posons

$$z = r e^{i\varphi}, \quad z_n = r_n e^{i\varphi_n},$$

$\varphi$  et  $\varphi_n$  entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

**THÉORÈME.** — Si  $\lambda > 1$  et si pour un point  $z_0$  de D la suite des nombres  $|\operatorname{tang} \varphi_n|$  est bornée, alors pour chaque point  $z$  de D  $\varphi_n$  tend vers une limite.

Remarquons d'abord que pour tout point  $z$  de D la suite

(1) *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 500-502.

$|\operatorname{tang} \varphi_n|$  est bornée. Car dans le cas contraire il existerait un point  $\alpha$  de  $D$  et une suite partielle  $p \rightarrow \infty$ , telle que, par exemple,  $\varphi_p(\alpha) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . De cette suite  $(p)$  on pourrait extraire une suite  $(q)$ , telle que la suite des fonctions

$$e^{\varphi_q(z) - i \log r_q(z)}$$

convergerait dans  $D$  vers une fonction holomorphe.  $\varphi_q(z)$  tendrait vers une fonction harmonique dans  $D$ , ayant forcément son maximum au point  $\alpha$ , elle serait partout égale à  $\frac{\pi}{2}$ , contrairement à l'hypothèse que  $|\operatorname{tang} \varphi_n(z_0)|$  est bornée.

On sait que

$$\delta_n = \frac{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{(x_{n+1} + x_n)^2 + (y_{n+1} + y_n)^2}$$

ne croît jamais avec  $n$  <sup>(1)</sup>. Elle tend donc vers une limite  $< 1$ .  
Donc

$$\frac{(x_{n+1} + x_n)^2 + (y_{n+1} + y_n)^2}{x_n x_{n+1}} \rightarrow \mu \geq 4,$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \lambda,$$

donc

$$\frac{(y_{n+1} - y_n)^2}{x_n^2} \rightarrow (\mu - \lambda - \lambda^{-1} - 2)\lambda.$$

Mais

$$y_{n+1} = \lambda y_n + o(x_n),$$

par conséquent,  $\frac{(\lambda - 1)^2 y_n^2}{x_n^2}$  tend vers une limite, et parce que  $\lambda > 1$  :

$$\frac{y_n^2}{x_n^2} \rightarrow k^2 = \frac{\lambda \mu - (\lambda + 1)^2}{(\lambda - 1)^2}.$$

Pour  $k = 0$ , on a  $\varphi_n \rightarrow 0$ .

Pour  $k \neq 0$ , nous pouvons écrire

$$y_{n+1} = \lambda y_n + o(y_n),$$

d'où la conclusion que  $|y_n|$  finit par croître.

Donc  $\varphi_n$  a une limite, dépendant en général du point initial  $z$ .

(1) *Comptes rendus*, t. 183, 1916, p. 500-502.

4. Supposons maintenant que  $\lambda = 1$ . Alors

$$f(z) = z + \varpi(z).$$

$\varpi(z)$  est holomorphe dans  $D$  et sa partie réelle est partout positive. Même chose pour  $\frac{1}{\varpi(z)}$ . On sait donc que dans chaque angle.

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0),$$

la fonction  $z\varpi(z)$  tend vers une limite  $\rho$  réelle et positive, qui peut être infinie.

**THÉORÈME.** — Si  $\lambda = 1$ ,  $\rho < \infty$  et si pour un point  $z_0$  de  $D$  la suite des nombres  $|\text{tang } \varphi_n|$  est bornée, alors pour chaque point  $z$  de  $D$   $\varphi_n$  tend vers zéro.

En effet, d'abord la suite  $|\text{tang } \varphi_n|$  est bornée pour chaque  $z$  de  $D$  (§ 3). On a donc

$$\varpi(z) = \frac{\rho}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right).$$

Soit  $h$  un nombre positif. La formule pour  $\varpi(z)$  nous apprend que si  $|\varphi_n| > h$  et  $n$  assez grand,  $|\varphi_{n+1}| < |\varphi_n|$ . De plus elle nous apprend que  $\varphi_{n+1} - \varphi_n$  tend vers zéro. On en conclut que  $|\varphi_n| < 2h$  pour  $n$  assez grand, et puisque  $h$  était arbitraire il est démontré que  $\varphi_n$  tend vers zéro.

5. Rien n'est démontré dans le cas  $\lambda = 1$ ,  $\rho = \infty$ . Les exemples

$$f(z) = z + a + bi \quad (a > 0)$$

et

$$f(z) = z + z^{-\frac{1}{2}} + i$$

montrent que  $\varphi_n$  peut avoir une limite :  $\text{arc tang } \frac{b}{a}$  dans le premier exemple,  $\frac{\pi}{2}$  dans le second.

**THÉORÈME.** — Si  $\lambda = 1$  et si pour un point initial  $z_0$  l'angle  $\varphi_n(z_0)$  a une limite  $\gamma$ , si en outre pour ce point  $z_0$  la série  $\sum_0^{\infty} \frac{1}{x_n}$  diverge, alors pour tout autre point initial  $z$  l'angle  $\varphi_n(z)$  tend vers la même limite  $\gamma$ .

D'abord : si  $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ , un raisonnement semblable à celui du paragraphe 3, que nous laisserons au lecteur, montre que la proposition est juste; et la divergence de  $\sum_0^{\infty} \frac{1}{x_n}$  devient superflue.

Supposons donc  $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$ . Pour chaque point  $z$  de  $D$   $|\operatorname{tang} \varphi_n|$  est bornée (§ 3). Si le théorème n'était pas exact, il y aurait un point  $\alpha$  de  $D$ , et une suite partielle  $p \rightarrow \infty$ , telle que

$$\varphi_p(\alpha) \rightarrow \delta \neq \gamma.$$

De cette suite ( $p$ ) on pourrait extraire une suite ( $q$ ), telle que la suite des fonctions

$$e^{\varphi_q(z) - i \log r_q(z)}$$

convergerait dans  $D$  vers une fonction holomorphe  $F(z)$ , ayant même valeur en tous les itérés  $z_n$  de  $z_0$ , car  $\frac{z_{q+k}}{z_q} \rightarrow 1$  pour  $k$  fixe.

Or, la divergence de la série  $\sum_0^{\infty} \frac{1}{x_n}$  entraîne que  $F(z)$  est une constante (1), en contradiction avec  $\delta \neq \gamma$ , et le théorème est démontré.

6. Nous allons maintenant montrer, par un exemple, que dans le cas  $\lambda = 1$ ,  $\rho = \infty$  l'angle  $\varphi_n$  peut ne pas tendre vers une limite.

Considérons la fonction

$$f(z) = z + z^i + 2e^{\frac{\pi}{2}},$$

$z^i$  étant  $e^{-\varphi}(\cos \log r + i \sin \log r)$ ,  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ .

On a donc

$$z_{n+1} = z_n + 2e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\varphi_n}(\cos \log r_n + i \sin \log r_n).$$

L'argument de  $z_{n+1} - z_n$  est toujours entre  $-\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{\pi}{6}$ . Il en

(1) Théorème de Blaschke (*Leipz. Berichte*, mai 1918).



résulte que les limites possibles de  $\varphi_n$  sont au plus égales à  $\frac{\pi}{6}$  en valeur absolue.

Soit  $z_0$  un point initial arbitraire. Pour  $n$  assez grand on aura  $r_{n+1} > r_n$  et

$$A \leq r_{n+1} - r_n \leq |z_{n+1} - z_n| \leq 3e^{\frac{\pi}{2}} \quad (A > 0 \text{ et constante}).$$

Donc

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} \rightarrow 1, \quad \log r_{n+1} - \log r_n \rightarrow 0.$$

On en conclut que l'argument de  $z^i$  finit par varier à degrés insensibles.

Supposons maintenant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi.$$

Alors le module de  $z^i$  tend vers  $e^{-\varphi}$  et l'ensemble des limites  $\psi$  de l'argument de  $z_{n+1} - z_n$  est le segment

$$-\arcsin\left(\frac{1}{2}e^{-\varphi-\frac{\pi}{2}}\right) \leq \psi \leq \arcsin\left(\frac{1}{2}e^{-\varphi-\frac{\pi}{2}}\right).$$

Il existe dans ce segment une valeur  $\psi \neq \varphi$ .

Donc pour une certaine suite d'indices  $p \rightarrow \infty$  l'argument  $\psi_p$  de  $z_{p+1} - z_p$  diffère de  $\varphi$  d'une quantité plus grande qu'un nombre  $2\varepsilon$ , positif et fixe.

Soit  $p$  un de ces indices. Considérons les indices  $p+1$ ,  $p+2$ , ...,  $p+k$  tels que

$$|\psi_{p+i} - \psi_p| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Pour que cette inégalité ait lieu, il suffit que  $\log r_{p+i} - \log r_p$  soit plus petit qu'un certain nombre  $\eta$ , indépendant de  $p$ .

Or

$$r_{p+i} - r_p \leq 3e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$\frac{r_{p+i}}{r_p} \leq 1 + \frac{3e^{\frac{\pi}{2}i}}{r_p}.$$

Il en résulte que

$$k > Cr_p, \quad |z_{p+k} - z_p| > Dr_p, \quad \arg(z_{p+k} - z_p) > \varphi + \varepsilon,$$

C et D étant des constantes positives et  $\arg z_p \rightarrow \varphi$ . L'angle sous lequel on voit de l'origine le segment  $z_p z_{p+k}$  finit donc par rester supérieur à une quantité positive et fixe, en contradiction avec la convergence supposée de  $\varphi_n$ .

Remarquons que  $x_{n+1} - x_n$  est entre  $e^{\frac{\pi}{2}}$  et  $3e^{\frac{\pi}{2}}$ , donc  $\frac{x_n}{n}$  est entre ces deux nombres, d'où la divergence de  $\sum \frac{1}{x_n}$ . Cependant pour chaque point  $z$  de D  $\varphi_n$  n'a pas de limite.

D'autre part on démontre facilement (par exemple en raisonnant comme au paragraphe 5) que les seules hypothèses  $\sum \frac{1}{x_n}$  divergente et  $\lambda = 1$  ont pour conséquence que pour deux points quelconques  $\alpha$  et  $\beta$  la différence  $\varphi_n(\alpha) - \varphi_n(\beta)$  tend vers zéro.

---