BULLETIN DE LA S. M. F.

N. CIORANESCU

Une expression des modules des coefficients d'une fonction analytique

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 210-215

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__210_0>

UNE EXPRESSION DES MODULES DES COEFFICIENTS D'UNE FONCTION ANALYTIQUE;

PAR M. N. CIORANESCU.

Soit

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

une fonction analytique de $z = x + iy$, holomorphe autour de l'origine.

Dans le domaine d'holomorphie considérons un cercle centré en O et de rayon r, et prenons la valeur moyenne de $|f(z)|^2$, le long de ce cercle. D'après la formule de Parseval, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\theta = \sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n}.$$

Mais, soit $F(P)$ une fonction réelle des variables $x_1, x_2, \dots x_\nu$, analytique dans une certaine région R de l'espace E_ν.

Supposons que, autour du point P_0, de R, on décrive une hypersphère Σ_ν de rayon r qui ne sorte pas de R, et qu'on prenne la valeur moyenne $\mathfrak{M}_p(F)$ de $F(P)$ sur Σ_ν (moyenne périphérique) ou la valeur moyenne $\mathfrak{M}_S(F)$ dans Σ_ν (moyenne spatiale). En partant du développement taylorien de $F(P - P_0)$, on trouve [1] pour ces valeurs moyennes

$$(2) \qquad \mathfrak{M}_p(F) = F_{P_0} + \sum_{n=1}^\infty \frac{r^{2n}}{2^n n!\,\nu(\nu+2)\dots(\nu+2n-2)} (\Delta^{(n)} F)_{P_0}$$

et une expression analogue pour $\mathfrak{M}_S(F)$, où

$$\Delta F = \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$$

---

[1] Pour $\nu = 2$ et 3 de telles expressions ont été données par P. PIZZETTI. *Rendiconti della r. Ac. dei Lincei*, t. XVIII, 1909, p. 182 et 309. *Voir* aussi N. CIORANESCU, *Bulletin mathém. de la Soc. roumaine des Sc.*, t. 31, (2), 1929.

est le Laplacien de F et

$$\Delta^{(n)} = \Delta(\Delta^{(n-1)}).$$

Ce développement est valable pour toute hypersphère Σ_ν intérieure au domaine dans lequel le développement en série de Taylor de F(P) existe.

En comparant (1) et (2) après avoir fait $F(P) = |f^2(z)|$ et $\nu = 2$, on trouve, par identification,

$$(3)\qquad |a_n|^2 = \frac{1}{(2.4\ldots 2n)^2}[\Delta^{(n)}|f^2(z)|]_0.$$

Mais, comme $|f^2(z)| = u^2 + v^2$ et $\Delta u^2 = \Delta v^2$ et, par conséquent, $\Delta^{(n)} u^2 = \Delta^{(n)} v^2$ on voit qu'on a en définitive

$$(4)\qquad |a_n|^2 = \frac{1}{2^{n-1}(n!)^2}(\Delta^{(n)} u^2)_0 = \frac{1}{2^{n-1}(n!)^2}(\Delta^{(n)} v^2)_0.$$

C'est sur cette formule que nous voulons insister un peu. Tout d'abord, comme me l'a fait remarquer M. Montel, le développement (2) n'est pas indispensable pour obtenir les expressions (4). En effet, on a évidemment

$$|f'|^2 = \frac{1}{4}\Delta|f|^2 = \frac{1}{2}\Delta u^2 = \frac{1}{2}\Delta v^2,$$

et par conséquent

$$|f''|^2 = \frac{1}{4}\Delta|f'|^2 = \frac{1}{4^2}\Delta^{(2)}|f|^2 = \frac{2}{4^2}\Delta^{(2)} u^2,$$

et, en général,

$$|f^{(n)}|^2 = \frac{1}{4^n}\Delta^{(n)}|f|^2 = \frac{2}{4^n}\Delta^{(n)} u^2,$$

ce qui conduit à (4). On peut transformer de la manière suivante l'expression de $\Delta^{(n)} u^2$. On trouve que

$$\Delta u^2 = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] = 2\nabla u,$$

∇u étant le premier paramètre différentiel de Lamé

$$\Delta^{(2)} u^2 = 2^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right] = 2^2\nabla_2 u,$$

et ainsi de suite

$$\Delta^{(n)} u^2 = 2^n\left[\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)^2 + C_n^1\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)^2\right] = 2^n\nabla_n u.$$

En effet, supposons que cette formule soit vraie jusqu'à n, et montrons qu'elle est vraie aussi pour $n+1$.

Mais cela revient à appliquer à la relation

$$\Delta^{(n)} u^2 = 2^n \nabla_n u$$

l'égalité $\Delta u^2 = 2 \nabla u$, car $\frac{\partial^n u}{\partial x^p \partial y^q}$ est aussi une fonction harmonique. Comme nous l'avons déjà établie pour $n=1$, elle est valable pour tout n. En substituant dans (4) on trouve

$$(5) \qquad |a_n|^2 = \frac{[\nabla_n u]_0}{2^{n-1}(n!)^2}.$$

C'est la formule que nous voulions signaler. Il s'ensuit qu'on peut exprimer les modules des coefficients de $f(z)$ seulement à l'aide des dérivées d'ordre n de la partie réelle (ou imaginaire) de $f(z)$, qui entrent sous la forme très symétrique de ∇_n. Il est évident qu'on aurait la même formule dans le cas où $f(z)$ serait développée autour du point z_0; on doit seulement prendre alors la valeur de $\nabla_n u$ en ce point.

Considérons une seconde fonction

$$g(z) = P(x, y) + iQ(x, y) = \sum_0^\infty b_n z^n,$$

holomorphe aussi autour de l'origine, et la somme

$$F(z) = f(z) + g(z) = \sum_0^\infty (a_n + b_n) z^n.$$

D'après la formule (5) on voit que

$$|a_n + b_n|^2 = \frac{[\nabla_n(u+P)]_0}{2^{n-1}(n!)^2}.$$

Mais, d'autre part, on a

$$\nabla_n(u+P) = \nabla_n u + \nabla_n P + 2\nabla_n(P \mid u),$$

où $\nabla_n(P \mid u)$ est la forme polaire de ∇_n, c'est-à-dire

$$\nabla_n(P \mid u) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdot \frac{\partial^n P}{\partial x^n} + C_n^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} \cdot \frac{\partial^n P}{\partial x^{n-1} \partial y} + \ldots.$$

Si l'on désigne par φ_n et ψ_n les arguments de a_n et b_n on en déduit la formule

$$(6) \qquad |a_n|.|b_n|\cos(\varphi_n - \psi_n) = \frac{[\nabla_n(\mathrm{P}\,|\,u)]_0}{2^{n-1}(n!)^2}.$$

Prenons en particulier $g(t) = e^z$; comme $b_n = \frac{1}{n!}$, $\psi_n = 0$ et $\mathrm{P}(x, y) = e^r \cos y$ on voit que si l'on pose $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, on a

$$(7) \qquad \alpha_n = \frac{1}{2^{n-1}n!}\left[\frac{\partial^n u}{\partial x^n} - \mathrm{C}_n^2 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \mathrm{C}_n^4 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-4}\partial y^4} - \ldots\right]_0.$$

De même, en prenant $g(z) = ie^z$ on trouve

$$(8) \qquad \beta_n = \frac{1}{2^{n-1}n!}\left[-\mathrm{C}_n^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y} + \mathrm{C}_n^3 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-3}\partial y^3} - \ldots\right]_0.$$

Si l'on compare ces expressions aux formules de Fourier

$$(9) \qquad \begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\cos n\theta\, d\theta, \\ \beta_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\sin n\theta\, d\theta, \end{cases}$$

on obtient des relations valables pour toute fonction harmonique, régulière autour de l'origine. On peut d'ailleurs passer facilement des unes aux autres, en développant dans (9) $u(x, y)$ en série de Taylor, en faisant ensuite $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et en tenant compte des valeurs des intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \cos^p\theta \sin^q\theta \cos n\theta\, d\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \cos^p\theta \sin^q\theta \sin n\theta\, d\theta.$$

De (7) on peut déduire des inégalités pour $|a_n|$ en fonction du maximum $\mathrm{M}_1(\mathrm{R})$ de u sur le cercle de rayon R, mais elles ne peuvent pas être différentes de celles qu'on obtient au moyen des formules de Fourier.

Toutefois, on peut obtenir à partir de (7) une autre série d'inégalités, valables pour toute fonction harmonique. En effet, on voit que

$$|a_n|^2 \geqq \frac{\min \nabla_n u \text{ dans } \mathrm{C_R}}{2^{n-1}(n!)^2}.$$

D'autre part, on a l'inégalité de M. Hadamard

$$\mathrm{R}^n |a_n| \leqq 4\mathrm{A}(\mathrm{R}) - 2\alpha_0,$$

où l'inégalité correspondant à B(R), A(R) et B(R) désignant le maximum de u et celui de $-u$ dans le cercle C_R. En comparant ces deux inégalités, on obtient une série d'inégalités, dans lesquelles les $|a_n|$ sont éliminés, et qui sont valables pour toute fonction harmonique. Par exemple pour $n = 1$, en posant

$$\mu^2 = \min\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \text{ dans } C_R,$$

et en supposant que $u(x, y)$ soit une fonction harmonique nulle à l'origine, on a

$$A(R) \geqq \frac{R\mu(R)}{4}.$$

Une autre conséquence, aussi élémentaire que possible, qu'on peut déduire des formules précédentes, est la suivante :

La condition nécessaire et suffisante, pour que la fonction harmonique $u(x, y)$ soit la partie réelle d'une fonction $f(z)$ holomorphe autour de l'origine et à coefficients réels, est que les expressions

$$C_n^1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y} - C_n^3 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-3}\partial y^3} + \ldots$$

soient nulles à l'origine. Ceci résulte immédiatement de (8).

Supposons qu'il s'agisse de trouver une fonction harmonique $u(x, y)$, connaissant les valeurs de $\nabla_n u$ $(n = 1, 2, \ldots)$ à l'origine. On voit facilement que s'il en existe une, il en existe alors une infinité, obtenues en prenant pour les a_n des arguments quelconques, et, si $f(z)$ est une des fonctions $\Sigma a_n z^n$, on n'a qu'à prendre $u = \mathcal{R}[f(z)]$.

La condition de possibilité s'obtient en écrivant que le rayon de convergence de $\sum_0^\infty a_n z^n$ n'est pas nul, d'où l'on déduit les conditions auxquelles doivent satisfaire les $(\nabla_n u)_0$ de toute fonction harmonique, régulière autour de l'origine.

De même, de (7) on peut déduire une condition nécessaire pour qu'une fonction $F(x, y)$ soit le carré du module d'une fonction $f(z)$. Cette condition est que

$$(\Delta^{(n)} F(x, y) \geqq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

car $F(x, y) = u^2 + v^2$, et l'on a vu que $\Delta^{(n)} u^2$ s'exprime au moyen de $\nabla_n u$, qui est non négatif.

En général, toute propriété de $f(z)$, déduite des propriétés de la suite des $|a_n|$, peut se déduire aussi de celles de la suite $(\nabla_n u)_0$. Par conséquent, on peut obtenir de cette manière autant de théorèmes et de propriétés de $f(z)$ et dans lesquelles n'entrent que $\mathcal{R}[f(z)]$ et ses dérivées.

Par exemple, M. Lindelöf a montré que si

$$\sqrt[n]{|a_n|} < (1+\varepsilon)[\Lambda . n(\log n)^{\alpha_1} \ldots (\log_p)^{\alpha_p}]^{\frac{1}{\rho}},$$

à partir de $n > N$, alors à partir d'une valeur de r, $r > R$ on a

$$\log M(r) < \frac{1+\varepsilon}{\Lambda . e . \rho^{\alpha_1+1}} r^\rho (\log r)^{-\alpha_1} \ldots (\log_p r)^{-\alpha_p}.$$

Si l'on transpose cette propriété, on obtient la suivante :

Si la suite $(\nabla_n u)_0$ d'une fonction harmonique $u(x, y)$, régulière à l'origine, satisfait pour tout $n > N$ aux inégalités

$$\sqrt[2n]{(\nabla_n u)_0} < (1+\varepsilon_1)\frac{e}{\sqrt{2}}[\Lambda . n^{\rho+1}(\log n)^{\alpha_1} \ldots (\log_p n)^{\alpha_p}]^{\frac{1}{\rho}},$$

alors, $M(r)$, module maximum de la fonction $f(z)$ nulle à l'origine, pour laquelle $u = \mathcal{R}[f(z)$, satisfait à l'inégalité

$$\log M(r) < \frac{1+\varepsilon}{\Lambda . e . \rho^{\alpha_1+1}} r^\rho (\log r)^{-\alpha_1} \ldots (\log_p r)^{-\alpha_p},$$

pour r assez grand.

Sans insister davantage sur ces considérations, remarquons qu'elles se rattachent au point de vue de Riemann dans la théorie des fonctions analytiques de z. On sait quel est le point de vue de Cauchy et quel est celui de Riemann.

Pour ce dernier, l'étude d'une fonction analytique $f(z)$, c'est l'étude du couple des fonctions harmoniques u et v, liées par les relations de Cauchy-Riemann. Il y a plus : les propriétés de $f(z)$ doivent pouvoir se déduire seulement de la partie réelle (ou imaginaire) de $f(z)$, comme on l'a vu d'ailleurs plus haut. Inversement, par l'introduction de la suite $\nabla_n u$, des propriétés des fonctions analytiques $f(z)$, on peut déduire des propriétés pour les fonctions harmoniques $u(x, y)$.

Ces considérations élémentaires constituent une modeste contribution à cet ordre d'idées.