

# BULLETIN DE LA S. M. F.

L. GODEAUX

## **Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 57 (1929), p. 26-41

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1929\\_\\_57\\_\\_26\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1929__57__26_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1929, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES SURFACES DONT LES QUADRIQUES DE LIE  
N'ONT QUE TROIS POINTS CARACTÉRISTIQUES;**

PAR M. L. GODEAUX

(Liège).

Soient  $(x)$  une surface,  $u$ ,  $v$  ses asymptotiques. En chaque point d'une ligne  $u$ , menons la tangente à la ligne  $v$  passant par ce point; nous obtenons ainsi une réglée asymptotique  $R_u$  associée à la surface  $(x)$ . On définit les réglées asymptotiques  $R_v$  en permutant les rôles des lignes  $u$ ,  $v$ . Les demi-quadriques osculatrices aux réglées  $R_u$ ,  $R_v$  relatives aux lignes  $u$ ,  $v$  passant par un point  $x$  de la surface  $(x)$ , le long des génératrices passant par ce point, ont comme support une même quadrique, la quadrique de Lie relative au point  $x$  de la surface  $(x)$  <sup>(1)</sup>. M. Demoulin a démontré <sup>(2)</sup> que les quadriques de Lie d'une surface ont en général cinq points caractéristiques et il a étudié les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Dans un travail récent <sup>(3)</sup>, nous avons attaché à tout point  $x$  d'une surface  $(x)$  une suite de quadriques dont la première est la quadrique de Lie, telle que deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points; ces points sont précisément des points caractéristiques de ces quadriques. Nous sommes arrivés à nos résultats en utilisant la représentation des tangentes à la surface  $(x)$  sur une hyperquadrique de l'espace à cinq dimensions <sup>(4)</sup>. Nous avons pu alors compléter

---

<sup>(1)</sup> Ce théorème, énoncé sans démonstration par Lie, a été démontré par M. DEMOULIN, *Sur quelques propriétés des surfaces courbes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, p. 565-568).

<sup>(2)</sup> *Sur la quadrique de Lie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, p. 493-496); *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 179, 1924, p. 20-22).

<sup>(3)</sup> *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, p. 812-826; 1928, p. 31-41).

<sup>(4)</sup> Cette représentation a été utilisée par M. BOMPIANI dans son Mémoire *Sull' equazione di Laplace* (*Rend. Circ. matem. di Palermo*, t. 34, 1912, p. 383-407) et par M. TZITZÉICA dans son Ouvrage sur la *Géométrie différentielle projective des réseaux* (Paris, Gauthier-Villars, 1924). M. Bompiani est revenu

les résultats de M. Demoulin sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques (1). Dans ce travail, nous nous proposons d'établir quelques propriétés des surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques.

1. Rappelons tout d'abord quelques résultats que nous avons obtenus et qui nous sont nécessaires pour la suite.

Soit  $(x)$  une surface rapportée à ses asymptotiques  $u, v$  et que nous supposons non réglée. Les coordonnées projectives homogènes  $x_1, x_2, x_3, x_4$  d'un point  $x$  de la surface  $(x)$  satisfont à un système complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles qui, en choisissant convenablement le facteur de proportionnalité, peut, d'après Wilczynski (2), prendre la forme

$$(1) \quad \begin{cases} x^{20} + 2bx^{01} + c_1x = 0, \\ x^{02} + 2ax^{10} + c_2x = 0. \end{cases}$$

On a posé

$$x^{ik} = \frac{\partial^{i+k}x}{\partial u^i \partial v^k}.$$

La surface  $(x)$  n'étant pas réglée, les fonctions  $a, b$  ne sont pas identiquement nulles.

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$(2) \quad \begin{cases} a^{20} + c_2^{10} + 2ba^{01} + 4ab^{01} = 0, \\ b^{02} + c_1^{01} + 2ab^{10} + 4ab^{10} = 0, \\ c_1^{02} + 2ac_1^{10} + 4a^{10}c_1 = c_2^{20} + 2bc_2^{01} + 4b^{01}c_2. \end{cases}$$

La tangente à la ligne asymptotique  $u$  de la surface  $(x)$  en un point  $x$  passe par le point  $x^{10}$  de coordonnées  $x_1^{10}, x_2^{10}, x_3^{10}, x_4^{10}$ .

récemment à diverses reprises sur cette question; on trouvera un exposé de ses travaux sur ce sujet dans le paragraphe VI de son Mémoire *I fondamenti geometrici della teoria proiettiva delle curve et delle superficie*, publié en appendice au second volume de la *Geometria proiettiva differenziale* de MM. FUBINI et CECCH (Bologne, Zanichelli, 1927).

(1) *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1928, p. 158-186; 345-348); *Sur les congruences de M. Goursat et les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie* (Ibid., 1928, p. 455-466).

(2) WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curved surfaces* (Transactions of the American Math. Society, t. VIII, 1907, p. 233-260; t. IX, 1908, p. 79-120).

Les coordonnées radiales de cette droite  $xx^{10}$  sont

$$U_{ik} = x_i x_k^{10} - x_k x_i^{10} \quad (i, k, = 1, 2, 3, 4).$$

Nous représenterons par U le point image de cette droite sur l'hyperquadrique Q d'équation

$$\Omega(p, p) = p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$$

représentant, dans un espace linéaire à cinq dimensions, les droites de l'espace. Nous écrirons, en abrégé,

$$U = |x \quad x^{10}|,$$

et nous poserons de même

$$V = |x \quad x^{01}|.$$

Les surfaces (U), (V) sont, d'après MM. Bompiani et Tzitzéica (*loc. cit.*), consécutives dans une suite de Laplace. En posant

$$U^{ik} = \frac{\partial^{i+k} U}{\partial u^i \partial v^k}, \dots,$$

les points U, V satisfont aux équations de Laplace

$$U^{11} - (\log b)^{01} U^{10} - 4 ab U = 0,$$

$$V^{11} - (\log a)^{10} V^{01} - 4 ab V = 0,$$

et l'on a

$$U^{10} + 2 b V = 0, \quad V^{01} + 2 a U = 0.$$

Désignons par  $U_1, U_2, \dots$  les transformés de Laplace successifs de U dans le sens des  $v$ , par  $V_1, V_2, \dots$  ceux de V dans le sens des  $u$ . En posant

$$h_i = -(\log b h_1 h_2 \dots h_{i-1})^{11} + h_{i-1},$$

$$k_i = -(\log a k_1 k_2 \dots k_{i-1})^{11} + k_{i-1},$$

nous avons

$$U_i = U_{i-1}^{01} - (\log b h_1 h_2 \dots h_{i-1})^{01} U_{i-1},$$

$$V_i = V_{i-1}^{10} - (\log a k_1 k_2 \dots k_{i-1})^{10} V_{i-1}.$$

Nous avons montré que la suite de Laplace  $\dots, U, V, \dots$  est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q. Précisément, les

points ci-dessous ont pour hyperplans polaires :

| Points.     | Hyperplans polaires.              |
|-------------|-----------------------------------|
| $U_i$ ..... | $V_{i-2}V_{i-1}V_iV_{i+1}V_{i+2}$ |
| .....       | .....                             |
| $U_1$ ..... | $UVV_1V_2V_3$                     |
| $U$ .....   | $U_1UVV_1V_2$                     |
| $V$ .....   | $U_2U_1UVV_1$                     |
| $V_1$ ..... | $U_3U_2U_1UV$                     |
| .....       | .....                             |
| $V_i$ ..... | $U_{i+2}U_{i+1}U_iU_{i-1}U_{i-2}$ |

Les plans  $U_i U_{i+1} U_{i+2}$  et  $V_i V_{i+1} V_{i+2}$  étant conjugués par rapport à  $Q$ , les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent deux demi-quadriques ayant même support  $\Phi_i$ . En particulier, pour  $i = 0$ , et en posant  $U_0 = U$ ,  $V_0 = V$ , on obtient la quadrique de Lie  $\Phi_0 = \Phi$  relative au point  $x$ .

Deux quadriques  $\Phi_{i-1}$ ,  $\Phi_i$  se touchent en quatre points, sommets de faisceaux de rayons représentés par les droites de  $Q$  joignant les points de rencontre de la droite  $U_i U_{i+1}$ , avec cette hyperquadrique, aux points de rencontre de la droite  $V_i V_{i+1}$  avec  $Q$  également. Ces quatre points sont des points caractéristiques pour les quadriques  $\Phi_{i-1}$ ,  $\Phi_i$ .

En particulier, les points caractéristiques de la quadrique de Lie  $\Phi$  sont les sommets de faisceaux de rayons représentés sur  $Q$  par la droite  $UV$  et par les droites de  $Q$  s'appuyant à la fois sur les droites  $U_1 U$ , et  $V_1 V_2$ . Les quatre derniers points sont les sommets du tétraèdre de Demoulin relatif au point  $x$  de la surface  $(x)$ .

2. Les points  $x$ ,  $x^{10}$ ,  $x^{01}$ ,  $x^{11}$  ne peuvent être dans un même plan, par suite les coordonnées d'un point de l'espace peuvent se mettre sous la forme

$$z_1 x_i + z_2 x_i^{10} + z_3 x_i^{01} + z_4 x_i^{11} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nous dirons que ce point est représenté par

$$z_1 x + z_2 x^{10} + z_3 x^{01} + z_4 x^{11}$$

et que  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sont les coordonnées *locales* de ce point.

De même, si nous considérons sur l'hyperquadrique  $Q$  les points  $M_1 = |x \ x^{11}|$ ,  $M_2 = |x^{10} \ x^{01}|$ ,  $M_3 = |x^{10} \ x^{11}|$ ,  $M_4 = |x^{01} \ x^{11}|$ , toute droite de l'espace pourra être représentée sur  $Q$  par un point

$$Z_{12}U + Z_{13}V + Z_{14}M_1 + Z_{23}M_2 + Z_{24}M_3 + Z_{34}M_4.$$

et  $Z_{12}, \dots, Z_{34}$  seront appelées coordonnées radiales locales de cette droite.

Cela étant, la quadrique de Lie  $\Phi$  relative au point  $x$  de la surface  $(x)$  a pour équation locale

$$z_1 z_4 - z_2 z_3 + 2 ab z_7^2 = 0,$$

et ses points caractéristiques sont donnés par

$$\begin{aligned} 4 z_2^2 + 4(\log b)^{01} z_2 z_4 + \left[ \beta + (\overline{\log b})^{01} \right] z_4^2 &= 0, \\ 4 z_3^2 + 4(\log a)^{10} z_3 z_4 + \left[ \alpha + (\overline{\log a})^{10} \right] z_4^2 &= 0, \end{aligned}$$

moyennant

$$\begin{aligned} \alpha &= 2(\log a)^{10} + (\overline{\log a})^{10} + 4(b^{01} + c_1), \\ \beta &= 2(\log b)^{01} + (\overline{\log b})^{01} + 4(a^{10} + c_2). \end{aligned}$$

Pour que les quadriques  $\Phi$  aient moins de cinq points caractéristiques, il faut que l'une au moins des quantités  $\alpha, \beta$  soit nulle. Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont toutes deux nulles, il y a deux points caractéristiques; si l'une de ces quantités est seule nulle, il y a trois points caractéristiques.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons  $\beta$  identiquement nulle,  $\alpha$  différente de zéro. Nous supposerons de plus que la suite de Laplace  $\dots, U, V, \dots$  est illimitée dans les deux sens et que par suite aucune des fonctions  $h_1, h_2, \dots, k_1, k_2, \dots$  n'est identiquement nulle. Enfin, nous supposerons que le rapport de  $a$  à  $b$  n'est pas le produit d'une fonction de  $u$  seule par une fonction de  $v$  seule.

Observons qu'en utilisant la première des conditions d'intégrabilité (2), nous avons

$$\beta^{10} = -2 h_1 (\log b h_1)^{01} = 0,$$

et par suite

$$(\log b h_1)^{01} = 0.$$

On en déduit

$$h_2 = -(\log b h_1)^{11} + h_1 = h_1, \quad h_3 = 4 ab_1, \quad h_4 = k_1,$$

et plus généralement

$$h_i = k_{i-3} \quad (i = 4, 5, \dots).$$

3. Nous avons

$$U_1 = M_1 - M_2 - (\log b)^{01} U,$$

$$U_2 = U^{01} - (\log b h_1)^{01} U_1 = U^{01},$$

$$U_2 = \frac{1}{2} (\overline{\log b})^{20} U + 4 ab V - (\log b)^{01} (M_1 - M_2) + 2 M_4,$$

$$U_3 = -8 a^2 b U - a [\alpha + (\overline{\log a})^{20}] V + 2 \alpha (\log a)^{10} (M_1 + M_2) - 4 \alpha M_3.$$

Posons

$$\Omega(p, q) = p_{12} q_{34} + \dots + p_{34} q_{12},$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} x \\ x^{10} \\ x^{01} \\ x^{11} \end{vmatrix},$$

le second membre représentant le déterminant à 16 éléments formés avec les coordonnées des points  $x, x^{10}, x^{01}, x^{11}$ . On a alors, en observant que

$$\Omega(U, M_4) = -\Omega(V, M_3) = \Omega(M_1, M_2) = \Delta,$$

les relations suivantes :

$$\Omega(U_1, U_1) = -2 \Delta, \quad \Omega(U_1, U_2) = 0,$$

$$\Omega(U_2, U_2) = 0, \quad \Omega(U_2, U_3) = 0,$$

$$\Omega(U_3, U_3) = -8 a^2 \alpha \Delta.$$

On en déduit que les points  $U_1, U_3$  ne peuvent appartenir à l'hyperquadrique  $Q$ , que  $U_2$  appartient à cette hyperquadrique et que  $U_1, U_3$  sont conjugués de  $U_2$  par rapport à cette hyperquadrique. Il en résulte que les droites  $U_1 U_2, U_2 U_3$  touchent  $Q$  en  $U_2$ .

On peut déduire des relations précédentes une formule qui nous sera utile dans la suite. Dérivons la dernière de ces relations par rapport à  $u$  et observons que les dérivées partielles de  $\Delta$  sont identiquement nulles, il vient

$$2 \Omega(U_3, h_3 U_2) = 2 h_3 \Omega(U_3, U_2) = -8 (a^2 \alpha)^{10} \Delta = 0,$$

et par suite

$$(\alpha^2 \alpha)^{10} = \alpha^2 \alpha^{10} + 2 \alpha \alpha \alpha^{10} = 0.$$

Cette relation peut d'ailleurs être obtenue en remarquant que, en vertu des relations (2), nous avons

$$\alpha \alpha^{10} + 2 \alpha \alpha^{10} = b \beta^{01} + 2 \beta \beta^{01} = 0.$$

4. Le plan  $U_1 U_2 U_3$  étant tangent à l'hyperquadrique  $Q$  en  $U_2$ , il rencontre cette hyperquadrique suivant deux droites passant par  $U_2$ . Ces deux droites représentent deux faisceaux de rayons ayant en commun la droite  $d$ , représentée par  $U_2$ . Nous désignerons par  $\gamma_1, \gamma_2$  les sommets de ces faisceaux, par  $\eta_1, \eta_2$  leurs plans. La quadrique  $\Phi_i$  dégénère en deux plans  $\eta_1, \eta_2$ .

Le plan  $V_1 V_2 V_3$  coupe  $Q$  suivant une conique qui représente un système de génératrices de la quadrique  $\Phi_1$ , par suite cette conique est dégénérée en deux droites qui représentent deux faisceaux de rayons dont les plans sont nécessairement  $\eta_1, \eta_2$ . Nous verrons que les sommets de ces faisceaux sont les points  $\gamma_2, \gamma_1$ .

Désignons par  $D_1, D_2$  les points où la droite  $V_1 V_2$  coupe  $Q$ , par  $d_1, d_2$  les droites représentées par ces points. Le point  $V_1^0$  appartenant à la droite  $V_1 V_2$ , les points  $D_1, D_2$  pourront être représentés, pour des valeurs convenables  $\xi$ , par

$$V_1^0 + \xi V_1.$$

Nous avons

$$V_1 = M_1 + M_2 - (\log \alpha)^{10} V,$$

$$V_1^0 = 4 ab U - \frac{1}{2} \left[ \alpha - \overline{(\log \alpha)^{10}} \right] V - (\log \alpha)^{10} (M_1 + M_2) + 2 M_3.$$

Les valeurs de  $\xi$  doivent satisfaire à la relation

$$\Omega(V_1^0, V_1^0) + 2 \xi \Omega(V_1, V_1^0) + \xi^2 \Omega(V_1, V_1) = 0,$$

exprimant que  $D_1, D_2$  appartiennent à  $Q$ . Cette relation se réduit à

$$(3) \quad \xi^2 + \alpha = 0.$$

Les points  $D_1$  et  $D_2$  sont donc distincts.

Observons maintenant que l'on a

$$(4) \quad U_3 + 2 \alpha \alpha V + 2 \alpha (\log \alpha k_1)^{10} V_1 + 2 \alpha V_2 = 0.$$



En dérivant par rapport à  $u$ , on déduit de cette relation

$$(5) \quad 2bU_2 + [\alpha + (\log ak_1)^{20} + (\log ak_1)^{10}(\log a^2 k_1)^{10}]V_1 \\ + (\log a^3 k_1^2 k_2)^{10}V_2 + V_3 = 0,$$

c'est-à-dire que les points  $U_2, V_1, V_2, V_3$  sont situés dans un même plan.

Les points de la droite  $V_1V_2$  étant conjugués du point  $U_2$  par rapport à  $Q$ , les droites  $U_2D_1, U_2D_2$  appartiennent à  $Q$  et forment l'intersection du plan  $V_1V_2V_3$  avec cette hyperquadrique.

§. Les coordonnées radiales locales de la droite  $d$ , représentée par  $U_2$ , étant

$$Z_{12} : Z_{13} : Z_{14} : Z_{23} : Z_{25} : Z_{34} = \frac{1}{2}(\overline{\log b})^{01} : 4ab : -(\log b)^{01} : (\log b)^{01} : 0 : 2,$$

les équations locales de cette droite sont

$$(d) \quad \begin{cases} 2z_4(\log b)^{01} - 8abz_2 + (\overline{\log b})^{01}z_3 = 0, \\ 2z_2 + (\log b)^{01}z_4 = 0. \end{cases}$$

Les droites formant l'intersection de  $Q$  et du plan  $U_1U_2U_3$  seront déterminées par  $U_2$  et par les points communs à  $Q$  et à la droite  $U_1U_3$ . Représentons un de ces points par

$$\lambda U_1 + U_3,$$

$\lambda$  devant satisfaire à la relation

$$\lambda^2 \Omega(U_1, U_1) + 2\lambda \Omega(U_1, U_3) + \Omega(U_3, U_3) = 0$$

Cette relation se réduit à

$$(6) \quad \lambda^2 + 4a^2\alpha = 0.$$

Désignons par  $\xi$  une racine déterminée de l'équation (3). Un des points de rencontre de la droite  $U_1U_3$  avec  $Q$  sera alors

$$J_1 = 2a\xi U_1 + U_3,$$

et les équations locales de la droite  $j_1$  seront

$$(j_1) \quad \begin{cases} 2z_3 + [(\log a)^{10} - \xi]z_1 = 0, \\ 2z_1 + [(\log a)^{10} + \xi]z_2 + [4ab + \xi(\log b)^{01}]z_4 = 0. \end{cases}$$

Les droites  $d, j_1$  ont en commun le point  $\gamma_1$  de coordonnées locales

$$(\gamma_1) \quad 8ab - (\log b)^{01} [(\log a)^{10} - \xi], \quad 2(\log b)^{01}, \quad 2[(\log a)^{10} - \xi] - \xi, \quad -4.$$

Elles sont contenues dans le plan  $\eta_1$ , l'équation locale

$$(\eta_1) \quad \begin{aligned} &4z_1 + 2z_2[(\log a)^{10} - \xi] \\ &+ 2z_3(\log b)^{01} + z_4[8ab + (\log b)^{01}\{(\log a)^{10} + \xi\}] = 0. \end{aligned}$$

La seconde racine de l'équation (3) étant  $-\xi$ , le point  $\gamma_2$  aura pour coordonnées locales

$$(\gamma_2) \quad 8ab - (\log b)^{01} [(\log a)^{10} + \xi], \quad 2(\log b)^{01}, \quad 2[(\log a)^{10} + \xi], \quad -4.$$

et le plan  $\eta_2$  aura pour équation locale

$$(\eta_2) \quad \begin{aligned} &4z_1 + 2z_2[(\log a)^{10} - \xi] \\ &+ 2z_3(\log b)^{01}, \quad z_4[8ab + (\log b)^{01}\{(\log a)^{10} - \xi\}] = 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le point

$$D_1 = V_1^0 + \xi V_1$$

corresponde à la racine  $\xi$  de l'équation (3) choisie plus haut. La droite  $d_1$  correspondante a pour équations locales

$$(d_1) \quad \begin{cases} 2z_3 + z_4[(\log a)^{10} - \xi] = 0, \\ 2z_1 + z_2[(\log a)^{10} - \xi] + 4abz_4 = 0. \end{cases}$$

On voit aisément que les droites  $d, d_1$  ont en commun le point  $\gamma_1$  et appartiennent au plan  $\eta_2$ . De même, les droites  $d, d_2$  ont en commun le point  $\gamma_2$  et sont situées dans le plan  $\eta_1$ .

Les points  $\gamma_1, \gamma_2$  sont, avec  $x$ , les points caractéristiques de la quadrique de Lie  $\Phi$ ; ils engendrent par suite les surfaces focales  $(\gamma_1), (\gamma_2)$  de la congruence  $(d)$ . Les plans focaux de la droite  $d$  sont les plans  $\eta_1, \eta_2$ . Le plan  $\eta_2$  est tangent en  $\gamma_1$  à la surface  $(\gamma_1)$  et le plan  $\eta_1$  en  $\gamma_2$  à la surface  $(\gamma_2)$ .

*La quadrique  $\Phi_1$  dégénère en deux plans : les plans focaux  $\eta_1, \eta_2$  de la droite  $d$ . Une des demi-quadriques ayant pour support  $\Phi_1$  est formée des faisceaux de rayons  $(\gamma_1, \eta_1), (\gamma_2, \eta_2)$  dont les sommets sont les foyers de la droite  $d$ ; l'autre demi-quadrique est formée des faisceaux de rayons  $(\gamma_1, \eta_2), (\gamma_2, \eta_1)$ .*

6. Le point  $U_2$  satisfaisant à une équation de Laplace, la droite  $d$  engendre, d'après un théorème de Darboux, une congruence  $W$ .

Aux développables de la congruence ( $d$ ) correspondent, sur la surface ( $U_2$ ), des courbes dont toutes les tangentes appartiennent à l'hyperquadrique  $Q$ . Une de ces courbes est donc enveloppée par la droite  $U_2J_1$  et, par suite, l'équation différentielle des développables de la congruence ( $d$ ) s'obtiendra en posant  $\lambda = du : dv$  dans l'équation (6) et sera donc

$$du^2 + 4 a^2 \alpha dv^2 = 0.$$

Ces développables correspondent donc aux courbes d'un réseau conjugué de la surface ( $x$ ), résultat déjà établi par M. Thomsen (1).

Aux tangentes à la surface ( $\gamma_1$ ) correspondent, sur  $Q$ , les points des droites  $U_2D_1$ . Pour qu'un point  $X$  de cette droite représente une tangente asymptotique de la surface ( $\gamma_1$ ), il faut que le plan tangent en ce point à la surface qu'il engendre soit tangent à l'hyperquadrique  $Q$  le long de la droite  $U_2D_1$ . Posons

$$X = \lambda U_2 + \mu D_1.$$

L'expression

$$\Omega(X^{10} du + X^{01} dv, X^{10} du + X^{01} dv)$$

devra tout d'abord se réduire à un carré parfait. Cette condition est d'ailleurs suffisante, car le plan tangent en  $X$  à la surface ( $X$ ) contient certainement la droite  $U_2D_1$  et, par suite, la condition étant remplie, ce plan tangent rencontrera  $Q$  suivant cette droite comptée deux fois. La condition en question donne les deux solutions  $\lambda = 0, \mu = 1$  et

$$2 a \xi \lambda + (\xi^{01} + k_1) \mu = 0.$$

La droite  $d_1$  est donc une tangente asymptotique de la surface ( $\gamma_1$ ). Un calcul simple montre que l'équation

$$\Omega(D_1^{10} du + D_1^{01} dv, D_1^{10} du + D_1^{01} dv) = 0$$

(1) Ueber eine liniengeometrische Behandlungsweise der projectiven Flächentheorie und die projektive Geometrie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung (Abhandlungen aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität, Bd IV, 1925, p. 233-266).

se réduit à  $dv = 0$ . On voit ensuite qu'au point

$$(\xi^{01} + k_1)U_2 - 2a\xi D_1$$

correspond l'équation  $du = 0$ . Par suite, les courbes  $u$ ,  $v$  sont les asymptotiques de la surface  $(\gamma_1)$  et les droites  $d_1$  sont tangentes aux asymptotiques  $u$ .

En changeant  $\xi$  en  $-\xi$ , on obtient les résultats concernant la droite  $U_2 D_2$  et le point  $\gamma_2$ . On voit ainsi que :

*Dans la correspondance entre les surfaces  $(x)$ ,  $(\gamma_1)$ ,  $(\gamma_2)$ , les asymptotiques sont conservées (1). Les droites  $d_1$ ,  $d_2$  sont respectivement les tangentes asymptotiques aux lignes  $u$  des surfaces  $(\gamma_1)$ ,  $(\gamma_2)$ .*

7. Les directrices de Wilczynski de la surface  $(x)$  relatives au point  $x$  sont représentées sur  $Q$  par les points où la droite  $U_1 V_1$  rencontre cette hyperquadrique. Précisément, le point

$$R = 2M_1 - (\log b)^{01}U - (\log a)^{10}V$$

représente la directrice de Wilczynski  $r$  passant par le point  $x$  et dont les équations locales sont

$$r) \quad \frac{\xi_2}{(\log b)^{01}} = \frac{\xi_3}{(\log a)^{10}} = \frac{\xi_4}{-2}.$$

Le point

$$S = 2M_2 + (\log b)^{01}U - (\log a)^{10}V$$

représente la directrice  $s$  située dans le plan tangent à  $(x)$  en  $x$  et dont les équations locales sont

$$s) \quad 2\xi_1 + \xi_2(\log a)^{10} + \xi_3(\log b)^{01} = 0, \quad \xi_4 = 0.$$

Nous avons étudié récemment les congruences formées par les directrices de Wilczynski (2). L'équation différentielle des développables est la même pour les deux congruences et se réduit dans

(1) Ce résultat a déjà été signalé par M. DEMOULIN (*C. R. Acad. Sc.*, t. 147, 1908, *loc. cit.*) et par M. THOMSEN dans son Mémoire *Sulle superficie minime proiettiva* (*Annali di Matematica*, t. V, 1927-1928, p. 169-184).

(2) *Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1928, p. 335-345).

le cas actuel à

$$(7) \quad x du^2 + 2 \left( \log \frac{a}{b} \right)^{11} du dv = 0$$

Les points focaux de la droite sont

$$p = [16 ab - 2(\log b)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x \\ + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11},$$

$$q = [16 ab - 2(\log a)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x \\ + 2x^{10}(\log b)^{01} + 2x^{01}(\log a)^{10} - 4x^{11}.$$

On a d'ailleurs

$$2(h_1 - k_1)q^{01} = [2ax - (h_1 + k_1)(\log b)^{01} - 2k_1^{01}]q \\ + 2[k_1(\log bk_1)^{01} - ax]p.$$

Les foyers de la droite  $s$  sont

$$m = 2(h_1 - k_1)[x(\log a)^{10} - 2x^{10}] + 2[x(\log b)^{01} - 2x^{01}], \\ n = x(\log b)^{01} - 2x^{01},$$

et l'on a

$$2(h_1 - k_1)n^{01} + [(h_1 - k_1)(\log b)^{01} - 2ax]n + 2am = 0.$$

Les plans focaux de la droite  $s$  ont pour équations locales

$$(8) \quad 4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} \\ + 2z_3(\log b)^{01} + [2(\log a)^{11} + (\log a)^{10}(\log b)^{01}]z_4 = 0,$$

$$(9) \quad 4z_1 + 2z_2(\log a)^{10} \\ + 2z_3(\log b)^{01} + [2(\log b)^{11} + (\log a)^{10}(\log b)^{01}]z_4 = 0.$$

Le premier est tangent en  $m$  à la surface ( $m$ ), le second en  $n$  à la surface ( $n$ ).

Les plans (8), (9) rencontrent la droite  $r$  respectivement aux points

$$m' = [2(\log a)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x \\ + 2(\log b)^{01}x^{10} + 2(\log a)^{10}x^{01} - 4x^{11},$$

$$n' = [2(\log b)^{11} - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x \\ + 2(\log b)^{01}x^{10} + 2(\log a)^{10}x^{01} - 4x^{11}.$$

Tout point de la droite  $r$  peut être représenté par

$$\lambda p + \mu q.$$

Si ce point coïncide avec  $m'$ , on a

$$(h_1 + k_1)\lambda + 2k_1\mu = 0,$$

et s'il coïncide avec  $n'$ ,

$$2h_1\lambda + (h_1 + k_1)\mu = 0.$$

Cela étant, l'involution déterminée sur la droite  $r$  par les couples  $p, n'$  et  $q, m'$  est représentée par

$$2h_1\lambda_1\lambda_2 + (h_1 + k_1)(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + 2k_1\mu_1\mu_2 = 0.$$

Les points doubles de cette involution sont donnés par

$$\lambda + \mu = 0, \quad h_1\lambda + k_1\mu = 0.$$

Le premier de ces points est le point  $x$ , le second est un point  $y = [8ab - (\log a)^{10}(\log b)^{01}]x + 2(\log b)^{01}x^{10} + 2(\log a)^{10}x^{01} - 4x^{11}$ .

Nous allons établir une seconde propriété du point  $y$ .

Le point  $y_1 + y_2$  a pour coordonnées locales

$$16ab - 2(\log a)^{10}(\log b)^{01}, \quad 4(\log b)^{01}, \quad 4(\log a)^{10}, \quad -8.$$

Par suite nous avons

$$2y = y_1 + y_2.$$

Le point  $y$  est précisément le point d'appui de la droite  $d$  sur la droite  $r$ .

*Si  $p, q$  sont les foyers de la droite  $r$ ;  $m', n'$  les points de rencontre de  $r$  avec les plans focaux de la droite  $s$  correspondant aux mêmes solutions de l'équation (7) que  $p, q$  respectivement, l'involution déterminée sur la droite  $r$  par les couples de points  $p, n'$  et  $q, m'$ , possède comme points doubles le point  $x$  et le point d'appui de  $d$  sur  $r$  (1).*

Observons que le point  $y_1 - y_2$  a pour coordonnées locales

$$2\xi(\log b)^{01}, \quad 0, \quad -4\xi, \quad 0.$$

(1) Pour toute surface, il existe sur  $r$  un point  $y$  tel que les quaternes  $(xypn')$ ,  $(xyqm')$  sont harmoniques. Nous avons signalé cette propriété dans une communication faite au Congrès international des Mathématiciens de Bologne (1928).

Par suite, on a

$$F_1 - F_2 - 2 \xi n = 0,$$

et la droite  $d$  s'appuie sur  $s$  au point  $n$ . De plus :

*La droite  $d$  s'appuie sur les directrices de Wilczynski en des points partageant harmoniquement les foyers de cette droite.*

8. La suite de Laplace  $\dots, U, V, \dots$  possède une propriété intéressante que nous allons établir.

Les relations (4), (5) obtenues plus haut montrent que le point  $U_3$  appartient au plan  $VV_1V_2$  et le point  $U_2$  au plan  $V_1V_2V_3$ .

En dérivant la relation (4) par rapport à  $v$ , on obtient encore la relation

$$(10) \quad U_4 - 4a^2\alpha U - 2ak_1(\log ak_1)^{10}V + 2ak_1V_1 = 0,$$

et le point  $U_4$  appartient donc au plan  $UVV_1$ .

L'hyperplan polaire de  $U_4$  par rapport à  $Q$ , c'est-à-dire l'hyperplan  $V_2V_3V_4V_5V_6$ , contient le plan conjugué de  $UVV_1$ , c'est-à-dire  $U, UV$ .

Pour la même raison, l'hyperplan polaire  $V_1V_2V_3V_4V_5$  de  $U_3$  contient le plan  $UU_1U_2$  et l'hyperplan polaire de  $U_2$ , c'est-à-dire  $VV_1V_2V_3V_4$ , contient le plan  $U_1U_2U_3$ . Il en résulte que le point  $U_1$  appartient au plan  $V_2V_3V_4$ .

D'après ce qui précède, les points  $U, U_1$  sont conjugués de  $U_3, U_4$ , par suite  $U$  appartient à l'espace  $V_2V_3V_4V_5$ . De plus, on a

$$(11) \quad \Omega(U, U_1) = 0, \quad \Omega(U_1, U_4) = 0.$$

En dérivant la première de ces relations par rapport à  $v$  et en tenant compte de la seconde, on trouve

$$(12) \quad \Omega(U, U_5) = 0.$$

Le point  $U$  étant conjugué de  $U_3$  appartient à l'hyperplan polaire  $V_3V_4V_5V_6V_7$  de ce dernier. Par suite,  $U$  appartient au plan  $V_3V_4V_5$  (1).

En dérivant la relation (12) par rapport à  $u$  et en tenant compte

(1) Il est évident que le point  $V_2$  ne peut appartenir à l'hyperplan  $V_3\dots V_7$ .

de la première des relations (11), on trouve

$$(13) \quad \Omega(V, U_5) = 0.$$

Le point  $V$ , étant conjugué de  $U_4, U_5$ , appartient à l'espace  $V_3 V_4 V_5 V_6$ . En dérivant (13) par rapport à  $\nu$ , on en tire, par (12),

$$\Omega(V, U_6) = 0.$$

Par suite,  $V$  appartient à l'hyperplan polaire  $V_4 V_5 V_6 V_7 V_8$  de  $U_6$  et par conséquent au plan  $V_4 V_5 V_6$ .

Supposons, plus généralement, que le point  $V_n$  appartienne au plan  $V_{n+4} V_{n+5} V_{n+6}$ . Alors,  $V_n$  est conjugué des points  $U_{n+4}, U_{n+5}, U_{n+6}$  par rapport à  $Q$  et l'on a

$$(14) \quad \Omega(V_n, U_{n+4}) = 0, \quad \Omega(V_n, U_{n+5}) = 0, \quad \Omega(V_n, U_{n+6}) = 0.$$

En dérivant la seconde des relations (14) par rapport à  $u$ , on a  
 $\Omega(V_{n+1}, U_{n+5}) + (\log ak_1 \dots k_n)^{10} \Omega(V_n, U_{n+5}) + h_{n+5} \Omega(V_n, U_{n+4}) = 0.$

Par suite, on a

$$\Omega(V_{n+1}, U_{n+5}) = 0.$$

En partant de la troisième des équations (14), on tire de même

$$(15) \quad \Omega(V_{n+1}, U_{n+6}) = 0.$$

On en conclut que  $V_{n+1}$  appartient à l'espace  $V_{n+4} V_{n+5} V_{n+6} V_{n+7}$ .

En dérivant (15) par rapport à  $\nu$ , on a

$$k_{n+1} \Omega(V_n, U_{n+6}) + \Omega(V_{n+1}, U_{n+7}) + (\log bh_1(\dots h_{n+6}))^{01} \Omega(V_{n+1}, U_{n+6}) = 0.$$

On en tire

$$\Omega(V_{n+1}, U_{n+7}) = 0.$$

Par suite,  $V_{n+1}$  appartient à l'hyperplan  $V_{n+5} \dots V_{n+9}$  et par suite au plan  $V_{n+5} V_{n+6} V_{n+7}$ . D'une manière générale, on peut donc dire que le point  $V_n$  appartient au plan  $V_{n+4} V_{n+5} V_{n+6}$  pour toute valeur de  $n$ .

L'hyperplan polaire  $V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$  de  $U_n$  par rapport à  $Q$  contient, d'après ce qui précède, les points  $V_{n-6}, V_{n-5}, V_{n-4}$ . Par suite,  $U_n$  appartient au plan  $U_{n-6} U_{n-5} U_{n-4}$  conjugué du plan  $V_{n-6} V_{n-5} V_{n-4}$ .



*Si l'on range les points de la suite de Laplace . . . , U, V, . . . de manière que l'un d'eux soit le transformé du précédent dans le sens des  $u$ , tout point de cette suite appartient au plan déterminé par les trois points occupant le quatrième, cinquième et sixième rang après le point considéré.*

9. Nous allons maintenant considérer le cas où le rapport de  $a$  à  $b$  est le produit d'une fonction de  $u$  seule par une fonction de  $v$  seule. On a alors

$$(\log a)^{h_1} = (\log b)^{k_1}, \quad h_1 = k_1.$$

L'équation différentielle (7) des développables des congruences de Wilczynski se réduit à

$$a du^2 = 0.$$

Les foyers  $p, q$  de la droite  $r$  sont confondus et la congruence ( $r$ ) est formée de tangentes asymptotiques d'une surface ( $p$ ). De même, les foyers  $m, n$  de la droite  $s$  sont confondus et la congruence ( $s$ ) est formée de tangentes asymptotiques d'une surface ( $n$ ). Sur les surfaces ( $p$ ), ( $n$ ), les lignes  $v$  sont les asymptotiques.

Le premier des théorèmes établis au n° 7 n'a plus de sens; il doit être remplacé par le suivant : *Le quaterne de points ( $x, y, p, n'$ ) est harmonique.*

---