BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DESAINT

Sur la convergence des séries données par une relation de récurrence et le théorème de d'Alembert

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 216-221
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__216_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1929, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES DONNÉES PAR UNE RELATION DE RÉCURRENCE ET LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT;

PAR M. DESAINT.

Deux grands problèmes se posent à l'égard des séries dont le terme général n'est donné que par une loi de récurrence :

1° Étudier les conditions simples ou compliquées de convergence;

2° Étant donnée la série de puissances (complexes)

$$f(z) = \Sigma u_n z^n,$$

étudier les points singuliers de $f(z)$.

Je laisserai dans ce premier travail la deuxième question de côté. Elle n'a, je crois, jamais été sérieusement abordée dans l'Analyse, moderne. La première question ne semble pas avoir donné lieu à des travaux systématiques.

On a voulu souvent voir dans le critère de d'Alembert un simple critère de seconde espèce, intéressant. Il y a beaucoup plus. C'est, sous la forme linéaire, le premier et le plus élémentaire aspect d'une question de récurrence visant la convergence (ou la divergence) d'une série à *termes* positifs.

Partons de cette remarque :

« Soit une inégalité, à éléments positifs

$$u_n \varphi_0(u_n, \ldots, u_{n-p}) \leqq u_{n-1} \varphi_1(u_n, \ldots, u_{n-p}) + \ldots + u_{n-p} \varphi_p(u_n, \ldots, u_{n-p}),$$

où les fonctions

$$\begin{gathered}\varphi_0(x, y, \ldots, z),\\ \varphi_1(x, y, \ldots, z),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_p(x, y, \ldots, z),\end{gathered}$$

des $p+1$ variables $x, y, \ldots, z$, réelles et positives, sont bien déterminées pour ces valeurs. Nous admettrons que les éléments analytiques dont sont composées, par sommation, les fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_t sont identiques à ceux de φ_0 à des constantes *multiplicatives* près (qui peuvent être nulles), les éléments analytiques de

$$\varphi_0(x, y, \ldots, z),$$

étant au complet et tous positifs (coefficients compris) pour les valeurs positives des variables.

» En appelant K_1 une borne supérieure pour les modules des rapports des coefficients d'éléments isomorphes (coefficients multiplicateurs), lorsqu'il s'agit de

$$\varphi_0(x, y, \ldots, z)$$

et

$$\varphi_1(x, y, \ldots, z);$$

de même en appelant $K_2, \ldots, K_p$ des bornes supérieures analogues quand on compare successivement

$$\varphi_0(x, y, \ldots, z)$$

et

$$\varphi_2(x, y, \ldots, z),$$

enfin

$$\varphi_0(x, y, \ldots, z)$$

et

$$\varphi_p(x, y, \ldots, z),$$

la série de terme général u_n est convergente, sous la seule condition

$$K_1 + K_2 + \ldots + K_p < K' < 1,$$

K' étant un nombre fixe. »

Il n'y a qu'un mot à dire à ce sujet. On tire de l'isomorphisme des fonctions φ_0 et $\varphi_q (1 \leqq q \leqq p)$ et de l'introduction des bornes supérieures correspondantes $K_1, K_2, \ldots, K_p$ dans la question précédente

$$\varphi_q(x, y, \ldots, z) < K_q \varphi_0(x, y, \ldots, z).$$

L'inégalité devient donc

$$u_n < K_1 u_{n-1} + \ldots + K_q u_{n-q} + \ldots + K_p u_{n-p}.$$

Sous cette condition, la série de terme général u_n est convergente. Comme ce théorème n'est pas explicitement démontré, bien qu'il se trouve en rapport avec des travaux importants d'analyse, sa démonstration a lieu ainsi :

Si m_h désigne le plus grand des termes $u_{r_p+1}, \ldots, u_{hp+1}$, il résulte de cette relation précédente que

$$m_{h+1} < K' m_h < \ldots < K'^h m_1$$

et que par suite la série de termes général u_n est convergente.

Il va sans dire que la démonstration serait toujours valable si les quantités positives $K_1, K_2, \ldots, K_p$ dépendaient de n, pourvu que l'on ait

$$K_1(n) + K_2(n) + \ldots + K_p(n) < K' < 1,$$

K' étant un nombre fixe (indépendant de n).

Sous l'idée de d'Alembert, voici un premier théorème précis, qui, pour une relation polynomale, donne simplement une condition *suffisante* de convergence.

« Soit une relation de récurrence à $(p+1)$ éléments, pour une série à termes positifs

$$P(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}) = 0, \qquad P(0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

$P(x, y, \ldots, z)$ étant un polynome où les termes en x sont au complet et de même signe.

» En l'écrivant, ce qui est toujours possible,

$$u_n P_0(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}) - u_{n-1} P_1(u_{n-1}, u_{n-p}) - \ldots - u_{n-p} \cdot P_p(u_{n-p}) = 0,$$

si nous appelons K_1 une borne supérieure du module des rapports des coefficients des termes semblables de

$$P_1(y, \ldots, z)$$

et

$$P_0(x, y, \ldots, z)$$

et $K_2, \ldots, K_p$ les bornes supérieures analogues quand au lieu d'envisager P_1 on envisage successivement $P_2, \ldots, P_p$, sous la condition

$$K_1 + \ldots + K_p < K' < 1,$$

K' étant un nombre fixe, la série de terme général u_n est convergente. »

Soit, en effet, un polynome, nous pouvons l'écrire

$$P(x, y, \ldots, z) = x P_0(x, y, \ldots, z) - y P_1(y, \ldots, z) - z P_p(z) = 0,$$

si ce polynome s'annule à l'origine, ce qui est le cas.

Le premier terme, en effet, est obtenu en groupant les éléments qui contiennent x, le deuxième en groupant les termes y parmi ceux qui restent, et ainsi de suite.

Nous aurons donc, dans la relation de récurrence,

$$u_n P_0(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}) - u_{n-1} P_1(u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}) - \ldots - u_{n-p} P_p(u_{n-p}) = 0.$$

Sans diminuer la généralité de la démonstration, nous supposerons tous les coefficients de P_0 (même signe) positifs. Il suffirait au préalable de changer le signe des deux membres de l'égalité s'il n'en était pas ainsi.

Les rapports $K_1, K_2, \ldots, K_p$ introduits ici donnent pour toutes valeurs possibles des variables positives,

$$P_1(y, \ldots, z) < K_1 P_0(x, y, \ldots, z).$$

Le fait que P_1 renfermerait des coefficients négatifs ne ferait qu'avantager cette inégalité. Mais il reste bien entendu que la relation de récurrence doit se conformer à $u_n > 0$.

Pareillement

$$P_2(y, \ldots, z) < K_2 P_0(x, y, \ldots, z).$$

Etc.

Ainsi, l'égalité précédente devient

$$u_n P_0 < u_{n-1} K_1 P_0 + u_{n-2} K_2 P_0 + \ldots + u_{n-p} K_p P_0,$$

d'où

$$u_n < K_1 u_{n-1} + K_2 u_{n-2} + \ldots + K_p u_{n-p},$$

qui assure la convergence de la série u_n, sous la condition

$$K_1 + K_2 + \ldots + K_p < K' < 1.$$

Je ferai remarquer au sujet d'une objection possible que lorsqu'un polynome P est complet en x, en l'écrivant

$$P \equiv x P_0(x, y, \ldots, z) - y P_1(y, \ldots, z) - \ldots - z P_p(z),$$

si le polynome donné est de degré m, les polynomes qui sont dans le second membre sont de degré $m - 1$; donc $P_0(x, y, \ldots, z)$ renfermera, puisqu'il est complet et de degré $m - 1$, tous les termes semblables à ceux de $P_1, \ldots, P_p$.

D'ailleurs, si, plus généralement, la relation polynomale s'écrivait

$$P(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}, n) = 0,$$

l'entier n s'introduisant comme $(p+2)^{\text{ième}}$ variable, sous la condition

$$K_1(n) + \ldots + K_p(n) < K' < 1,$$

K' étant fixe, indépendant de n et les nombres K_q étant les bornes supérieures introduites mais dépendant ici de n, la série u_n serait convergente.

Un problème qui se présenterait alors serait, d'après des comparaisons simples faites sur des relations polynomales de récurrence, d'établir la convergence de séries de plus en plus compliquées sans être tenu d'appliquer toujours le théorème précédent. J'y reviendrai.

Il y aurait lieu de considérer maintenant le cas d'une relation de récurrence à forme transcendante entière : je dirai que l'extension à ce cas de la méthode précédente en est simple.

Il resterait encore à résoudre le cas de récurrence à un nombre quelconque d'indices, leur nombre augmentant indéfiniment avec n.

Une question de convergence, plus facile à résoudre, se présente quand on sait que le terme général u_n *tend* vers zéro. Cette question peut avoir été envisagée, mais n'a pas été traitée d'une façon systématique.

« Étant donnée une relation de récurrence

$$F(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}) = 0, \qquad F(0, 0, \ldots, 0) = 0,$$

à $(p+1)$ éléments (p fini) concernant une série à termes positifs, considérons la fonction à $(p+1)$ variables

$$F(x, y, \ldots, z),$$

dont nous admettrons que les dérivées existent au voisinage de l'origine, la dérivée F'_x par rapport à x restant toujours différente de zéro dans ces conditions.

» En appelant $M_1, M_2, \ldots, M_p$ des bornes supérieures pour les modules de $F'_y, \ldots, F'_z$ et m une borne inférieure pour le module de F'_x au voisinage de l'origine (pour ces diverses dérivées), il suffit, si l'on sait à l'avance que u_n tend vers zéro, que l'on ait

$$\frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_p}{m} < K' < 1,$$

K' étant fixe, pour assurer la convergence de la série. »

En effet le théorème des accroissements finis nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 = F(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}) - F(0, 0, \ldots, 0) = {} & u_n \; F'_x(\theta u_n, \ldots, \theta u_{n-p}) \\ & + u_{n-1} F'_y(\theta u_n, \ldots, \theta u_{n-p}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_{n-p} F'_z(\theta u_n, \ldots, \theta u_{n-p}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n F'_x(\theta u_n, \ldots, \theta u_{n-p}) = -u_{n-1} F'_y(\theta u_n, \ldots, \theta u_{n-p}) - \ldots$$
$$- u_{n-p} F'_z(\theta u_n, \ldots, \theta u_{n-p}).$$

Comme la première dérivée partielle est différente de zéro au voisinage de l'origine, avec les notations de l'énoncé nous avons

$$u_n = -u_{n-1} \frac{F'_y}{F'_x} - \ldots - u_{n-p} \frac{F'_z}{F'_x}$$

et les quantités $u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-p}$ étant positives, on pourra écrire, le module d'une somme étant inférieur à la somme des modules,

$$u_n < \frac{M_1}{m} u_{n-1} + \ldots + \frac{M_p}{m} u_{n-p}.$$

La série sera donc convergente d'après ce que nous avons vu si

$$\frac{M_1}{m} + \ldots + \frac{M_p}{m} < K' < 1$$

(K' étant un nombre fixe).

Il reste un cas délicat à traiter : c'est celui où la fonction

$$F(x, y, \ldots, z)$$

est simplement continue au voisinage de l'origine, les dérivées partielles pouvant ne pas exister dans leur totalité.

On peut alors pour les séries à termes positifs, ou bien constituer une fonction majorante de

$$F(x, y, \ldots, z),$$

au voisinage des valeurs de faible grandeur positive pour $x, y, \ldots, z$ (u_n est supposé tendre ici vers zéro), ou bien faire appel, ce qui est pratiquement difficile à introduire sans complications, à un polynome d'approximation pour la fonction continue

$$F(x, y, \ldots, z).$$

Pour achever ce travail, je rappellerai qu'il a été rédigé avec l'idée de d'Alembert, comme pensée directrice. D'autres méthodes pourront sans doute intervenir utilement pour résoudre la convergence de séries données par récurrence.