L. GODEAUX

Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques

Bulletin de la S. M. F., tome 57 (1929), p. 26-41
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__26_0>

SUR LES SURFACES DONT LES QUADRIQUES DE LIE N'ONT QUE TROIS POINTS CARACTÉRISTIQUES;

PAR M. L. GODEAUX
(Liége).

Soient (x) une surface, u, v ses asymptotiques. En chaque point d'une ligne u, menons la tangente à la ligne v passant par ce point; nous obtenons ainsi une réglée asymptotique R_u associée à la surface (x). On définit les réglées asymptotiques R_v en permutant les rôles des lignes u, v. Les demi-quadriques osculatrices aux réglées R_u, R_v relatives aux lignes u, v passant par un point x de la surface (x), le long des génératrices passant par ce point, ont comme support une même quadrique. la quadrique de Lie relative au point x de la surface (x) (¹). M. Demoulin a démontré (²) que les quadriques de Lie d'une surface ont en général cinq points caractéristiques et il a étudié les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Dans un travail récent (³), nous avons attaché à tout point x d'une surface (x) une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie, telle que deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points; ces points sont précisément des points caractéristiques de ces quadriques. Nous sommes arrivés à nos résultats en utilisant la représentation des tangentes à la surface (x) sur une hyperquadrique de l'espace à cinq dimensions (⁴). Nous avons pu alors compléter

---

(¹) Ce théorème, énoncé sans démonstration par Lie, a été démontré par M. DEMOULIN, *Sur quelques propriétés des surfaces courbes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, p. 565-568).

(²) *Sur la quadrique de Lie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, p. 493-496); *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 179, 1924, p. 20-22).

(³) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, p. 812-826; 1928, p. 31-41).

(⁴) Cette représentation a été utilisée par M. BOMPIANI dans son Mémoire *Sull' equazione di Laplace* (*Rend. Circ. matem. di Palermo*, t. 34, 1912, p. 383-407) et par M. TZITZÉICA dans son Ouvrage sur la *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Paris, Gauthier-Villars, 1924). M. Bompiani est revenu les résultats de M. Demoulin sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques [1]. Dans ce travail, nous nous proposons d'établir quelques propriétés des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.

1. Rappelons tout d'abord quelques résultats que nous avons obtenus et qui nous sont nécessaires pour la suite.

Soit (x) une surface rapportée à ses asymptotiques u, v et que nous supposerons non réglée. Les coordonnées projectives homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point x de la surface (x) satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles qui, en choisissant convenablement le facteur de proportionnalité, peut, d'après Wilczynski [2], prendre la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x^{20} + 2\,bx^{01} + c_1 x = 0, \\ x^{02} + 2\,ax^{10} + c_2 x = 0. \end{cases}$$

On a posé

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k}.$$

La surface (x) n'étant pas réglée, les fonctions a, b ne sont pas identiquement nulles.

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$(2)\qquad \begin{cases} a^{20} + c_2^{10} + 2\,ba^{01} + 4ab^{01} = 0, \\ b^{02} + c_1^{01} + 2\,ab^{10} + 4\,ab^{10} = 0, \\ c_1^{02} + 2\,ac_1^{10} + 4\,a^{10}c_1 = c_2^{20} + 2\,bc_2^{01} + 4\,b^{01}c_2. \end{cases}$$

La tangente à la ligne asymptotique u de la surface (x) en un point x passe par le point x^{10} de coordonnées x_1^{10}, x_2^{10}, x_3^{10}, x_4^{10}.

---

récemment à diverses reprises sur cette question; on trouvera un exposé de ses travaux sur ce sujet dans le paragraphe VI de son Mémoire *I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve et delle superficie*, publié en appendice au second volume de la *Geometria proiettiva differenziale* de MM. Fubini et Cech (Bologne, Zanichelli, 1927).

[1] *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (*Bull de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, p. 158-186; 345-348); *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (*Ibid.*, 1928, p. 455-466).

[2] Wilczynski, *Projective differential geometry of curved surfaces* (*Transactions of the american Math. Society*, t. VIII, 1907, p. 233-260; t. IX, 1908, p. 79-120).

Les coordonnées radiales de cette droite xx^{10} sont

$$U_{ik} = x_i x_k^{10} - x_k x_i^{10} \qquad (i, k, = 1, 2, 3, 4).$$

Nous représenterons par U le point image de cette droite sur l'hyperquadrique Q d'équation

$$\Omega(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

représentant, dans un espace linéaire à cinq dimensions, les droites de l'espace. Nous ècrirons, en abrégé,

$$U = | x \quad x^{10} |,$$

et nous poserons de même

$$V = | x \quad x^{01} |.$$

Les surfaces (U), (V) sont, d'après MM. Bompiani et Tzitzéica (*loc. cit.*), consécutives dans une suite de Laplace. En posant

$$U^{ik} = \frac{\partial^{i+k} U}{\partial u^i \partial v^k}, \ldots,$$

les points U, V satisfont aux équations de Laplace

$$U^{11} - (\log b)^{01} U^{10} - 4\, ab\, U = 0,$$
$$V^{11} - (\log a)^{10} V^{01} - 4\, ab\, V = 0,$$

et l'on a

$$U^{10} + 2\, b V = 0, \qquad V^{01} + 2\, a V = 0.$$

Désignons par U_1, U_2, ... les transformés de Laplace successifs de U dans le sens des v, par V_1, V_2, ... ceux de V dans le sens des u. En posant

$$h_i = -(\log b h_1 h_2 \ldots h_{i-1})^{11} + h_{i-1},$$
$$k_i = -(\log a k_1 k_2 \ldots k_{i-1})^{11} + k_{i-1},$$

nous avons

$$U_i = U_{i-1}^{01} - (\log b h_1 h_2 \ldots h_{i-1})^{01} U_{i-1},$$
$$V_i = V_{i-1}^{10} - (\log a k_1 k_2 \ldots k_{i-1})^{10} V_{i-1}.$$

Nous avons montré que la suite de Laplace ..., U, V, ... est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Précisément, les points ci-dessous ont pour hyperplans polaires :

Points.	Hyperplans polaires.
U_i	$V_{i-2}V_{i-1}V_iV_{i+1}V_{i+2}$
....	....
U_1	$UVV_1V_2V_3$
U	$U_1UVV_1V_2$
V	$U_2U_1UVV_1$
V_1	$U_3U_2U_1UV$
....	....
V_i	$U_{i+2}U_{i+1}U_iU_{i-1}U_{i-2}$

Les plans $U_i\ U_{i+1}\ U_{i+2}$ et $V_i\ V_{i+1}\ V_{i+2}$ étant conjugués par rapport à Q, les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent deux demi-quadriques ayant même support Φ_i. En particulier, pour $i = 0$, et en posant $U_0 = U$, $V_0 = V$, on obtient la quadrique de Lie $\Phi_0 = \Phi$ relative au point x.

Deux quadriques Φ_{i-1}, Φ_i se touchent en quatre points, sommets de faisceaux de rayons représentés par les droites de Q joignant les points de rencontre de la droite U_iU_{i+1}, avec cette hyperquadrique, aux points de rencontre de la droite V_iV_{i+1} avec Q également. Ces quatre points sont des points caractéristiques pour les quadriques Φ_{i-1}, Φ_i.

En particulier, les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ sont les sommets de faisceaux de rayons représentés sur Q par la droite UV et par les droites de Q s'appuyant à la fois sur les droites U_1U_2 et V_1V_2. Les quatre derniers points sont les sommets du tétraèdre de Demoulin relatif au point x de la surface (x).

2. Les points x, x^{10}, x^{01}, x^{11} ne peuvent être dans un même plan, par suite les coordonnées d'un point de l'espace peuvent se mettre sous la forme

$$z_1x_i + z_2x_i^{10} + z_3x_i^{01} + z_4x_i^{11} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nous dirons que ce point est représenté par

$$z_1x + z_2x^{10} + z_3x^{01} + z_4x^{11}$$

et que z_1, z_2, z_3, z_4 sont les coordonnées *locales* de ce point.

De même, si nous considérons sur l'hyperquadrique Q les points

$$M_1 = |x \quad x^{11}|, \qquad M_2 = |x^{10} \quad x^{01}|, \qquad M_3 = |x^{10} \quad x^{11}|, \qquad M_4 = |x^{01} \quad x^{11}|,$$

toute droite de l'espace pourra être représentée sur Q par un point

$$Z_{12}U + Z_{13}V + Z_{14}M_1 + Z_{23}M_2 + Z_{24}M_3 + Z_{34}M_4,$$

et $Z_{12}, \ldots, Z_{34}$ seront appelées coordonnées radiales locales de cette droite.

Cela étant, la quadrique de Lie Φ relative au point x de la surface (x) a pour équation locale

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2ab z_4^2 = 0,$$

et ses points caractéristiques sont donnés par

$$4 z_2^2 + 4(\log b)^{01} z_2 z_4 + \left[\beta + \overline{(\log b)^{01}}^2\right] z_4^2 = 0,$$

$$4 z_3^2 + 4(\log a)^{10} z_3 z_4 + \left[\alpha + \overline{(\log a)^{10}}^2\right] z_4^2 = 0,$$

moyennant

$$\alpha = 2(\log a)^{20} + \overline{(\log a)^{10}}^2 + 4(b^{01} + c_1),$$

$$\beta = 2(\log b)^{02} + \overline{(\log b)^{01}}^2 + 4(a^{10} + c_2).$$

Pour que les quadriques Φ aient moins de cinq points caractéristiques, il faut que l'une au moins des quantités α, β soit nulle. Si α et β sont toutes deux nulles, il y a deux points caractéristiques; si l'une de ces quantités est seule nulle, il y a trois points caractéristiques.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons β identiquement nulle, α différente de zéro. Nous supposerons de plus que la suite de Laplace ..., U, V, ... est illimitée dans les deux sens et que par suite aucune des fonctions $h_1, h_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ n'est identiquement nulle. Enfin, nous supposerons que le rapport de a à b n'est pas le produit d'une fonction de u seule par une fonction de v seule.

Observons qu'en utilisant la première des conditions d'intégrabilité (2), nous avons

$$\beta^{10} = -2h_1(\log bh_1)^{01} = 0,$$

et par suite

$$(\log bh_1)^{01} = 0.$$

On en déduit

$$h_2 = -(\log b h_1)^{11} + h_1 = h_1, \qquad h_3 = 4\,ab_2 \qquad h_4 = k_1,$$

et plus généralement

$$h_i = k_{i-3} \qquad (i = 4, 5, \ldots).$$

3. Nous avons

$$U_1 = M_1 - M_2 - (\log b)^{01} U,$$
$$U_2 = U_1^{01} - (\log b h_1)^{01} U_1 = U_1^{01},$$
$$U_2 = \frac{1}{2}\overline{(\log b)}^{\,2}_{01} U + 4\,abV - (\log b)^{01}(M_1 - M_2) + 2\,M_4,$$
$$U_3 = -8\,a^2 b U - a\left[\alpha + \overline{(\log a)}^{\,2}_{10}\right] V + 2\,a(\log a)^{10}(M_1 + M_2) - 4\,a M_3.$$

Posons

$$\Omega(p, q) = p_{12} q_{34} + \ldots + p_{34} q_{12},$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{11} \end{vmatrix},$$

le second membre représentant le déterminant à 16 éléments formés avec les coordonnées des points x, x^{10}, x^{01}, x^{11}. On a alors, en observant que

$$\Omega(U, M_4) = -\Omega(V, M_3) = \Omega(M_1, M_2) = \Delta,$$

les relations suivantes :

$$\Omega(U_1, U_1) = -2\,\Delta, \qquad \Omega(U_1, U_2) = 0,$$
$$\Omega(U_2, U_2) = 0, \qquad \Omega(U_2, U_3) = 0,$$
$$\Omega(U_3, U_3) = -8\,a^2\alpha\Delta.$$

On en déduit que les points U_1, U_3 ne peuvent appartenir à l'hyperquadrique Q, que U_2 appartient à cette hyperquadrique et que U_1, U_3 sont conjugués de U_2 par rapport à cette hyperquadrique. Il en résulte que les droites $U_1 U_2$, $U_2 U_3$ touchent Q en U_2.

On peut déduire des relations précédentes une formule qui nous sera utile dans la suite. Dérivons la dernière de ces relations par rapport à u et observons que les dérivées partielles de Δ sont identiquement nulles, il vient

$$2\,\Omega(U_3, h_3 U_2) = 2\,h_3 \Omega(U_3, U_2) = -8(a^2\alpha)^{10}\Delta = 0,$$

et par suite

$$(a^2\alpha)^{10} = a^2\alpha^{10} + 2\,a\alpha a^{10} = 0.$$

Cette relation peut d'ailleurs être obtenue en remarquant que, en vertu des relations (2), nous avons

$$a\alpha^{10} + 2\,\alpha a^{10} = b\beta^{01} + 2\,\beta b^{01} = 0.$$

4. Le plan $U_1U_2U_3$ étant tangent à l'hyperquadrique Q en U_2, il rencontre cette hyperquadrique suivant deux droites passant par U_2. Ces deux droites représentent deux faisceaux de rayons ayant en commun la droite d, représentée par U_2. Nous désignerons par y_1, y_2 les sommets de ces faisceaux, par η_1, η_2 leurs plans. La quadrique Φ_i dégénère en deux plans η_1, η_2.

Le plan $V_1V_2V_3$ coupe Q suivant une conique qui représente un système de génératrices de la quadrique Φ_1, par suite cette conique est dégénérée en deux droites qui représentent deux faisceaux de rayons dont les plans sont nécessairement η_1, η_2. Nous verrons que les sommets de ces faisceaux sont les points y_2, y_1.

Désignons par D_1, D_2 les points où la droite V_1V_2 coupe Q, par d_1, d_2 les droites représentées par ces points. Le point V_1^{10} appartenant à la droite V_1V_2, les points D_1, D_2 pourront être représentés, pour des valeurs convenables ξ, par

$$V_1^{10} + \xi V_1.$$

Nous avons

$$V_1 = M_1 + M_2 - (\log a)^{10} V,$$

$$V_1^{10} = 4\,abU - \frac{1}{2}\left[\alpha - \overline{(\log a)}^{2}_{10}\right]V - (\log a)^{10}(M_1 + M_2) + 2\,M_3.$$

Les valeurs de ξ doivent satisfaire à la relation

$$\Omega(V_1^{0}, V_1^{0}) + 2\,\xi\,\Omega(V_1, V_1^{0}) + \xi^2\,\Omega(V_1, V_1) = 0,$$

exprimant que D_1, D_2 appartiennent à Q. Cette relation se réduit à

(3) $$\xi^2 + \alpha = 0.$$

Les points D_1 et D_2 sont donc distincts.

Observons maintenant que l'on a

(4) $$U_3 + 2\,a\alpha V + 2\,a(\log ak_1)^{10}V_1 + 2\,aV_2 = 0.$$

En dérivant par rapport à u, on déduit de cette relation

$$(5)\qquad 2bU_2+[\alpha+(\log ak_1)^{20}+(\log ak_1)^{10}(\log a^2k_1)^{10}]V_1 + (\log a^3k_1^2k_2)^{10}V_2+V_3=0,$$

c'est-à-dire que les points U_2, V_1, V_2, V_3 sont situés dans un même plan.

Les points de la droite V_1V_2 étant conjugués du point U_2 par rapport à Q, les droites U_2D_1, U_2D_2 appartiennent à Q et forment l'intersection du plan $V_1V_2V_3$ avec cette hyperquadrique.

5. Les coordonnées radiales locales de la droite d, représentée par U_2, étant

$$Z_{12}:Z_{13}:Z_{14}:Z_{23}:Z_{25}:Z_{34}=\frac{1}{2}\overline{(\log b)}^{2}_{01}:4ab:-(\log b)^{01}:(\log b)^{01}:0:2,$$

les équations locales de cette droite sont

$$(d)\qquad \begin{cases} 2z_1(\log b)^{01}-8abz_2+\overline{(\log b)}^{2}_{01}z_3=0,\\ 2z_2+(\log b)^{01}z_4=0.\end{cases}$$

Les droites formant l'intersection de Q et du plan $U_1U_2U_3$ seront déterminées par U_2 et par les points communs à Q et à la droite U_1U_3. Représentons un de ces points par

$$\lambda U_1+U_3,$$

λ devant satisfaire à la relation

$$\lambda^2\Omega(U_1,U_1)+2\lambda\Omega(U_1,U_3)+\Omega(U_3,U_3)=0$$

Cette relation se réduit à

$$(6)\qquad \lambda^2+4a^2\alpha=0.$$

Désignons par ξ une racine déterminée de l'équation (3). Un des points de rencontre de la droite U_1U_3 avec Q sera alors

$$J_1=2a\xi U_1+U_3,$$

et les équations locales de la droite j_1 seront

$$(j_1)\qquad \begin{cases} 2z_3+[(\log a)^{10}-\xi]z_4=0,\\ 2z_1+[(\log a)^{10}+\xi]z_2+[4ab+\xi(\log b)^{01}]z_4=0.\end{cases}$$

Les droites d, j_1 ont en commun le point y_1 de coordonnées locales

$$(y_1)\quad 8ab-(\log b)^{01}[(\log a)^{10}-\xi],\ 2(\log b)^{01},\ 2[(\log a)^{10}]-\xi,\ -4.$$

Elles sont contenues dans le plan η_1, l'équation locale

$$(\eta_1)'\qquad \begin{aligned}&4z_1+2z_2[(\log a)^{10}+\xi]\\ &\quad+2z_3(\log b)^{01}+z_4[8ab+(\log b)^{01}\{(\log a)^{10}+\xi\}]=0.\end{aligned}$$

La seconde racine de l'équation (3) étant $-\xi$, le point y_2 aura pour coordonnées locales

$$(y_2)\quad 8ab-(\log b)^{01}[(\log a)^{10}+\xi],\ 2(\log b)^{01},\ 2[(\log a)^{10}+\xi],\ -4,$$

et le plan η_2 aura pour équation locale

$$(\eta_2)\qquad \begin{aligned}&4z_1+2z_2[(\log a)^{10}-\xi]\\ &\quad+2z_3(\log b)^{01},\ z_4[8ab+(\log b)^{01}\{(\log a)^{10}-\xi\}]=0.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que le point

$$D_1=V_1^{10}+\xi V_1$$

corresponde à la racine ξ de l'équation (3) choisie plus haut. La droite d_1 correspondante a pour équations locales

$$(d_1)\qquad \begin{cases}2z_3+z_4[(\log a)^{10}-\xi]=0,\\ 2z_1+z_2[(\log a)^{10}-\xi]+4abz_4=0.\end{cases}$$

On voit aisément que les droites d, d_1 ont en commun le point y_1 et appartiennent au plan η_2. De même, les droites d, d_2 ont en commun le point y_2 et sont situées dans le plan η_1.

Les points y_1, y_2 sont, avec x, les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ; ils engendrent par suite les surfaces focales (y_1), (y_2) de la congruence (d). Les plans focaux de la droite d sont les plans η_1, η_2. Le plan η_2 est tangent en y_1 à la surface (y_1) et le plan η_1 en y_2 à la surface (y_2).

La quadrique Φ_1 dégénère en deux plans : les plans focaux η_1, η_2 de la droite d. Une des demi-quadriques ayant pour support Φ_1 est formée des faisceaux de rayons (y_1, η_1), (y_2, η_2) dont les sommets sont les foyers de la droite d; l'autre demi-quadrique est formée des faisceaux de rayons (y_1, η_2), (y_2, η_1).

6. Le point U_2 satisfaisant à une équation de Laplace, la droite d engendre, d'après un théorème de Darboux, une congruence W.

Aux développables de la congruence (d) correspondent, sur la surface (U_2), des courbes dont toutes les tangentes appartiennent à l'hyperquadrique Q. Une de ces courbes est donc enveloppée par la droite U_2J_1 et, par suite, l'équation différentielle des développables de la congruence (d) s'obtiendra en posant $\lambda = du : dv$ dans l'équation (6) et sera donc

$$du^2 + 4\,a^2\alpha\,dv^2 = 0.$$

Ces développables correspondent donc aux courbes d'un réseau conjugué de la surface (x), résultat déjà établi par M. Thomsen [1].

Aux tangentes à la surface (y_1) correspondent, sur Q, les points des droites U_2D_1. Pour qu'un point X de cette droite représente une tangente asymptotique de la surface (y_1), il faut que le plan tangent en ce point à la surface qu'il engendre soit tangent à l'hyperquadrique Q le long de la droite U_2D_1. Posons

$$X = \lambda U_2 + \mu D_1.$$

L'expression

$$\Omega(X^{10}du + X^{01}dv,\quad X^{10}du + X^{01}dv)$$

devra tout d'abord se réduire à un carré parfait. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car le plan tangent en X à la surface (X) contient certainement la droite U_2D_1 et, par suite, la condition étant remplie, ce plan tangent rencontrera Q suivant cette droite comptée deux fois. La condition en question donne les deux solution $\lambda = 0$, $\mu = 1$ et

$$2\,a\xi\lambda + (\xi^{01} + k_1)\mu = 0.$$

La droite d_1 est donc une tangente asymptotique de la surface (y_1). Un calcul simple montre que l'équation

$$\Omega(D_1^{10}du + D_1^{01}dv,\quad D_1^{10}du + D_1^{01}dv) = 0$$

---

(1) *Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projectiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der systeme von Flächen zweiter Ordnung* (*Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität*, Bd IV, 1925, p. 232-266).

se réduit à $dv = 0$. On voit ensuite qu'au point

$$(\xi^{01} + k_1)U_2 - 2a\xi D_1$$

correspond l'équation $du = 0$. Par suite, les courbes u, v sont les asymptotiques de la surface (y_1) et les droites d_1 sont tangentes aux asymptotiques u.

En changeant ξ en $-\xi$, on obtient les résultats concernant la droite U_2D_2 et le point y_2. On voit ainsi que :

Dans la correspondance entre les surfaces (x), (y_1), (y_2), les asymptotiques sont conservées (¹). *Les droites d_1, d_2 sont respectivement les tangentes asymptotiques aux lignes u des surfaces (y_1), (y_2).*

7. Les directrices de Wilczynski de la surface (x) relatives au point x sont représentées sur Q par les points où la droite U_1V_1 rencontre cette hyperquadrique. Précisément, le point

$$R = 2M_1 - (\log b)^{01}U - (\log a)^{10}V$$

représente la directrice de Wilczynski r passant par le point x et dont les équations locales sont

$$(r) \qquad \frac{z_2}{(\log b)^{01}} = \frac{z_3}{(\log a)^{10}} = \frac{z_4}{-2}.$$

Le point

$$S = 2M_2 + (\log b)^{01}U - (\log a)^{10}V$$

représente la directrice s située dans le plan tangent à (x) en x et dont les équations locales sont

$$(s) \qquad 2z_1 + z_2(\log a)^{10} + z_3(\log b)^{01} = 0, \qquad z_4 = 0.$$

Nous avons étudié récemment les congruences formées par les directrices de Wilczynski (²). L'équation différentielle des développables est la même pour les deux congruences et se réduit dans

(¹) Ce résultat a déjà été signalé par M. Demoulin (*C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, *loc. cit.*) et par M. Thomsen dans son Mémoire *Sulle superficie minime proiettive* (*Annali di Matematica*, t. V, 1927-1928, p. 169-184).

(²) *Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, p. 335-345).

le cas actuel à

$$\alpha\, du^2 + 2\left(\log\frac{a}{b}\right)^{11} du\, dv = 0 \tag{7}$$

Les points focaux de la droite sont

$$\begin{aligned} p &= [16\,ab - 2(\log b)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x \\ &\qquad + 2\,x^{10}(\log b)^{01} + 2\,x^{01}(\log a)^{10} - 4\,x^{11}, \\ q &= [16\,ab - 2(\log a)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x \\ &\qquad + 2\,x^{10}(\log b)^{01} + 2\,x^{01}(\log a)^{10} - 4\,x^{11}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} 2(h_1 - k_1)\,q^{01} &= [2\,a\alpha - (h_1 + k_1)(\log b)^{01} - 2\,k_1^{01}]\,q \\ &\qquad + 2[k_1(\log b k_1)^{01} - a\alpha]\,p. \end{aligned}$$

Les foyers de la droite s sont

$$\begin{aligned} m &= 2(h_1 - k_1)[x(\log a)^{10} - 2\,x^{10}] + \alpha[x(\log b)^{01} - 2\,x^{01}], \\ n &= x(\log b)^{01} - 2\,x^{01}, \end{aligned}$$

et l'on a

$$2(h_1 - k_1)\,n^{01} + [(h_1 - k_1)(\log b)^{01} - 2\,a\alpha]\,n + 2\,am = 0.$$

Les plans focaux de la droite s ont pour équations locales

$$\begin{aligned} &4\,z_1 + 2\,z_2(\log a)^{10} \\ &\qquad + 2\,z_3(\log b)^{01} + [2(\log a)^{11} + (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,z_4 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &4\,z_1 + 2\,z_2(\log a)^{10} \\ &\qquad + 2\,z_3(\log b)^{01} + [2(\log b)^{11} + (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,z_4 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Le premier est tangent en m à la surface (m), le second en n à la surface (n).

Les plans (8), (9) rencontrent la droite r respectivement aux points

$$\begin{aligned} m' &= [2(\log a)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x \\ &\qquad + 2(\log b)^{01}x^{10} + 2(\log a)^{10}x^{01} - 4\,x^{11}, \\ n' &= [2(\log b)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]\,x \\ &\qquad + 2(\log b)^{01}x^{10} + 2(\log a)^{10}x^{01} - 4\,x^{11}. \end{aligned}$$

Tout point de la droite r peut être représenté par

$$\lambda p + \mu q.$$

Si ce point coïncide avec m', on a

$$(h_1+k_1)\lambda+2k_1\mu=0,$$

et s'il coïncide avec n',

$$2h_1\lambda+(h_1+k_1)\mu=0.$$

Cela étant, l'involution déterminée sur la droite r par les couples p, n' et q, m' est représentée par

$$2h_1\lambda_1\lambda_2+(h_1+k_1)(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)+2k_1\mu_1\mu_2=0.$$

Les points doubles de cette involution sont donnés par

$$\lambda+\mu=0, \qquad h_1\lambda+k_1\mu=0.$$

Le premier de ces points est le point x, le second est un point

$$y=[8ab-(\log a)^{10}(\log b)^{01}]x+2(\log b)^{01}x^{10}+2(\log a)^{10}x^{01}-4x^{11}.$$

Nous allons établir une seconde propriété du point y.

Le point y_1+y_2 a pour coordonnées locales

$$16ab-2(\log a)^{10}(\log b)^{01}, \quad 4(\log b)^{01}, \quad 4(\log a)^{10}, \quad -8.$$

Par suite nous avons

$$2y=y_1+y_2.$$

Le point y est précisément le point d'appui de la droite d sur la droite r.

Si p, q sont les foyers de la droite r; m', n' les points de rencontre de r avec les plans focaux de la droite s correspondant aux mêmes solutions de l'équation (7) que p, q respectivement, l'involution déterminée sur la droite r par les couples de points p, n' et q, m', possède comme points doubles le point x et le point d'appui de d sur r (¹).

Observons que le point y_1-y_2 a pour coordonnées locales

$$2\xi(\log b)^{01}, \quad 0, \quad -4\xi, \quad 0.$$

(¹) Pour toute surface, il existe sur r un point y tel que les quaternes ($xypn'$), ($xyqm'$) sont harmoniques. Nous avons signalé cette propriété dans une communication faite au Congrès international des Mathématiciens de Bologne (1928).

Par suite, on a

$$y_1 - y_2 - 2\xi n = 0,$$

et la droite d s'appuie sur s au point n. De plus :

La droite d s'appuie sur les directrices de Wilczynski en des points partageant harmoniquement les foyers de cette droite.

8. La suite de Laplace ..., U, V, ... possède une propriété intéressante que nous allons établir.

Les relations (4), (5) obtenues plus haut montrent que le point U_3 appartient au plan VV_1V_2 et le point U_2 au plan $V_1V_2V_3$.

En dérivant la relation (4) par rapport à v, on obtient encore la relation

$$(10) \qquad U_4 - 4a^2\alpha U - 2ak_1(\log ak_1)^{10}V + 2ak_1V_1 = 0,$$

et le point U_4 appartient donc au plan UVV_1.

L'hyperplan polaire de U_4 par rapport à Q, c'est-à-dire l'hyperplan $V_2V_3V_4V_5V_6$, contient le plan conjugué de UVV_1, c'est-à-dire U_1UV.

Pour la même raison, l'hyperplan polaire $V_1V_2V_3V_4V_5$ de U_3 contient le plan UU_1U_2 et l'hyperplan polaire de U_2, c'est-à-dire $VV_1V_2V_3V_4$, contient le plan $U_1U_2U_3$. Il en résulte que le point U_1 appartient au plan $V_2V_3V_4$.

D'après ce qui précède, les points U, U_1 sont conjugués de U_3, U_4, par suite U appartient à l'espace $V_2V_3V_4V_5$. De plus, on a

$$(11) \qquad \Omega(U, U_4) = 0, \qquad \Omega(U_1, U_4) = 0.$$

En dérivant la première de ces relations par rapport à v et en tenant compte de la seconde, on trouve

$$(12) \qquad \Omega(U, U_5) = 0.$$

Le point U étant conjugué de U_5 appartient à l'hyperplan polaire $V_3V_4V_5V_6V_7$ de ce dernier. Par suite, U appartient au plan $V_3V_4V_5$ [1].

En dérivant la relation (12) par rapport à u et en tenant compte

[1] Il est évident que le point V_2 ne peut appartenir à l'hyperplan $V_3 \ldots V_7$.

de la première des relations (11), on trouve

$$(13)\qquad \Omega(V, U_5) = 0.$$

Le point V, étant conjugué de U_4, U_5, appartient à l'espace $V_3 V_4 V_5 V_6$. En dérivant (13) par rapport à v, on en tire, par (12),

$$\Omega(V, U_6) = 0.$$

Par suite, V appartient à l'hyperplan polaire $V_4 V_5 V_6 V_7 V_8$ de U_6 et par conséquent au plan $V_4 V_5 V_6$.

Supposons, plus généralement, que le point V_n appartienne au plan $V_{n+4} V_{n+5} V_{n+6}$. Alors, V_n est conjugué des points U_{n+4}, U_{n+5}, U_{n+6} par rapport à Q et l'on a

$$(14)\qquad \Omega(V_n, U_{n+4}) = 0, \qquad \Omega(V_n, U_{n+5}) = 0, \qquad \Omega(V_n, V_{n+6}) = .$$

En dérivant la seconde des relations (14) par rapport à u, on a

$$\Omega(V_{n+1}, U_{n+5}) + (\log a k_1 \ldots k_n)^{10} \Omega(V_n, U_{n+5}) + h_{n+5} \Omega(V_n, U_{n+4}) = 0.$$

Par suite, on a

$$\Omega(V_{n+1}, U_{n+5}) = 0.$$

En partant de la troisième des équations (14), on tire de même

$$(15)\qquad \Omega(V_{n+1}, U_{n+6}) = 0.$$

On en conclut que V_{n+1} appartient à l'espace $V_{n+4} V_{n+5} V_{n+6} V_{n+7}$.

En dérivant (15) par rapport à v, on a

$$k_{n+1} \Omega(V_n, U_{n+6}) + \Omega(V_{n+1}, U_{n+7}) + (\log b h_1 (\ldots h_{n+6})^{01} \Omega(V_{n+1}, U_{n+6}) = 0.$$

On en tire

$$\Omega(V_{n+1}, U_{n+7}) = 0.$$

Par suite, V_{n+1} appartient à l'hyperplan $V_{n+5} \ldots V_{n+9}$ et par suite au plan $V_{n+5} V_{n+6} V_{n+7}$. D'une manière générale, on peut donc dire que le point V_n appartient au plan $V_{n+4} V_{n+5} V_{n+6}$ pour toute valeur de n.

L'hyperplan polaire $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$ de U_n par rapport à Q contient, d'après ce qui précède, les points V_{n-6}, V_{n-5}, V_{n-4}. Par suite, U_n appartient au plan $U_{n-6} U_{n-5} U_{n-4}$ conjugué du plan $V_{n-6} V_{n-5} V_{n-4}$.

Si l'on range les points de la suite de Laplace ..., U, V, ... de manière que l'un d'eux soit le transformé du précédent dans le sens des u, tout point de cette suite appartient au plan déterminé par les trois points occupant le quatrième, cinquième et sixième rang après le point considéré.

9. Nous allons maintenant considérer le cas où le rapport de a à b est le produit d'une fonction de u seule par une fonction de v seule. On a alors

$$(\log a)^{11} = (\log b)^{11}, \qquad h_1 = k_1.$$

L'équation différentielle (7) des développables des congruences de Wilczynski se réduit à

$$\alpha du^2 = 0.$$

Les foyers p, q de la droite r sont confondus et la congruence (r) est formée de tangentes asymptotiques d'une surface (p). De même, les foyers m, n de la droite s sont confondus et la congruence (s) est formée de tangentes asymptotiques d'une surface (n). Sur les surfaces (p), (n), les lignes v sont les asymptotiques.

Le premier des théorèmes établis au n° 7 n'a plus de sens; il doit être remplacé par le suivant : *Le quaterne de points* (x, y, p, n') *est harmonique.*